



Traitement, Synthèse, Technologie et Applications

BIARRITZ — Mai 1984 —

*CALCUL DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN OBJET REPRESENTÉ
SOUS FORME POLYÉDRIQUE. APPLICATION A LA ROBOTIQUE*

VALADE Jean-Michel

LABORATOIRE d'AUTOMATIQUE et d'ANALYSE des SYSTEMES du C.N.R.S.
7, avenue du Colonel Roche - 31400 TOULOUSE

RESUME

Le calcul de l'enveloppe convexe d'un objet est un problème déjà largement traité. Les différents algorithmes se basent sur la liste des sommets et leur complexité minimum est en $o(n \log n)$ (n est le nombre de sommets).

A partir de la représentation polyédrique de l'objet, il est possible de diminuer cette complexité. Le principe de l'algorithme, écrit en LISP (15000 cellules) est le suivant :

- * classification des arêtes : convexe ou concave
- * classification des sommets : éliminé ou pouvant appartenir à l'enveloppe convexe
- * création de circuits (liste de sommets reliés par des arêtes convexes entourant une région concave de l'objet)
- * création de l'enveloppe convexe à partir des circuits et des régions convexes de l'objet

La "complexité" est fonction de l'objet étudié et est au plus en $o(n \log n)$. Plusieurs utilisations de cet algorithme sont intéressantes en robotique :

- le calcul des positions de repos d'un objet sur un plan par projection du centre de masse sur chaque face ; il est alors possible de déterminer le contour bidimensionnel correspondant à chaque position et d'extraire les informations nécessaires à son identification et sa saisie par comparaison avec les données fournies par un capteur de vision. Cet exemple est illustré dans l'article ;
- dans les recherches de trajectoires sans collision, travailler sur les enveloppes convexes diminue la complexité des algorithmes et les temps de calcul.

SUMMARY

Many algorithms have been developed for computing the convex hull of a finite set of point. In robotics parts are defined with CAD systems, which give more information than the point set. The exploitation of this "free" information is the key idea of the algorithm. Its "complexity" is at most $o(n \log n)$ (n is the number of vertices). It proceeds as follow :

- classification of edges : concave or convex
- classification of vertices : eliminated or vertex of the convex hull
- search of circuits (list of vertices linked by convex edges surrounding a concave region)
- creation of the convex hull from the circuits.

Several uses of convex hulls are interesting in robotics :

- computation of stable positions of an object ; its bidimensional contour can be determined and from the comparison with data given by a video camera information necessary to identify and grasp it can be collected,
- in collision avoidance, it is easier to work with convex hulls rather than corresponding objects.



I. INTRODUCTION

Le problème du calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points (plus petit polyèdre convexe contenant tous ces points), a déjà reçu diverses solutions. Le premier algorithme a été proposé par Chand et Kapur ; sa complexité est $O(n^2)$ (n est le nombre de sommets) /CHA/.

En 1977, Preparata et Hong ont donné un algorithme qu'ils prouvent être de complexité minimale en temps: $O(n \log n)$ /PRE/. Il est basé sur la technique Diviser et Conquérir et peut être décrit de la manière suivante :

- on constitue la liste des sommets LSOM,
- on trie les sommets suivants leur abscisse,
- on appelle la procédure suivante avec $S=LSOM$

(DE ENV-CONVEX (S))

(COND ((EQ (LENGTH S) 2)

(* on renvoie le segment associé à S))

(T(* on effectue une partition de S en S1 et S2 telle que tout élément de S1 ait une abscisse inférieure à celle de tout élément de S2)

(* on assemble les enveloppes convexes de S1 et S2)

(ASSEMBLE (ENV-CONVEX S1) (ENV-CONVEX S2))

Les données utilisées par ces algorithmes sont les coordonnées des sommets. Or, les systèmes de CAO, aujourd'hui couramment utilisés, apportent davantage de renseignements : un objet est décrit par la liste de ses faces, arêtes et sommets. Cette information "gratuite" peut être utilisée lors du calcul. Un exemple simple le montre : les algorithmes précédents mettront autant de temps pour calculer l'enveloppe convexe d'un objet, qu'il soit convexe ou non. L'utilisation de la structure de l'objet est le principe de base de l'algorithme présenté. Il est écrit en LISP (15000 cellules).

II. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

L'objet est représenté par ses faces, arêtes et sommets. L'algorithme est présenté sous la forme d'une suite de traitements, illustrés par des exemples.

2.1. Les arêtes

Chaque arête se voit attribuer le qualificatif concave ou convexe : une arête est convexe si l'angle formé par les deux faces adjacentes est supérieur à 180° .

2.2. Les sommets

Chaque sommet reçoit à son tour un qualificatif :

- E (Éliminé) si le sommet n'est pas saillant ; il a moins de trois arêtes convexes incidentes ou aucune paire d'arêtes convexes incidentes ne définit un angle inférieur à 180° .

- A (Appartenant à l'enveloppe convexe) s'il n'est pas de type E et est voisin d'un sommet E.

- I sinon.

Sur la Figure 1, les sommets 1,2,7,6 sont de type I, les sommets 3,5,8,10 de type A et les sommets 4,9 de type E.

2.3. Les circuits

On introduit ici la notion de circuit : un circuit est soit la plus longue, soit la plus courte liste de sommets reliés par des arêtes convexes entourant une face possédant une arête concave.

Dans le premier cas, ce seront des circuits de type A ; dans le second de type B.

Donnons quelques exemples de circuits :

- A (3 8 9 10 5 4 3) Figure 1

(1 2 3 4 1) Figures 2 et 3

(1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1) Figure 4

- B (9) Figure 3

(9 12 11 10 9) Figure 2

Un circuit est orienté : la partie concave se trouve à droite lors du parcours du circuit.

Cette troisième étape consiste en la recherche de tous les circuits de la pièce étudiée.

2.4. Les concavités

A partir des circuits, il est possible de déterminer les concavités de l'objet. Deux procédures sont appliquées suivant le type de circuit.

- Pour un circuit A :

on explore la partie droite du circuit: tout circuit A rencontré est déclaré y être inclus, tout circuit B, intérieur.

- Pour un circuit B :

on explore la partie gauche du circuit en notant les circuits rencontrés.

Les concavités sont calculées par les règles suivantes appliquées dans cet ordre.

* Un circuit ne contenant aucun circuit A et non inclus dans un autre circuit forme la frontière d'une concavité.

* Deux circuits contenus l'un dans l'autre appartiennent à la frontière d'une même concavité.

* Deux circuits contenant un même circuit ou deux circuits voisins appartiennent à la frontière d'une même concavité.

* Un circuit appartenant à la frontière de deux concavités définit en fait une seule concavité dont la frontière est l'union des deux précédentes ôtée du circuit.

Illustrons cette étape par la Figure 5.

On trouve six circuits :

A1 (5 6 13 15 22 21 30 29 19 18 11 12 5)

A2 (6 7 8 9 10 11 18 19 29 28 27 26 43 47 52 49 45 41 25 24 23 22 15 13 6)

A3 (1 2 3 4 1)

A4 (35 38 37 36 35)

A5 (31 33 36 37 34 32 31)

B6 (45 46 50 51 48 47 52 49 45)

avec les relations :

A1 est inclus dans A3

A1 est inclus dans A4

A2 est inclus dans A3

A2 est inclus dans A4

B6 est intérieur à A4

Les deux concavités sont : C1 (A5)

C2 (A3 A4 B6)

Il est possible de trouver une frontière composée uniquement de circuits B (Figure 6, les deux circuits sont (1 4 3 2 1) et (9 10 11 12 9)). A partir des résultats des explorations de la partie gauche des circuits B, un des circuits B est simplement considéré comme étant de type A dans la

suite de l'algorithme.

2.5. Extension des circuits frontaliers

Par définition, deux sommets consécutifs d'un circuit doivent être liés par une arête convexe. La convexité est calculée à partir des faces adjacentes à l'arête. Mais maintenant les circuits jouent le rôle des faces. Le calcul est à refaire pour les arêtes bordant un circuit. Prenons un circuit C appartenant à la frontière F d'une concavité. Si un des sommets appartenant soit à C, soit aux circuits B de F voit un sommet non intérieur à C, C doit être agrandi (A) ou diminué (B) de manière à inclure ce sommet. Sur la Figure 7, le circuit initial de type A est (1 10 9 12 6 5 2 1). Le sommet 10 voit le sommet 7, ce qui correspond au fait que l'arête (9 12) n'appartient pas à l'enveloppe convexe de l'objet. Le nouveau circuit est (1 10 9 7 6 5 2 1). Il faut noter la création d'un nouveau circuit B (12).

