

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

ANALYSE DE SIGNAUX A COMPOSANTES QUASISINUSOIDALES

M. BOUVET

H. CLERGEOT

LABORATOIRE DES SIGNAUX & SYSTEMES - C.N.R.S.-E.S.E. - Plateau du Moulon, 91190 GIF-sur-YVETTE

RESUME

Nous discutons, pour une observation de durée finie, la possibilité de décrire un signal formé de signaux quasisinusoidaux bruités soit comme une somme de sinusoides dans un bruit additif, soit comme un bruit de type ARMA avec certains poles proches du cercle unité.

A ces deux modèles correspondent deux problèmes d'estimation bien distincts, dont les objectifs sont deux caractérisations différentes de l'observation. Nous donnons dans les deux cas la forme de l'estimateur par le maximum de vraisemblance et nous examinons les conséquences de l'utilisation d'un type d'estimateur pour l'autre modèle de signal.

Nous donnons enfin, pour chaque famille, une présentation et une comparaison rapide de l'ensemble des méthodes empiriques courantes d'estimation, et des résultats de simulations pour des cas simples.

SUMMARY

We discuss, for a finite duration observation, the feasibility in describing a "quasisinusoidal" signal with noise, either as a sum of sinusoids in additive noise or as an A.R.M.A. noise with few poles near the unit circle.

To both of these models, corresponding two problems of estimation which aims are two different characterizations of the observation.

In these two cases, we give the form of the maximum likelihood estimator; and the consequences of the use of one estimator instead of the other are examined.

Finally, we give for each class a presentation and a rapid comparison of all the current empirical methods for estimation, and simulation results for some cases.



Les méthodes quadratiques d'analyse spectrale ont un pouvoir de résolution ($\Delta\nu \approx \frac{1}{T}$) insuffisant pour séparer des raies trop voisines à partir d'une observation de durée finie T. Les méthodes paramétriques d'erreur de prédiction minimale ont pu être présentées comme des méthodes générales d'analyse spectrale à haute résolution mieux adaptées à ce cas /1/. Cependant, pour éviter des confusions fréquentes, nous avons préféré traiter directement le problème d'analyse de raies étroites comme un problème d'estimation de paramètres pour un modèle approprié. Nous nous sommes ici limités au cas stationnaire, pour des raies étroites superposées à un bruit blanc et nous discuterons essentiellement la détermination de la fréquence de ces raies.

Nous rappelons d'abord les conditions dans lesquelles la détermination du spectre d'un signal stationnaire équivaut à la détermination du prédicteur optimal.

Nous comparons ensuite trois modèles possibles pour le signal (AR, ARMA, sinusôïde plus bruit) et les méthodes théoriques d'estimation correspondantes.

Nous rappelons enfin brièvement le principe des méthodes courantes d'estimation dérivées de la méthode d'erreur de prédiction minimale. Nous discutons le biais et présentons des résultats de simulations sur la variance pour l'estimation d'une fréquence.

I LIEN ENTRE PREDICTION LINEAIRE ET ANALYSE SPECTRALE

Pour un signal stationnaire à temps discret $x(t)$, soit $\hat{x}(t)$ la prédiction linéaire optimale de $x(t)$ à partir du passé :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(t-n) \quad (1)$$

La différence $x(t) - \hat{x}(t) = \epsilon(t)$ est l'innovation de $x(t)$. Le signal est dit singulier ou déterministe si $\epsilon(t) \equiv 0$. Pour un signal régulier, l'innovation $\epsilon(t)$ est un bruit blanc stationnaire /2/. Le processus $x(t)$ est dit purement non déterministe si $x(t)$ peut s'exprimer à partir de $\epsilon(t)$ sous la forme :

$$x(t) = \epsilon(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \epsilon(t-n) \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty \quad (3)$$

En posant :

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_n z^{-n} \dots, \\ B(z) &= 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

les filtres $A(z)$ et $B(z)$ sont stables et à déphasage minimal ; les relations de filtrage (1) ou (2) entre $x(t)$ et $\epsilon(t)$ entraînent que la densité spectrale $S(v)$ de $x(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} S(v) &= \sigma^2 |B(z)|^2 = \frac{\sigma^2}{|A(z)|^2} \\ z &= e^{2\pi i v} \end{aligned} \quad (5)$$

Pour un signal purement non déterministe il y a bien équivalence entre recherche du spectre ou recherche du prédicteur optimal.

