

RESTAURATION D'IMAGES DANS C^2 PAR UNE METHODE RAPIDE DE REGULARISATION
COMPLEX IMAGE RESTORATION WITH A FAST REGULARIZATION METHOD

Didier SAINT-FELIX, Ali M. DJAFARI et Guy DEMOMENT

Laboratoire des Signaux et Systemes (CNRS/ESE) - 91190 GIF S/YVETTE - FRANCE

RESUME

On s'intéresse à la restauration d'images dégradées par un processus linéaire et considérées comme des fonctions de R^2 dans C . Dans ce problème de déconvolution bi dimensionnelle, les difficultés proviennent de son caractère mal posé et du nombre important de données à manipuler.

La méthode itérative et récursive de Kaczmarz pour inverser un système linéaire d'équations est particulièrement attrayante de par sa simplicité de mise en oeuvre. Mais la solution inverse généralisée fournie est instable en présence de bruit. Aussi, nous proposons de stabiliser le problème par régularisation. Une procédure récursive de calcul de la solution régularisée est développée. Les liens avec le filtrage de Kalman sont alors établis. Sa simplification permet ensuite de retrouver une légèreté de mise en oeuvre analogue à celle de la méthode de Kaczmarz.

L'application de cette méthode à des images obtenues par simulation ou par échographie ultrasonore fournit une solution stable en un faible nombre d'itérations.

SUMMARY

Restoration of an image distorted by a linear spatially invariant system can be viewed as a 2-D deconvolution problem. The major difficulties lie in stabilizing the solution of such an ill-posed problem and in the computational burden inherent to the large amount of data involved in realistic image processing. The iterative and recursive Kaczmarz method for solving linear systems of equations is a powerful tool to settle these last ones. But the generalized inverse solution it provides is unstable in presence of noise. A generalization of this method, with a stability and a convergence speed increased, is presented and shown to be an iterative method for computing a regularized solution. This method is applied to images considered as complex functions on R^2 to avoid loss of information in problems involving wave equations. Examples of simulated and ultrasonic images restoration are given.



INTRODUCTION

La restauration d'images dégradées par un processus linéaire connu est un problème qui se rencontre dans de nombreux domaines : échographie ultra-sonore, tomographie micro-onde, imagerie optique avec défocalisation, etc... Il s'agit là d'un problème inverse : à partir de données expérimentales et de la connaissance de la fonction d'appareil, il faut remonter à une information sur la source ou le milieu observé. Ce problème classique de la physique expérimentale consiste ici à résoudre une équation intégrale de Fredholm de première espèce. On sait qu'il s'agit là d'un problème mal posé et les méthodes permettant de stabiliser la solution par l'introduction d'information a priori ont été largement discutées [1],[2].

Dans le cas de la restauration d'images, une difficulté supplémentaire due au volume important des données s'ajoute à la difficulté inhérente au caractère mal-posé du problème. Ceci conduit, par exemple, à adopter des méthodes récursives pour traiter des images de dimensions réalistes avec des moyens de calcul légers. Parmi celles-ci, la méthode de Kaczmarz est particulièrement attrayante par sa simplicité de mise en oeuvre. En l'absence de bruit de mesure, elle converge vers la solution inverse généralisée du système linéaire associé à l'équation intégrale initiale [3]. Mais cette solution est instable en présence de bruit. La régularisation du problème initial permet d'en stabiliser la solution, mais les méthodes usuelles ne sont pas récursives [2],[4]. Nous proposons ici une méthode de régularisation itérative et récursive présentant le double avantage d'une grande simplicité de mise en oeuvre et d'une bonne vitesse de convergence; nous montrons qu'il s'agit là d'une extension de la méthode de Kaczmarz. Cette méthode est ensuite appliquée à des images considérées comme des fonctions de R^2 dans C . Le choix d'un espace complexe, s'il augmente l'encombrement mémoire, permet d'utiliser toute l'information disponible dans des problèmes mettant en jeu des phénomènes de propagation où il est possible de mesurer complètement un champ: tomographie micro-ondes par exemple.

FORMULATION DISCRETE DU PROBLEME

Soit $x(s,s')$ une fonction de R^2 dans C décrivant l'objet. Celui-ci est observé au travers d'un appareil linéaire; l'image mesurée $y(s,s')$ vérifie :

$$y(s,s') = \iint h(s-r, s'-r') \cdot x(r,r') \cdot dr dr' \quad (1)$$

où $h(s,s',r,r')$ est la fonction d'appareil supposée spatialement invariante.