2.6. Récupération des faces

Les faces ne contenant pas d'arête concave sont conservées, elles font partie de l'enveloppe convexe. Cependant, elles peuvent être délimitées par des sommets de type E ne devant pas être pris en compte. Sur la Figure 7, on distingue :

- les faces intactes (1 2 3 4)
 (10 1 4 11)
 (3 8 11 4)
- les faces modifiées (2 6 7 8 3)
 (7 10 11 8)
- les faces éliminées (1 10 9 13 5 2)
 (13 12 6 5)
 (9 12 13)
 (12 9 7 6)

2.7. Création des nouvelles faces

2.7.1. Le circuit A

Les circuits A sont tout d'abord considérés comme délimitant à eux seuls une concavité. On définit pour chaque circuit (S1 S2 ... SN S1) une pseudo-normale :
 $P = S1S2 \wedge S1S3 + S1S3 \wedge S1S4 + \dots$
 $\dots + S1S(n-1) \wedge S1Sn$

Pour chaque sommet S(x y z), sa hauteur est le produit scalaire P.S. A partir de la liste des sommets du circuit, on extrait les maxima locaux (un sommet est un maximum local si il est plus haut que ses voisins) : les maxima les plus hauts sont liés, ce qui occasionne la création de nouveaux circuits sur lesquels on applique la même méthode. Lorsque trois ou plus sommets sont à la même hauteur, ils forment une face.

Sur la Figure 4, le circuit A est (1 2 3 4 5 6 3 8 9 10 1). Les maxima locaux sont 1 5 6 10. Ils forment une face et engendrent deux circuits (1 2 3 4 5 1) et (10 6 7 8 9 10). Finalement, on obtient les faces :
 (10 8 9)
 (8 6 7)
 (10 6 8)
 (1 5 6 10)
 (3 1 2)
 (5 3 4)
 (3 5 1)

2.7.2. Sa validation

Deux tests sont effectués parallèlement :
 - les faces nouvellement créées sont invalidées ou non suivant l'existence ou non d'un sommet des circuits B de la concavité strictement plus haut que les sommets qui les composent, la hauteur étant définie avec la normale des faces testées ;
 - tous les sommets des circuits B intérieurs dégénérés (dont la partie gauche est vide) doivent être plus hauts qu'une des faces (éliminée ou non) sinon ils se voient attribués un E vis-à-vis de ce circuit (ils peuvent rester valides vis-à-vis d'un autre circuit A de la concavité).

A ce stade, en prenant la ligne 7 pour exemple :

- sont créées les faces (6 2 1)
 (10 6 1)
 (10 7 6)
- est validé le sommet 12
- sont invalidées les faces (6 2 1)
 (10 6 1)
 (10 7 6)

Tout circuit A ne voyant aucune de ses faces éliminée est considéré comme traité. Ces faces sont intégrées à la liste des faces de l'enveloppe convexe.

2.7.3. Plusieurs circuits

Un circuit A contient plusieurs circuits B. Un circuit B est créé englobant les circuits intérieurs et de projection convexe sur le plan perpendiculaire à la normale du circuit A. Un circuit A, intérieur à la partie gauche de ce dernier est également créé, entourant la nouvelle concavité.

2.7.4. Récursivité sur les circuits

Un circuit A peut être vis-à-vis d'un circuit B dont la partie gauche contient des circuits. Il faut alors appliquer 2.7. à ces circuits en priorité et vérifier la convexité des arêtes du circuit B bordant une face nouvellement créée.

2.7.5. Deux circuits

Deux circuits restent en présence. Une première arête est générée liant le plus haut sommet intérieur et son plus proche voisin sur le circuit A. Le processus est alors itératif, la nouvelle face créée s'appuyant sur la dernière arête et un des deux sommets voisins. Ce dernier est choisi de manière à obtenir le plus grand angle entre les deux faces.