D'après la décomposition de Wold /2/ tout signal régulier peut se décomposer en la somme d'un signal déterministe et un signal non déterministe : ce sera le cas du modèle sinusôïde plus bruit étudié au paragraphe suivant. Dans ce cas les relations (2) et (5) ne sont plus valables ; en particulier on ne doit pas s'attendre à trouver entre $|A(z)|^{-2}$ et le spectre $S(v)$ une relation simple analogue à (5).

Nous verrons cependant que le prédicteur optimal $A(z)$ contient les informations nécessaires pour identifier les fréquences présentes dans $x(t)$: soulignons que la détermination de ces fréquences ne passe pas nécessairement par la détermination du spectre.

II MODELES ETUDIES POUR $x(t)$

Nous comparons deux types de modèles : sinusôïdes plus bruit blanc gaussien ou signal ARMA non déterministe (bruit blanc gaussien filtré par un filtre ARMA). Nous comparons en particulier les covariances et l'allure des variations temporelles des signaux sur un intervalle de temps fini.

1°-Modèle sinusôïdes plus bruit blanc

a) signal, équation aux différences
Le signal est pris de la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^M \sqrt{A_i} \cos(\omega_i t + \phi_i) + b(t); \\ &= y(t) + b(t), \end{aligned} \quad (6)$$

où $b(t)$ est un bruit blanc stationnaire :

$$E\{b(t) \cdot b(t')\} = b^2 \delta_{tt'}. \quad (7)$$

On vérifie immédiatement que $y(t)$ satisfait l'équation aux différences :

$$y(t) = \sum_{j=1}^{2M} f_j y(t-j), \quad (8)$$

où le polynôme $F(z)$,

$$F(z) = 1 - f_1 z^{-1} - \dots - f_{2M} z^{-2M} \quad (9)$$

est le polynôme de degré $2M$ ayant pour racines $e^{\pm j\omega_i}$, $i = 1, M$.

Suivant une remarque de Ulrych et Clayton /3/, on en déduit que $s(t)$ peut être généré récursivement par la relation de type ARMA :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{2M} f_i \cdot s(t-i) + b(t) - \sum_{j=1}^{2M} f_j \cdot b(t-j). \quad (10)$$

Remarquons que les coefficients f_i de cette relation de récurrence déterminent entièrement les fréquences ω_i , mais ne contiennent aucune information sur les amplitudes A_i ou les phases ϕ_i .

b) Covariance

Un point important est de décider si, dans le modèle (6), A_i et ϕ_i sont des paramètres inconnus mais fixés ou si ce sont des grandeurs aléatoires. En particulier le signal ne pourra être considéré comme stationnaire que si ϕ_i est une variable aléatoire équipartie entre 0 et 2π , et c'est l'hypothèse faite habituellement dans le calcul théorique de la covariance. Pour l'estimation, l'hypothèse de la phase équipartie sera justifiée si l'on a la possibilité de moyennner sur plusieurs réalisations avec des phases initiales arbitraires. Si l'estimation est faite sur un seul échantillon les méthodes établies en raisonnant sur la covariance stationnarisée risquent d'être biaisées (c'est le cas de l'algorithme de Burg /4/).

Dans l'hypothèse des phases stationnarisées, on obtient :

$$\Gamma(\tau) = E\{x(t)x(t-\tau)\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M A_i \cos(\omega_i \tau + b^2 \delta(\tau)) \quad (11)$$

Remarquons que si $b^2=0$, $\Gamma(\tau)$ satisfait la même équation aux différences que $y(t)$. Le bruit ne fait que modifier la valeur de $\Gamma(0)$, l'équation aux différences reste satisfaite par $2M+1$ valeurs consécutives de $\Gamma(\tau)$ excluant $\Gamma(0)$.

c) Exemple monofréquence

L'exemple le plus simple est obtenue en signaux complexes, avec une seule exponentielle

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2} A \cdot e^{j\omega t + \phi} + B(t), \\ B(t) &= b(t) + j b'(t), \end{aligned} \quad (12)$$

où $b(t)$ et $b'(t)$ sont décorrélés et de même variance b^2

et où $x(t)$ correspondrait à la partie réelle de $\mathcal{X}(t)$.