Il s'agit de résoudre cette équation (1) connaissant le noyau h et l'observation y , ce qui implique une étape ultime de calcul numérique. On a donc le choix entre :

- i) régulariser d'abord le problème dans un espace fonctionnel puis appliquer des méthodes numériques d'approximation de problèmes bien posés,
 - ii) ou bien discrétiser le problème initial pour résoudre ensuite l'instabilité du problème discret par des méthodes de régularisation algébriques.
- Nous avons retenu la seconde voie.

Supposons que h soit à support borné, ce qui

est peu contraignant dans le cas d'un problème réel. Le nombre d'observations étant fini, seule une partie finie D de l'objet contribue à la formation de l'image observée. En supposant de plus un pas de discrétisation constant par rapport à s et s' on a :

$$y(i,j) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{N'} h(k,l) \cdot x(i-k-N, j-l-N') \quad (2)$$

Soit $X=\{x(i,j)\}$ et $Y=\{y(i,j)\}$ les matrices construites à partir des valeurs échantillonnées de x et y . Le système linéaire (2) s'écrit :

$$\underline{y} = H \underline{x} \quad (3)$$

où \underline{x} et \underline{y} sont les vecteurs construits par concaténation des lignes de X et Y :

$$\begin{aligned} \underline{y}_t^t &= [y(1,1), \dots, y(1,L'), \dots, y(L,L')] \\ \underline{x}_t^t &= [x(1,1), \dots, x(1,M'), \dots, x(M,M')] \end{aligned} \quad (4)$$

La matrice H est une matrice bloc construite à partir des valeurs échantillonnées du noyau et dont la structure dépend de l'information a priori sur les bords de l'image. Dans le cas le plus général, cette information est inexistante. Les dimensions de la partie utile D de l'objet sont alors liées à celles de l'image par $M = L+N-1$ et $M' = L'+N'+1$ où N et N' sont les dimensions du noyau discrétisé. La matrice H est alors bloc-circulante de dimensions (LL', MM') :

$$H = \begin{bmatrix} H & . & . & H & 0 & . & . & 0 \\ 0 & H & . & . & H & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & H & . & . & . & H \end{bmatrix} \quad (5)$$

où chaque bloc H_j est une matrice circulante de dimensions (L', M') :

$$H_j = \begin{bmatrix} h(j,N') & . & . & h(j,1) & 0 & . & . & 0 \\ 0 & h(j,N') & . & . & h(j,1) & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & h(j,N') & . & . & h(j,1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

(Pour simplifier les notations, on note désormais $h(i,j)$ l'élément $h(N+1-i, N'+1-j)$ de la matrice formée par concaténation des lignes du noyau tel qu'il pourrait être observé expérimentalement.)

L'introduction d'information a priori sur les bords de D peut modifier H : si l'on sait que les bords de l'objet ne contribuent pas à la formation de l'image observée, alors les dimensions de \underline{x} peuvent être réduites dans les limites des intervalles : $L-N+1 \leq M \leq L+N-1$ et $L'-N'+1 \leq M' \leq L'+N'-1$. H (resp. H_j) ne comprend plus alors que les M (resp. M') colonnes centrales de (5) (resp. (6)). Les dimensions sont réduites, mais la structure circulante est alors perdue: H (resp. H_j) devient une matrice bloc-Toeplitz (resp. Toeplitz). Aussi nous n'utiliserons que le seul caractère Toeplitz, moins riche, mais plus général ici.

Ainsi, après discrétisation, le problème de la déconvolution se ramène à celui de l'inversion du système linéaire (3). Les difficultés sont dues au caractère mal posé et aux dimensions élevées de H (typiquement 20.000, 20.000 pour une image 128, 128). De plus, ce système peut être fortement indéterminé (quand $MM' > LL'$). Toute méthode numérique d'inversion directe fournira une solution instable et il nous faut

RESTAURATION D'IMAGES DANC C² PAR UNE METHODE RAPIDE DE REGULARISATION
 COMPLEX IMAGE RESTORATION WITH A FAST REGULARIZATION METHOD

Didier SAINT-FELIX, Ali M. DJAFARI et Guy DEMOMENT

trouver une méthode capable de fournir simplement une solution acceptable au problème de la résolution d'un système d'équations linéaires mal conditionné ou même singulier.