Examinons la Figure 2 :

Le circuit A est (1 2 3 4 1)
 Le circuit B est (9 12 11 10 9) Les sommets intérieurs sont à la même hauteur, prenons 9. Le sommet le plus proche est 1. L'arête initiale est (1 9). Les faces créées sont :
 (1 2 10 9)
 (2 3 11 10)
 (3 4 12 11)
 (4 1 9 12)

2.8. Le final

Pour la plupart des objets, on obtient l'enveloppe convexe. Un contre-exemple existe : lors de l'agrandissement des circuits (2.5) l'algorithme ne peut déterminer si



deux sommets intérieurs à deux circuits voisins sont visibles ou non. Néanmoins, il suffit d'itérer le calcul sur le nouvel objet avec des simplifications : il n'y a plus que des circuits A non extensibles.

III. UNE APPLICATION IMMEDIATE : Positions stables d'un objet

Le calcul des positions stables d'un objet sur un plan est utile dans différentes problématiques. En vision avec modèle, on détermine le contour bidimensionnel résultant de la projection sur le plan ; par comparaison avec les données fournies par un capteur de vision, on peut identifier et saisir la pièce.

L'algorithme est le suivant :

- calcul de l'enveloppe convexe,
- calcul du centre de masse,
- pour chaque face de l'enveloppe convexe (polygone de sustentation), on projette le centre de masse sur son plan et on teste son intériorité.

Il est possible de donner un indice de stabilité pour chaque position stable en cherchant l'angle minimum de rotation autour d'une arête du polygone de sustentation provoquant un changement de position stable. Ce peut être utile en exploitation on-line pour l'exploration d'arbres, la probabilité d'obtention d'une face stable étant liée à son indice de stabilité (par la suite le cosinus de l'angle).

Prenons l'exemple de la Figure 5 et de son enveloppe convexe (Figure 8). La recherche des faces stables donnent les résultats suivants :

| | |
|----------|---------------------------|
| indice : | polygone de sustentation. |
| .881 : | (1 2 3 4 1) |
| .547 : | (52 49 35 38 52) |
| .368 : | (4 3 32 37 38 4) |
| .368 : | (2 1 35 36 31 2) |
| .282 : | (50 51 32 31 50) |
| .234 : | (51 52 38 37 51) |
| .234 : | (49 50 36 35 49) |
| .202 : | (1 4 38 35 1) |

Quatre positions sont rejetées :

| |
|------------------|
| (37 32 51 37) |
| (31 36 50 31) |
| (51 50 49 52 51) |
| (2 31 32 3 2) |

IV. CONCLUSION

Un algorithme original est présenté, permettant le calcul de l'enveloppe convexe d'un objet représenté sous forme polyédrique, exploitant la richesse des données fournies par les systèmes de CAO.

Une application immédiate est également présentée : le calcul des faces de repos d'un objet, élément important pour la prise automatique d'un objet.

Un autre intérêt réside dans la possibilité d'isoler les régions concaves d'un objet, ce qui est intéressant dans la génération de trajectoires d'assemblages /VAL/.

REFERENCES

/CHA/ CHAND-KAPUR, "An algorithm for convex

polytopes", J.A.C.M. 17(7), 1970.

/PRE/ Preparata-HONG, "Convex hull of finite sets in 2 or 3 dimensions", C.A.C.M. 20(2), 1977.

/VAL/ VALADE, "Automatic generation of assembly trajectories", ECAI 84, Pise, (article proposé).