Le signal peut être mis sous la forme :

$$\mathcal{X}(t) = \sqrt{2}A e^{j\omega t} + \phi \exp [v(t) + j\phi(t)], \quad (13)$$

où les variations relatives de l'amplitude et les fluctuations de phase sont données par $v(t)$ et $\phi(t)$. Pour un rapport signal sur bruit A^2/b^2 grand on obtient :

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\beta(t)}{A\sqrt{2}}, \\ \phi(t) &= \frac{\beta'(t)}{A\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

où l'on a posé :

$$B(t) e^{-j\omega t} + \phi = \beta(t) + j \beta'(t). \quad (15)$$

Les fluctuations $v(t)$ et $\phi(t)$ sont donc décorréelées et de même variance $b^2/2A^2$. Une caractéristique importante du modèle déterministe est que la variance des fluctuations de phase reste bornée.

2°-Modèle AR

a) signal

Le signal $x(t)$ est généré par les relations

$$x(t) = \sum_{n=1}^M a_n x(t-n) + \epsilon(t), \quad E\{\epsilon(t) \epsilon(t')\} = \sigma^2 \delta_{tt'} \quad (16)$$

où l'on suppose que les zéros du polynôme $A(z)$ sont voisins du cercle unité. En décomposant $\frac{1}{A(z)}$ en éléments simples

$$\frac{1}{A(z)} = \sum_i \left\{ \frac{R_i}{1-z_i z^{-1}} + C.C. \right\} \quad (17)$$

$$z_i = r_i e^{j\omega_i} \quad 1 - r_i \ll 1,$$

Le signal $x(t)$ peut s'interpréter comme la somme de signaux quasi-sinusoidaux de pulsation ω_i , d'amplitude et phase aléatoires

$$s(t) = \sum_i \sqrt{2} A_i(t) \cos(\omega_i t + \phi_i(t)). \quad (18)$$

Nous étudierons au c) les propriétés statistiques de $A_i(t)$ et $\phi_i(t)$ sur un modèle monofréquence. Dans (17) si les r_i sont voisins de 1 les résidus R_i sont fonctions uniquement des ω_i ; les amplitudes des composantes $E |A_i(t)|^2$ varient en fonction de l'amortissement proportionnellement à $(1-r_i^2)^{-1}$, ce qui permet de choisir leur amplitudes relatives.

b) Covariance

On établit sans difficulté que la covariance est donnée par :

$$\Gamma(\tau) = \sum_{i=1}^M A_i^2 e^{-r_i^{|\tau|}} \cos(\omega_i \tau) \quad (19)$$

expression dans laquelle

$$A_i^2 = E\{A_i^2(t)\} = \frac{|R_i|^2 \sigma^2}{1 - r_i^2} \quad (20)$$

Notons que lorsque les pôles tendent vers le cercle unité la covariance prend la forme obtenue pour un signal déterministe en l'absence de bruit.

c) Exemple monofréquence

L'analogie de (12) est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= e^{j\omega} \mathcal{X}(t-1) + E(t) \\ E(t) &= \epsilon(t) + j \epsilon'(t) \end{aligned} \quad (21)$$

où $\epsilon(t)$ et $\epsilon'(t)$ sont décorréelés et de même variance σ^2 . Par analogie avec le modèle (12) désignons par $2A^2$ la puissance moyenne du signal $\mathcal{X}(t)$ on obtient

$$A^2 = \frac{\sigma^2}{(1-r^2)} \quad (12)$$

En écrivant le signal sous forme d'un signal de fréquence ω à amplitude et phase aléatoire :

$$\mathcal{X}(t) = \sqrt{2}A e^{j\omega t} \exp[v(t) + j\phi(t)], \quad (23)$$

on peut obtenir pour l'évolution de $v(t)$ et $\phi(t)$ le modèle approché suivant :

$$\begin{aligned} v(t) &= r^2 \cdot v(t-1) + 2\sqrt{1-r^2} \eta_1(t) \\ \phi(t) &= \phi(t-1) + \sqrt{1-r^2} \eta_2(t) \end{aligned} \quad (24)$$

où $\eta_1(t)$ et $\eta_2(t)$ sont deux bruits blancs décorréelés de variance $1/2$ définis à partir de $E(t)$ par la relation :

$$\eta_1(t) + j \eta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} E(t) e^{-j\omega t}. \quad (25)$$

Pour $1-r$ petit mais non nul une caractéristique de ce modèle est que la phase n'est pas stationnaire : d'après (24), $\phi(t)$ est l'analogie discret d'un mouvement brownien à une dimension. La variance de $\phi(t) - \phi(t-\tau)$, égale à $(1-r^2)\tau$, croît linéairement avec τ . A l'opposé du modèle (12), le signal $\mathcal{X}(t)$ observé sur un intervalle assez long ($T \gg \frac{1}{1-r^2}$) n'est plus cohérent.