INVERSION GENERALISEE

Une façon naturelle d'étudier les problèmes de restauration de signaux consiste à se placer dans des espaces de Hilbert. La déconvolution peut ainsi se ramener à la résolution du problème linéaire :

$$y = Hx \quad x \in S \quad y \in S' \quad (7)$$

où S et S' sont des espaces de Hilbert et où H : S → S' est un opérateur linéaire borné et compact. <.,.> désigne le produit scalaire dans chacun des espaces et ||.|| les normes induites correspondantes. Si y n'appartient pas à l'image de H : Im(H), (7) n'a pas de solution au sens classique du terme. Comme cette situation est fréquente, il faut étendre la notion de solution. On peut par exemple définir une quasi-solution :

$$\hat{x} : \|H\hat{x} - y\| \leq \|Hx - y\| \quad x \in S_0 \quad S_0 \subset S \quad (8)$$

ce qui conduit à une solution inverse généralisée ou solution des moindres carrés de norme minimale. Le calcul de cette solution peut être fait de manière très efficace par la méthode de Kaczmarz [3]. Supposons que S et S' soient de dimensions finies, et soit H* l'opérateur adjoint de H. (7) peut aussi s'écrire :

$$\langle x, h_i \rangle = y_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

où <a,b> = b*a et où h_i est le i^{ème} vecteur colonne de H*. La méthode de Kaczmarz est définie par :

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) - \|h_i\|^{-2} [\langle \hat{x}(k), h_i \rangle - y_i] h_i \quad (10)$$

où k=0,1,2,... et i=i(k)=i(k-1)+1 (mod.LL')

En appliquant cet algorithme au vecteur initial $\hat{x}(0)=0$, la limite de $\hat{x}(k)$ est la solution de norme minimale ou pseudo-inverse de (7). Le principal avantage de cette méthode réside dans son caractère récursif et dans sa très grande simplicité de mise en oeuvre.

On aimerait cependant obtenir une quasi-solution pour tout $y \in S'$. Ceci n'est possible que si Im(H) est fermée. Dans ce cas, l'inverse généralisée $H^+ : S' \rightarrow S$ est un opérateur borné bien défini. La recherche d'une solution pseudo-inverse $\hat{x} = H^+ y$ est alors un problème stable et bien-posé. Dans les problèmes de restauration de signaux, les opérateurs sont compacts et leurs images ns sont alors presque jamais fermées. C'est là le principal inconvénient des méthodes de pseudo-inversion qui fournissent des solutions instables en présence de bruit.

REGULARISATION ITERATIVE

Il faut bien voir qu'en réalité nous sommes confrontés à l'équation :

$$y = Hx + b \quad (11)$$

où b représente l'erreur de mesure de y ou bruit

d'observation. Ce bruit étant considéré comme aléatoire, il nous faut changer la notion même de solution en introduisant une solution approchée :

$$\hat{x} : \|H\hat{x} - y\| \leq \epsilon \quad \epsilon > 0 \text{ fixé} \quad (12)$$

Au lieu de calculer une solution de norme minimale, on choisit de minimiser :

$$J_a(x) = \|Hx - y\|^2 + a \|Cx\|^2 \quad a > 0 \quad (13)$$

où C est un opérateur différentiel choisi pour contrôler les propriétés de la solution (et donc traduisant une information a priori sur cette solution) et où le paramètre de régularisation a est choisi pour réaliser le compromis classique biais-variance. C'est la régularisation PT (Phillips-Twomey-Tikhonov) [1] dont la solution s'écrit :

$$\hat{x} = (H^* H + aC^* C)^{-1} H^* y \quad (14)$$

Le régulariseur $R_a = (H^* H + aC^* C)^{-1} H^*$ est un opérateur continu de S' dans S. La solution régularisée (14) peut être considérée comme la première itération de la méthode de Landweber généralisée par Strand [5] :

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= 0 \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_k - DH^* [H\hat{x}_k - y] \end{aligned} \quad (15)$$

avec $D = (H^* H + aC^* C)^{-1}$. Malheureusement, le traitement récursif des observations, qui était le principal intérêt de la méthode de Kaczmarz, est perdu. Ceci nous conduit à chercher une autre procédure.