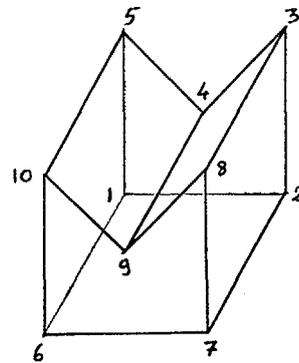


FIGURE 1

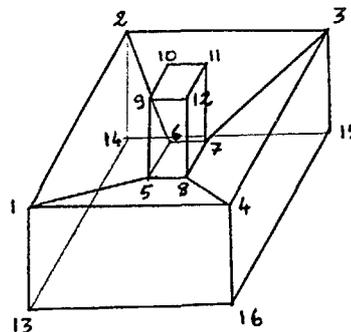


FIGURE 2

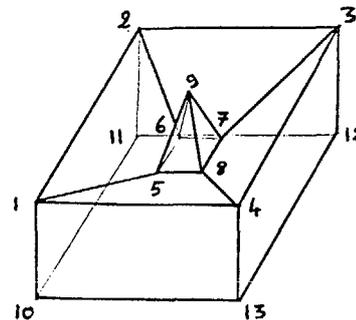


FIGURE 3

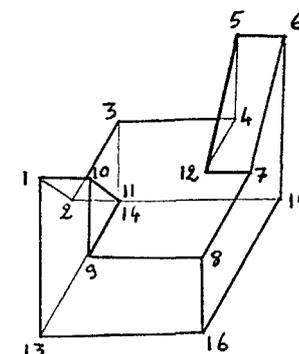


FIGURE 4



CALCUL DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN OBJET REPRESENTÉ SOUS FORME POLYÉDRIQUE.
 APPLICATION A LA ROBOTIQUE.
 CALCULATION OF THE CONVEX HULL OF A POLYEDRON. APPLICATION TO ROBOTICS
 Auteur : VALADE Jean-Michel

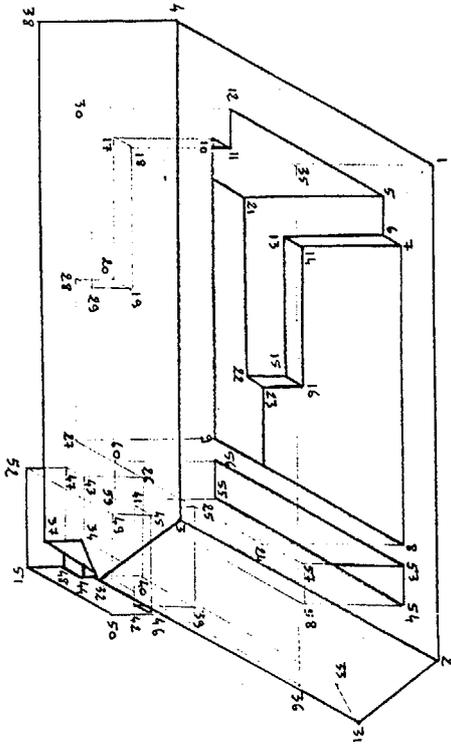


FIGURE 5

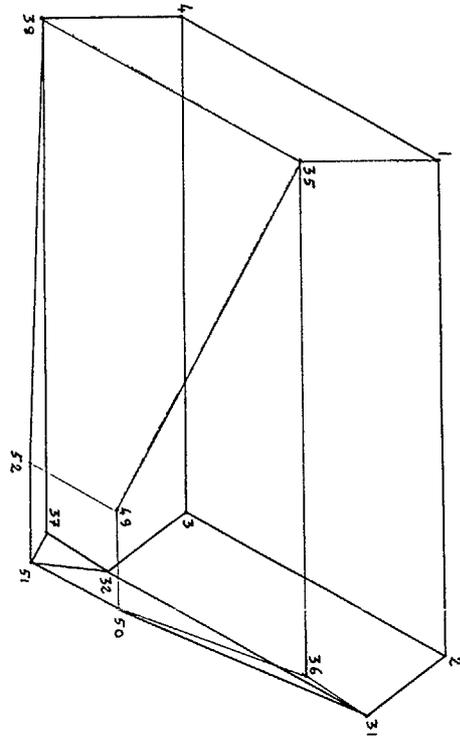


FIGURE 8

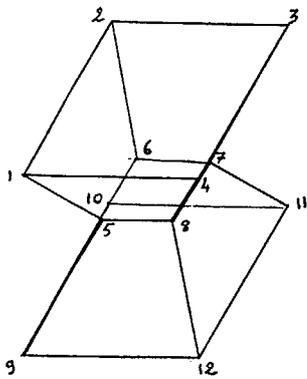


FIGURE 6

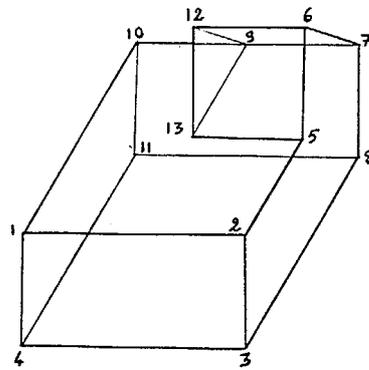


FIGURE 7