3°- Modèle AR plus bruit (type ARMA)

D'après les propriétés du modèle AR on peut constater que, lorsque les pôles tendent vers le cercle unité il se prête bien à la représentation de signaux quasi-sinusoidaux avec un bruit additif négligeable. Pour obtenir un signal comparable à celui du modèle "sinusoides plus bruit", on doit lui superposer un bruit décorrélé avec $\epsilon(t)$ de variance b^2 . Le signal obtenu, de type purement non déterministe, se prête à une représentation directe sous forme d'un modèle ARMA dont nous allons souligner les particularités.

a) Modèle ARMA équivalent

Le modèle ARMA équivalent peut être obtenu par factorisation du spectre $S(v)$ du signal. En ajoutant un bruit de variance b^2 au modèle du 2° on obtient :

$$S(v) = b^2 + \frac{\sigma^2}{|A(z)|^2} = b^2 \frac{|A(z)|^2 + \frac{\sigma^2}{b^2}}{|A(z)|^2} \quad (26)$$

D'après (20), si pour des amplitudes données A_i des composantes on fait tendre les pôles vers le cercle unité, on doit faire tendre σ^2 vers zéro. Le terme supplémentaire σ^2/b^2 au numérateur de (26) est donc très petit. On montrerait que l'effet de ce terme sur les zéros du numérateur, par rapport aux zéros de $A(z)$ est d'introduire un amortissement supplémentaire sans modifier sensiblement la fréquence : le modèle ARMA obtenu est tout à fait particulier, les zéros étant très peu différents des pôles. Nous discuterons plus en détail le cas monofréquence en c).

b) Covariance

La covariance se déduit directement de (18) en rajoutant le terme correspondant au bruit additif :

$$\Gamma(\tau) = b^2 \delta(\tau) + \sum_i A_i^2 e^{-r_i^{|\tau|}} \cos \omega_i \tau \quad (27)$$

Remarquons que $2M+1$ valeurs consécutives de $\Gamma(\tau)$ excluant $\Gamma(0)$ vérifient la relation de récurrence définie par les coefficients du polynôme $A(z)$.

c) Exemple monofréquence

En rajoutant au modèle (21) le bruit blanc

$$B(t) = b(t) + j b'(t), \quad (28)$$

où $b(t)$ et $b'(t)$ sont décorréelés et de variance b^2 , on obtient la densité spectrale :

$$S(v) = 2 \frac{1+r^2 + \frac{\sigma^2}{b^2} - 2r \cos \theta}{1+r^2 - 2r \cos \theta} b^2, \quad \theta = 2\pi v - \omega \quad (29)$$



Compte tenu de (22) et en désignant par

$\mu^2 = A^2/b^2$ le rapport signal sur bruit, le numérateur devient :

$$N(z) = 1 + r^2 + \mu^2(1-r^2) - 2r \cos \theta, \quad (30)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} N(z) &= \frac{r}{\rho} (1 + r^2 - 2r \cos \theta), \\ &= \frac{r}{\rho} |1 - \rho e^{j\theta}|^2, \end{aligned} \quad (31)$$

où ρ est la solution de module de module inférieur à 1 de l'équation

$$\rho + \frac{1}{\rho} = r + \frac{1}{r} + \mu^2 \left(\frac{1-r^2}{r} \right) \quad (32)$$

On montre facilement que $\rho < r$: le zéro $\rho e^{j\omega}$ du numérateur est à la même fréquence que le pôle mais avec un amortissement plus grand. En développant (32) pour $1-r$ petit on obtient :

$$\rho \approx 1 - \mu \sqrt{1-r^2}, \quad \text{si } 1-r \ll 1 \quad (33)$$

III - ESTIMATION PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

1°) Modèle sinusoïdes + bruit blanc gaussien

Le maximum de vraisemblance se réduit ici à une méthode de moindres carrés, les paramètres $\hat{\omega}_1$, $\hat{\theta}_1$, \hat{A}_1 étant les valeurs minimisant :

$$S = \sum_t [x(t) - \sum_i \hat{A}_i \cos(\hat{\omega}_i t + \hat{\theta}_i)]^2 \quad (34)$$

le problème peut être reformulé en introduisant la variable auxiliaire :

$$\hat{A}^2 = \sum_t \left[\sum_i \hat{A}_i \cos(\hat{\omega}_i t + \hat{\theta}_i) \right]^2 \quad (35)$$

on voit que le problème initial se ramène à la minimisation, sous la contrainte (35) de l'expression

$$S = \sum_t x(t)^2 + \hat{A}^2 - 2 \sum_t x(t) \left[\sum_i \hat{A}_i \cos(\hat{\omega}_i t + \hat{\theta}_i) \right] \quad (36)$$

soit à la maximisation de :

$$\left| \sum_t \left\{ x(t) \left[\sum_i \hat{A}_i \cos(\hat{\omega}_i t + \hat{\theta}_i) \right] \right\} \right| \quad (37)$$