Soit $\hat{x}(i)$ la solution régularisée calculée à partir des i premières coordonnées de y regroupées dans le vecteur y_i . Elle est de la forme :

$$x_i = (H_i^* H_i + aC^* C)^{-1} H_i^* y_i \quad (16)$$

La prise en compte d'une nouvelle observation y(i+1) :

$$y(i+1) = h_{i+1} x + b(i+1) \quad (17)$$

permet de calculer une nouvelle solution :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= (H_{i+1}^* H_{i+1} + aC^* C)^{-1} H_{i+1}^* y_{i+1} \\ &= [H_i^* H_i + h_{i+1} h_{i+1}^* + aC^* C]^{-1} \cdot \\ &\quad [H_i^* y_i + h_{i+1} y(i+1)] \end{aligned} \quad (18)$$

Soit $P_i = (H_i^* H_i + aC^* C)^{-1}$. Alors :

$$P_{i+1}^{-1} = P_i^{-1} + h_{i+1} h_{i+1}^* \quad (20)$$

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + P_{i+1} h_{i+1} \cdot [y(i+1) - h_{i+1}^* \hat{x}_i] \quad (21)$$

En utilisant le lemme d'inversion de matrice, l'inversion directe de (20) n'est plus nécessaire puisque :

$$P_{i+1} = P_i - P_i h_{i+1} \cdot (h_{i+1}^* P_i h_{i+1} + 1)^{-1} h_{i+1}^* P_i \quad (22)$$

où l'expression à inverser est un scalaire. Il vient alors :

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + P_{i+1} h_{i+1} \cdot [h_{i+1}^* P_i h_{i+1} + 1]^{-1} [y(i+1) - h_{i+1}^* \hat{x}_i] \quad (23)$$



RESTAURATION D'IMAGES DANC C^2 PAR UNE METHODE RAPIDE DE REGULARISATION
 COMPLEX IMAGE RESTORATION WITH A FAST REGULARIZATION METHOD
 Didier SAINT-FELIX, Ali M. DJAFARI et Guy DEMOMENT

On reconnaît les équations de base d'un filtre de Kalman [6]. Ceci n'est pas surprenant puisque ce dernier peut être considéré comme un estimateur des moindres carrés pour lequel le critère usuel portant sur les résidus est complété par un terme d'incertitude sur l'état \underline{x} . Ceci permet d'ailleurs de donner une interprétation probabiliste simple à cette régularisation :

- le bruit d'observation \underline{b} est implicitement supposé non corrélé,
- C^*C est l'inverse de la matrice de covariance a priori normalisée du signal à restaurer,
- le coefficient de régularisation a est l'inverse du rapport signal-à-bruit.

L'algorithme (22-23) est bien plus efficace que (14) puisqu'il n'y a plus de matrice à inverser. Cependant, la matrice de pondération P_i (ou matrice de covariance d'erreur dans l'interprétation probabiliste) doit être remise à jour à chaque récursion. De plus, l'encombrement mémoire peut être grand puisque les dimensions de P_i peuvent être (MM', MM') (M, M' : dimensions de l'objet).

SIMPLIFICATION DE LA METHODE

Après avoir obtenu une formulation récursive du calcul de la solution régularisée ne nécessitant pas d'inversion de matrice, nous allons chercher à la simplifier pour retrouver la simplicité de la méthode de Kaczmarz. Ceci se fait en deux étapes.

1^{ère} étape : Par application répétée de (20) à lui-même, on obtient :

$$P_{i+1}^{-1} = P_i^{-1} + \underline{h}_{i+1} \underline{h}_{i+1}^* = P_0^{-1} + \sum_{j=1}^{i+1} \underline{h}_j \underline{h}_j^* \quad (24)$$

avec $P_0^{-1} = aC^*C$. On en tire une nouvelle expression du vecteur gain affectant l'erreur de prédiction dans (21) :

$$P_{i+1} \underline{h}_{i+1} = [I + \sum_{j=1}^{i+1} \underline{h}_j \underline{h}_j^* P_0]^{-1} P_0 \underline{h}_{i+1} \quad (25)$$