Soulignons que ce problème de minimisation non linéaire est très lourd. Les algorithmes existants pour la solution de (34) /5/, /6/ exigent une initialisation convenable pour converger vers la bonne solution. C'est la raison pour laquelle en pratique on utilise des méthodes statistiquement non optimales mais moins lourdes qui seront présentées au paragraphe IV.

2°) Modèle AR (cas gaussien)

Sous l'hypothèse d'un signal gaussien, il est bien connu que si l'intervalle d'observation est suffisamment long et que les pôles ne sont pas trop près du cercle unité, l'estimation au maximum de vraisemblance des paramètres autorégressifs est obtenue en minimisant l'erreur de prédiction /7/ /8/. Si certains pôles sont voisins du cercle unité, une structure d'algorithme récursif simple a été proposée pour obtenir une meilleure approximation du maximum de vraisemblance /8/ /9/. Cette méthode est discutée dans un autre communication /10/; il apparaît que la méthode d'erreur de prédiction minimale donne une bonne estimation des fréquences, l'erreur portant essentiellement sur l'estimation des modules des pôles voisins du cercle unité.

La méthode d'erreur de prédiction minimale est

très attractive pour sa simplicité et la possibilité d'implémentation sous forme récursive (sur l'ordre du modèle ou sur le temps) ou adaptative. Ceci explique que cette méthode, adaptée comme nous l'avons vu ci-dessus à l'analyse de signaux de type AR, ait été utilisée également pour la recherche des fréquences dans le modèle sinusoïde plus bruit. L'estimation est alors biaisée et de variance accrue. Le biais sera étudié au paragraphe IV. Nous allons considérer l'effet sur la variance dans le cas monofréquence.

3°) Forme asymptotique de la variance dans le cas monofréquence

L'estimation de la pulsation ω pour le cas monofréquence prend une forme particulièrement simple. Pour le modèle sinusoïde plus bruit défini par (12), en utilisant la forme (37) du maximum de vraisemblance, on constate que l'estimée de ω est la fréquence qui maximise le module de la transformée de Fourier de $x(t)$ (voir aussi /11/) :

$$\hat{\omega}_1 : \max_t \text{de } \sum_{t=1}^N x(t) e^{-j\omega t} \quad (38)$$

Pour le modèle AR à un seul pôle défini par (21) la solution exacte du maximum de vraisemblance pour ω est donnée par minimisation de l'erreur de prédiction. La valeur correspondante de l'estimée $\hat{\omega}$ est donnée directement par l'algorithme de la somme (cf./12/) :

$$\hat{\omega}_2 = \frac{1}{N-1} \text{Arg} \sum_{t=2}^N x(t) x^*(t-1) \quad (39)$$

Ces deux règles d'estimation peuvent être appliquées aux deux modèles monofréquence. Pour les deux modèles, dans le cas monofréquence les estimées sont non biaisées. Nous donnons et nous discutons ci-dessous les formes asymptotiques de la variance.

a) Modèle sinusoïde plus bruit

En désignant par μ^2 le rapport signal sur bruit et N le nombre de points de l'observation, on obtient pour la variance des estimées $\hat{\omega}_1$ et $\hat{\omega}_2$ la forme asymptotique suivante, valable pour $\mu \gg 1$:

$$E[(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)^2] = \frac{6}{\mu^2 N(N+1)(N+2)}, \quad (40)$$

$$E[(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega})^2] = \frac{1}{\mu^2 N}. \quad (41)$$

Pour ce modèle, c'est $\hat{\omega}_1$ qui est l'estimée du maximum de vraisemblance ; (40) coïncide avec la borne de Cramer Rao pour la variance. On vérifie que $\hat{\omega}_2$ conduit toujours à une variance supérieure pour $N > 1$; on remarque surtout la variation en N^{-1} , au lieu de N^{-3} pour $\hat{\omega}_1$. Dès que N dépasse quelques unités on constate donc une forte détérioration lorsque l'on utilise la méthode de l'erreur de prédiction minimale à la place du maximum de vraisemblance. L'interprétation de ce résultat est que la règle d'estimation $\hat{\omega}_2(\cdot)$ n'exploite pas la cohérence du signal $x(t)$. Nous verrons sur les simulations que la prédiction avec un modèle AR d'ordre plus élevé permet d'améliorer la méthode.