Pour réduire le volume des calculs, la matrice à inverser dans (25) est remplacée par une matrice diagonale de même trace en utilisant la propriété : $\text{trace}(\underline{u}\underline{u}^*B) = \underline{u}^*B\underline{u}$. Soit M_j la matrice diagonale définie par :

$$\{M_j\}_{kk} = (1/l_j) \cdot \underline{h}_j \underline{h}_j^* P_0 \quad \text{si } h_j(k) \neq 0$$

$$= 0 \quad \text{ailleurs}$$

l_j étant le nombre d'éléments non nuls de \underline{h}_j . L'algorithme (22-23) est alors remplacé par :

$$\underline{\hat{x}}_{i+1} = \underline{\hat{x}}_i + [I + \sum_{j=1}^{i+1} M_j]^{-1} P_0 \underline{h}_{i+1} \cdot [y(i+1) - \underline{h}_{i+1}^* \underline{\hat{x}}_i] \quad (26)$$

Cette expression présente une forte analogie avec la récursion de la méthode de Kaczmarz. On y reconnaît en fait une forme d'approximation stochastique. En effet, si on prend $P_0 = I$, il vient, pour une coordonnée quelconque de $\underline{\hat{x}}$:

$$\hat{x}_{i+1}(k) = \hat{x}_i(k) + [1 + |h_{i+1}^2 g(k)/l|]^{-1} h_{i+1}(k) [y(i+1) - \underline{h}_{i+1}^* \underline{\hat{x}}_i] \quad (27)$$

où $g(k)$ est une fonction monotone croissante de k . (27) est alors une forme de loi forte des grands nombres.

La relation (26) serait équivalente à (23) si $\underline{h}_j \underline{h}_j^* P_0$ était une matrice diagonale, ce qui faux en général. Il faut donc s'attendre à une dégradation de la vitesse de convergence de la méthode (26) par rapport à la méthode (22-23) et donc à la nécessité de plusieurs itérations, c'est à dire de plusieurs balayages de l'image.

La nécessité d'itérer plusieurs fois peut d'ailleurs s'avérer avantageuse lorsque l'information a priori sur la solution ne peut s'exprimer seulement par une fonction de régularisation quadratique (13). C'est la cas par exemple des contraintes de positivité qui peuvent s'exprimer à l'aide d'un opérateur de contrainte Q tel que : $\underline{x} = Q\underline{x}$. Il suffit alors, lorsque la méthode est itérative, de modifier l'itération de base (26) selon :

$$\underline{\hat{x}}_{i+1} = Q \underline{\hat{x}}_i + G(i)[y(i+1) - \underline{h}_{i+1}^* Q \underline{\hat{x}}_i] \quad (28)$$

Chaque fois que l'on utilise une méthode itérative pour la résolution numérique d'un problème, une règle doit être fixée pour arrêter la procédure [7]. Les observations étant contaminées par du bruit, il est naturel d'établir une règle fondée sur l'évolution du résidu global $|\underline{H}\underline{\hat{x}}_i - \underline{y}|$. Le seuil d'arrêt $\epsilon > 0$ étant choisi avant la première itération, le rang k de l'itération finale est déterminé par :

$$|\underline{H}\underline{\hat{x}}_i - \underline{y}| > \epsilon \quad \text{si } i < k; \quad |\underline{H}\underline{\hat{x}}_k - \underline{y}| < \epsilon \quad (29)$$

Si ϵ est choisi tel que $\epsilon > \|\underline{b}\|$ et $\epsilon \rightarrow 0$ quand $\|\underline{b}\| \rightarrow 0$, alors on montre que la méthode itérative proposée est une méthode de régularisation dans laquelle $1/k$ joue le rôle du paramètre de régularisation. Ceci explique d'ailleurs le fait bien connu que, pour des systèmes linéaires creux et de grandes dimensions, quelques itérations d'une méthode d'inversion généralisée relaxée peuvent fournir une solution régularisée [1]. De là le succès des méthodes ART en tomographie axiale transverse.

2^{ème} étape : L'algorithme (26) peut encore être simplifié en négligeant I devant M_j et en prenant $M_j = |h_j|^2 \cdot I$. En outre, le volume des calculs à chaque récursion peut être notablement réduit en utilisant le fait que H est creuse et Toeplitz.

En effet, dans la région centrale de l'image, on passe de \underline{h}_i à \underline{h}_{i+1} par simple décalage, quelles que soient les conditions sur les bords de l'image (éq. 6 ou 9). De plus, \underline{h}_i contient un nombre important de zéros et seules NN' coordonnées de $\underline{\hat{x}}_i$ sont affectées par (27). En posant :

$$\underline{h}^* = [h(1,1), \dots, h(1,N'), \dots, h(N,N')] \quad (30)$$

alors l'observation $y(k,l)$ peut s'écrire :

$$y(k,l) = \langle \underline{h}_i, \underline{x} \rangle = \langle \underline{h}, \underline{w}_i \rangle \quad (31)$$

où \underline{w}_i est un vecteur extrait de \underline{x} et ne contenant que les composantes affectées par les éléments non nuls de \underline{h}_i . L'algorithme est alors défini à l'itération j par :



RESTAURATION D'IMAGES DANC C^2 PAR UNE METHODE RAPIDE DE REGULARISATION
COMPLEX IMAGE RESTORATION WITH A FAST REGULARIZATION METHOD

Didier SAINT-FELIX, Ali M. DJAFARI et Guy DEMOMENT

$$\hat{w}_i = \hat{w}_i^0 - K_i \cdot (i) \quad (32)$$

$$(i) = y(k,l) - \langle h, \hat{w}_i \rangle \quad (33)$$

$$K_i = m_j \cdot |h_i|^{-2} h_i \quad \text{et } 0 < m_j < 1 \quad (34)$$

et l'initialisation se fait en prenant :

$$\hat{w}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \hat{x}_0 = 0$$

$$\hat{w}_{i+1}^0 = A \hat{w}_i + B \hat{w}_{i-L+N'-1} + C_{i+1} \hat{x}_{j-1} \quad (35)$$

où les matrices A, B et C_{i+1} dépendent du mode de balayage de l'image. Pour un balayage du type "raster scan", on a par exemple :

$$A = \{a(i,j)\} \quad \begin{array}{l} a(i,i+1)=1 \text{ si } i \neq kN' \\ a(i,j) = 0 \text{ ailleurs} \end{array}$$

$$B = \{b(i,j)\} \quad \begin{array}{l} b(i,i+1)=1 \text{ si } i=kN' \\ b(i,j) = 0 \text{ ailleurs} \end{array}$$

et C_{i+1} permet d'initialiser $\hat{w}_{i+1}^0 (NN')$ à partir de l'estimation \hat{x}_{j-1} obtenue à l'itération précédente.

On remarquera que le vecteur gain K_i est constant dans la partie centrale de l'image et peut être calculé préalablement. Si les dimensions de l'objet restauré sont plus petites que les dimensions maximales définies par (6), K_i doit être évalué sur les bords de l'image selon :

$$K_i = m_j \cdot |h_i|^{-2} h_i \quad (36)$$

Il est clair que les calculs peuvent encore être réduits en négligeant ces effets de bord et en prenant $|h_i| = |h|$.

ACCELERATION DE LA METHODE

La résolution numérique du problème de restauration exige beaucoup plus que d'assurer la preuve que la convergence recherchée est obtenue : la vitesse de convergence joue un rôle essentiel. La solution recherchée étant définie par (14), l'approximation (26) fournirait la convergence en une itération si toutes les matrices $\hat{h}_i \hat{h}_i^T$ étaient diagonales. Une condition suffisante, lorsque $P_0 = I$, est que les vecteurs \hat{h}_i soient tous mutuellement orthogonaux. On retrouve là la condition de convergence en une itération de la méthode de Kaczmarz [3]. Bien entendu, cette condition n'est pas vérifiée en réalité, mais la convergence sera d'autant plus rapide que les \hat{h}_j seront "presque" orthogonaux.

Or, tout ce qui a été dit jusqu'à présent est indépendant de l'ordre de traitement des observations, c'est à dire du mode de balayage de l'image. Le caractère mal posé du problème de déconvolution se traduisant par une forte dépendance linéaire entre h_i successifs dans le cas d'un balayage "raster scan", la convergence de notre méthode sera lente. Cette situation peut être notablement améliorée en choisissant l'ordre de traitement des observations de manière à diminuer la dépendance entre deux lignes consécutives [8]. Un bon compromis entre la nécessité d'orthogonaliser les hyperplans de projections successives et la nécessité de réduire le nombre d'accès-mémoire pour obtenir les différentes parties de l'image, consiste à balayer celle-ci alternative-

ment de droite à gauche et de gauche à droite au cours d'une itération et successivement par lignes et par colonnes lors d'itérations successives. L'expérience montre que l'on obtient alors une convergence au sens de (29) en quelques itérations (voir ci-dessous).