b) Modèle autorégressif

Nous donnerons simplement un résultat valable pour un pôle voisin du cercle unité et une durée d'observation inférieure au temps de cohérence $T_0 = \frac{1}{1-r^2}$. Dans ces conditions l'amplitude moyenne

$$2 \hat{A}_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |x(t)|^2$$

peut s'écarter notablement de $E\{x(t)^2\} = \frac{\sigma^2}{1-r^2}$. Nous désignerons par $\hat{\mu}_0 = \frac{A}{b^2}$ le rapport signal sur bruit correspondant. On obtient les expressions (conditionnellement à A_0) :

$$E[(\hat{\omega}_1 - \omega)^2] = \frac{3}{5\hat{\mu}^2 N} \frac{N^2 + 2N + 2}{(N+1)(N+2)} \quad (42)$$

$$E[(\hat{\omega}_2 - \omega)^2] = \frac{1}{2\hat{\mu}^2 N} \quad (43)$$

Ici c'est $\hat{\omega}_2$ qui correspond au maximum de vraisemblance. Le résultat est cohérent avec la borne de Cramer Rao, $1/(2\mu^2 N)$. On vérifie que la variance se dégraderait encore si l'on prenait un horizon N supérieur au temps de cohérence T_0 .

IV - METHODES PRATIQUES D'ESTIMATION POUR UN MODELE SINUSOIDES PLUS BRUIT

Nous avons vu sur l'exemple monofréquence que les méthodes de prédiction linéaire, si elles sont beaucoup plus faciles à mettre en oeuvre, conduisent à une détérioration de l'estimation par rapport au maximum de vraisemblance. Un certain nombre de méthodes d'inspiration voisine ont été développées; nous nous bornerons à un rapide exposé du principe, complété par des résultats de simulations pour le cas monofréquence.

D'une façon générale nous poserons :

$$\underline{x}_p^t(t) = (x(t), \dots, x(t-p)) \quad (44)$$

$$\underline{u}_p^t = (u_0, \dots, u_p) \quad (45)$$

$$U_p(z) = u_0 + u_1 z^{-1} + \dots + u_p z^{-p} \quad (46)$$

$$\Gamma_p = E \left\{ \underline{x}_p^t(t) \underline{x}_p^t(t) \right\} \quad (47)$$

$$e(t) = \underline{u}_p^t \underline{x}_p(t) = \sum_{n=0}^p u_n x(t-n) \quad (48)$$

Les méthodes présentées sont toutes basées sur la recherche du vecteur \underline{u}_p minimisant la valeur moyenne $E\{e(t)^2\}$ de $e(t)^2$ sous certaines contraintes. Les estimées des fréquences présentes dans $x(t)$ sont alors données par les zéros du polynôme $U_p(z)$ correspondant.

Nous conviendrons de dire que l'estimation est non biaisée si la minimisation de $E\{e(t)^2\}$ sous les contraintes considérées conduit aux fréquences exactes pour les zéros du polynôme $A(z)$.

1° Méthodes d'erreur de prédiction minimale

Ces méthodes consistent à imposer la contrainte $u_0=1$. Le signal $e(t)$ s'interprète alors comme une erreur de prédiction pour $x(t)$. Soit $\underline{y}(t)$ le vecteur correspondant au signal non bruité $\underline{y}(t)$ (voir/5/). Nous désignerons par $(\underline{a})_p$ le vecteur

$$(\underline{a})_p = (1, a, \dots, a^p)^t \quad (49)$$

Remarquons que le fait que \underline{a} soit zéro du polynôme $U_p(z)$ s'interprète géométriquement par la relation:

$$\underline{u}_p^t (\underline{a})_p = U(\underline{a}) = 0 \quad (49)$$

Or d'après la définition /5/ de $\underline{y}(t)$ on constate que $\underline{y}_p(t)$ est combinaison linéaire des 2M vecteurs

$(e^{\pm j\omega_i})$. En l'absence de bruit, et si $p \geq 2M$ on en déduit que $e(t)^2$ aura un minimum nul, obtenu pour tout vecteur \underline{u}_p orthogonal aux vecteurs

$(e^{\pm j\omega_i})$. Le polynôme $U(z)$ aura alors exactement pour racines $e^{\pm j\omega_i}$, les $p-2M$ autres racines étant arbitraires.