RESULTATS

L'algorithme défini par (32), (33), (34) a été appliqué tout d'abord à des images simulées. Celles-ci sont obtenues par convolution d'un objet de référence, défini dans C, par un noyau également complexe. Un bruit additif uniforme est ajouté à l'image obtenue. Sur l'exemple proposé figure 1, les parties réelles et imaginaires de l'objet sont formées de deux gaussiennes dont les axes de symétrie sont orthogonaux. La partie réelle du noyau est une gaussienne et sa partie imaginaire un sinus cardinal. L'image bruitée obtenue montre clairement les effets désastreux de la convolution (diminution de la résolution, distorsion, etc...). La procédure de déconvolution permet d'obtenir une solution satisfaisante en 4 itérations, c'est à dire en 4 balayage de l'image, telle que l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) entre l'objet de référence et l'objet restauré soit inférieure à 0.2%. On notera de plus que les dimensions de l'objet restauré (85,85) sont supérieures à celles de l'image (63,63) et donc que le système (3) est fortement indéterminé.

L'ensemble des résultats obtenus montre plus généralement qu'une EQM inférieure à 5% peut être obtenue en 5 itérations environ, et ce même pour des noyaux non réguliers (parallépipède par exemple). Ceci peut avantageusement être comparé aux méthodes voisines [9,10,11,12]. De plus, cette méthode récursive de régularisation s'avère robuste vis à vis du bruit. Enfin, l'abandon des effets de bords dans le calcul du vecteur gain ne conduit pas à des modifications sensibles de la solution.

Cette méthode a été appliquée également à des images échographiques ultra-sonores. La figure 2-a, image de 3 points réfléchissants, montre clairement la perte de résolution latérale et axiale due aux imperfections du transducteur. La figure 2-b représente l'objet restauré après 4 itérations.

CONCLUSION

La méthode proposée permet donc d'obtenir une solution acceptable au problème de la restauration d'image, c'est à dire une solution stable en présence de bruit. Celle-ci a été obtenue en régularisant le problème initial et en développant une procédure récursive, qui présente des liens évidents avec un filtre de Kalman. Sa simplification permet de retrouver la simplicité de la méthode d'inversion de Kaczmarz. Les résultats obtenus montrent qu'une solution satisfaisante est obtenue en un petit nombre d'itérations avec un volume total de calcul très inférieur à celui de méthodes statistiques optimales telles que le filtre de Kalman classique.

Une extension statistique du problème est en cours d'étude [13] pour mieux approcher le vecteur gain optimal dans la construction de la solution approchée.



RESTAURATION D'IMAGES DANC C^2 PAR UNE METHODE RAPIDE DE REGULARISATION
 COMPLEX IMAGE RESTORATION WITH A FAST REGULARIZATION METHOD