En présence de bruit l'estimation est biaisée par le fait que la contribution du bruit à $E\{e(t)^2\}$, égale à $b^2 \sum U_n^2$, dépend de \underline{u}_p . Les racines correspondant aux fréquences ω_i n'ont plus un module unité et leur fréquences sont décalées; enfin on constate que deux fréquences trop voisines ne sont plus résolues /1/.

Pour l'estimation à partir de l'observation on minimise par rapport à \underline{u}_p une moyenne temporelle de la forme :

$$e(t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_p(t)^2 = \underline{u}_p^t \hat{\Gamma}_p \underline{u}_p \quad (60)$$

où

$$\hat{\Gamma}_p = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \underline{x}_p^t(t) \underline{x}_p^t(t) \quad (61)$$

Des résultats de simulation sont indiqués Fig. 1,2,3. On constate notamment une amélioration de l'estimation lorsque l'on augmente l'ordre p du prédicteur.

Ces figures représentent une fonction de la variance de l'estimateur de la fréquence $[10 \text{ Log}(1/\text{Var})]$ en fonction du rapport signal sur bruit défini comme $10 \text{ Log}(A^2/B^2)$.

2° Méthode de Pisarenko /13/

Cette méthode revient à imposer au vecteur \underline{u}_p la contrainte $\|\underline{u}_p\|^2 = 1$. D'après la remarque faite ci-dessus on constate que maintenant en présence de bruit la contribution du bruit à $E\{e(t)^2\}$ est indépendante de \underline{u}_p : l'estimation des fréquences est non biaisée.

Par contre l'inconvénient si $p > 2M$ est que le polynôme $A(z)$ présente $p-2M$ zéros arbitraires qui seront difficiles à séparer des zéros associés aux fréquences ω_i à estimer.

La minimisation de (60) sous la contrainte $\|\underline{u}_p\|^2 = 1$ équivaut à choisir pour \underline{u}_p le vecteur propre relatif à la plus petite valeur propre de $\hat{\Gamma}_p$.

Des résultats de simulations sont indiqués Fig.2,3.

3° Méthode de Tuft-Kumaresan /14/

Remarquons que la matrice de corrélation Γ_p peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma_p = E[\underline{y}_p(t) \underline{y}_p^t(t)] + b^2 I_{p+1} \quad (62)$$

Nous avons vu que $\underline{y}_p(t)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(e^{\pm j\omega_i})$. Pour $p > 2M$, en l'absence de bruit la matrice Γ_p est donc de rang $2M$, le sous espace propre correspondant aux valeurs propres non nulles étant le sous espace engendré par les vecteurs $(e^{\pm j\omega_i})$. Tout vecteur \underline{u} du sous espace de dimension $p-2M$ relatif à la valeur propre nulle est donc orthogonal à ces $2M$ vecteurs, ce qui entraîne que $U_p(z)$ admet $e^{\pm j\omega_i}$, $i=1,M$, pour zéros. Ces propriétés des vecteurs propres s'étendent au cas bruité, les vecteurs propres n'étant pas modifiés par l'addition de $b^2 I_p$ dans (62).

La méthode de Kumaresan consiste à faire un choix particulier de \underline{u}_p dans ce sous espace: on impose $u_0 = 1$ et on choisit le vecteur de norme minimale.

Cette méthode implique le calcul des $2M$ plus grandes valeurs propres de Γ_p et des vecteurs propres correspondants puis la minimisation de $\|\underline{u}_p\|^2$ sous $2M+1$ contraintes linéaires sur \underline{u}_p ($u_0=1$ et orthogonalité aux $2M$ vecteurs propres).

On trouve alors comme zéro de $U(z)$ les $2M$ exponentielles complexe $e^{\pm j\omega_i}$; la condition de minimisation de $\|\underline{u}_p\|$ a pour effet de rejeter les autres zéros vers l'intérieur du cercle unité. Sur les simulations Fig2,3,4 on constate une diminution de la variance par rapport aux autres méthodes.