Didier SAINT-FELIX, Ali M. DJAFARI et Guy DEMOMENT

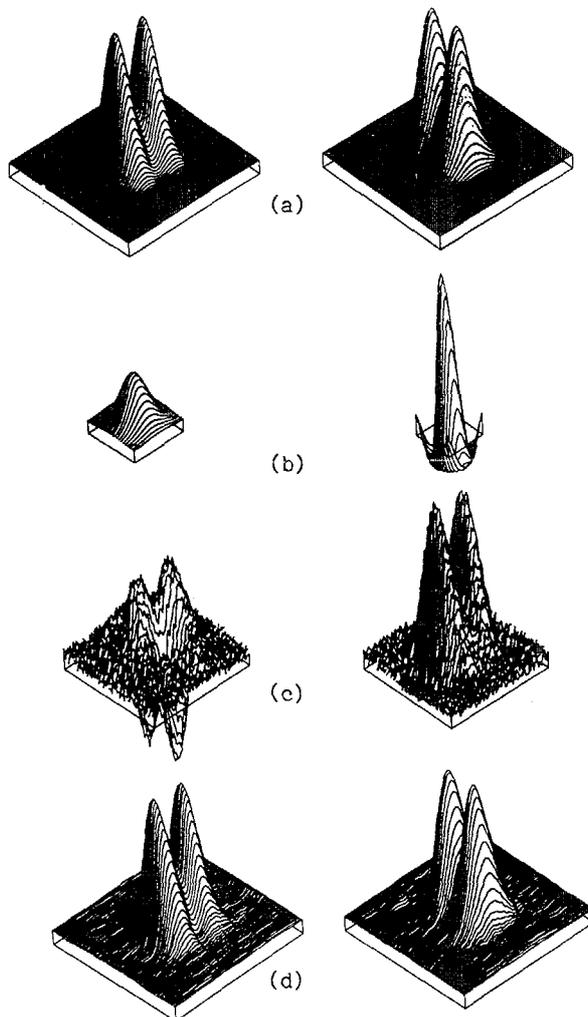


Figure 1 : Exemple de restauration d'une image complexe. Parties réelles (à gauche) et imaginaires (à droite) de : (a) objet simulé (85,85); (b) noyau (23,23); (c) image bruitée (63,63); (d) objet restauré après 4 itérations: EQM = 0.2%.

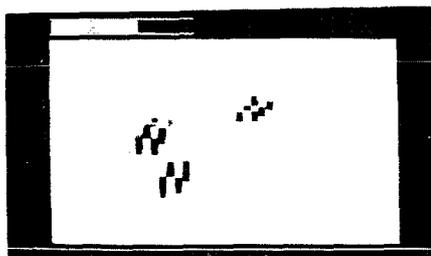


Figure 2-a : Image échographique ultrasonore de 3 points réfléchissants.

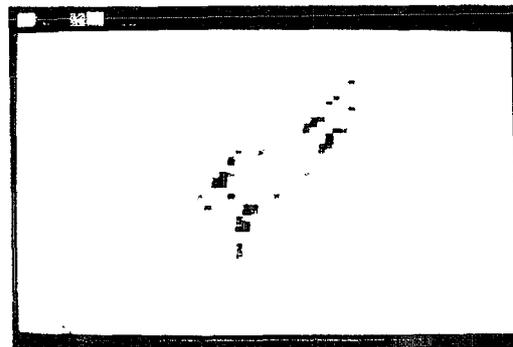


Figure 2-b : Image restaurée après 4 balayages.

REFERENCES

- [1] Special Issue on "Inverse methods in Electromagnetics", IEEE Trans., Vol.AC-29, March 1981.
- [2] Special Issue on "Signal Recovery", J. Opt. Soc. Am., Vol.73, No.11, Nov. 1983.
- [3] K. TANABE, "Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications," NUMER. MATH., Vol.17, pp.203-214: 1971.
- [4] R.W. SHAFER, R.M. MERSEREAU, M.A. RICHARDS, "Constrained Iterative Restoration Algorithms," Proc. IEEE, Vol.69, No.4, pp.432-450: Apr. 1981
- [5] O.N. STRAND, "Theory and method related to the singular function expansion and Landsweber's iteration for integral equation of the first kind," SIAM J. Numer. Anal., Vol.11, No.4, pp.798-825: Sept. 1974.
- [6] Y.C. HO, "On the stochastique approximation method and optimal filtering theory," J. Math. Anal. Appl., Vol.6, pp.152-154: 1962
- [7] H.J. TRUSSEL, "Convergence Criteria fir Iterative Restoration Methods," IEEE Trans., Vol.ASSP-31, No.1, pp.129-136: Feb. 1983
- [8] S.F. Mc CORMICK, "The method of Kaczmarz and row orthogonalization for solving linear equations and least squares problems in Hilbert space," INDIANA UNIV. MATH. J., Vol.26, pp.1137-1150: 1977.
- [9] Y. ICHIOKA et al., "Iterative image restoration by a method of steepest descent," J. OPTICS, Vol.12, pp.35-41: 1981.
- [10] M.I. SEZAN and H. STARK, "Image restoration by convex projections in the presence of noise," APP. OPTICS, Vol.22, pp.2781-2789: Sept. 1983.
- [11] W.K. PRATT, F. DAVARIAN, "Fast computational techniques for pseudo-inverse and Wiener image restoration," IEEE Trans., Vol.C-26, No.6, pp.571-580: June 1977.
- [12] E. CHANDA, E.B. CHANDURI and D.D. MAJUMDER, "A restoration technique for biomedical image blurred due to defocusing effect," 1st IEEE. 82'ISMII, Oct. 26-28, Berlin, 1982, pp:14-19.
- [13] D. SAINT-FELIX, A.M. DJAFARI, G.DEMOMENT, "Quelques problèmes liés à l'amélioration de la résolution d'un système de tomographie à micro-ondes par déconvolution," 9 ème Col. GRET-SI, Mai 1983, Nice, pp: 583-589