ANALYSE DE SIGNAUX A COMPOSANTES QUASI SINUSOIDALES

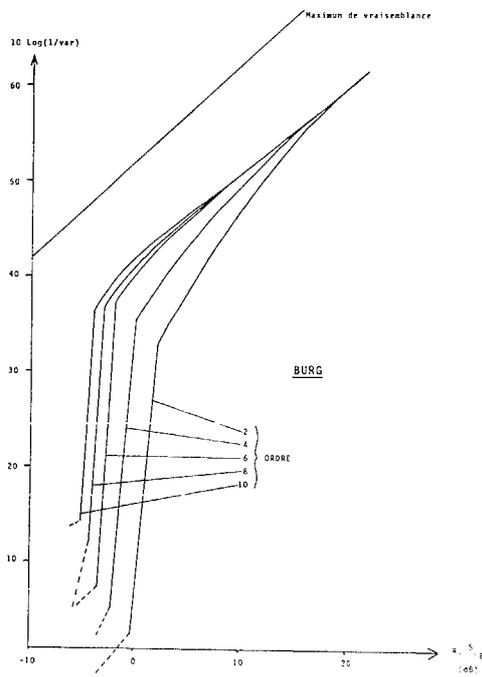


Fig.1 : Comparaison de performance pour la méthode de Burg à différents ordres.

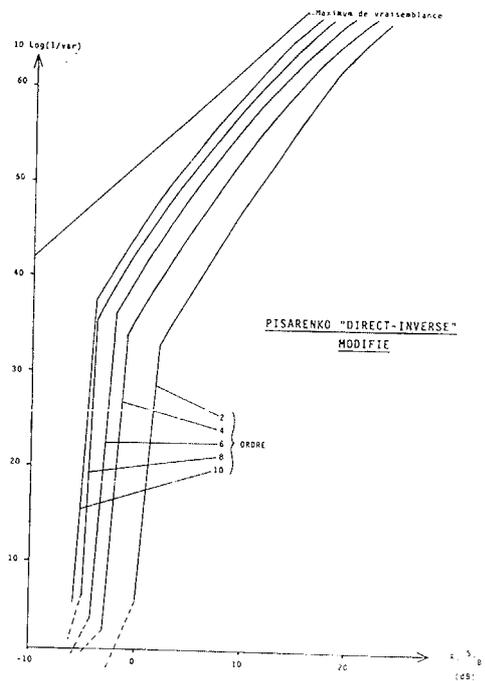


Fig.3 : Comparaison de performance pour 4 méthodes à l'ordre 2.

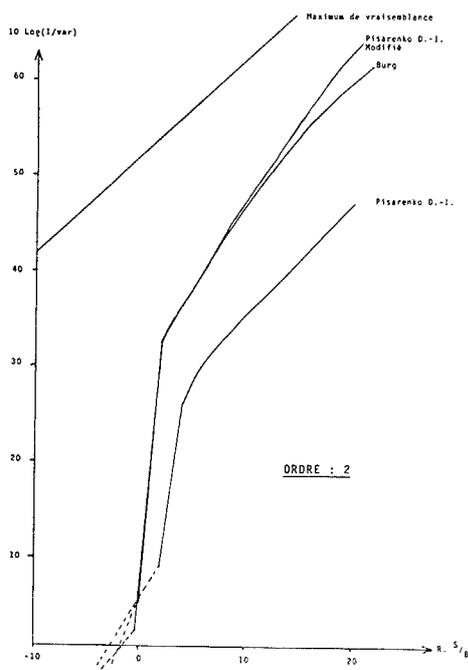


Fig.2 : Comparaison de performance pour la méthode de Pisarenko modifié à différents ordres.

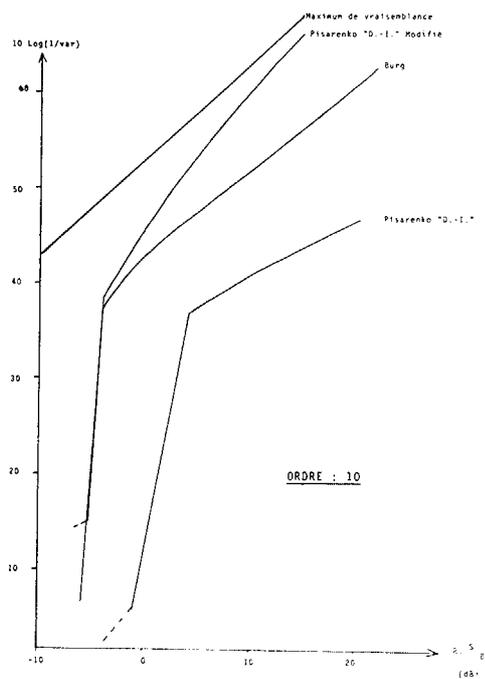


Fig.4 : Comparaison de performance pour 4 méthodes à l'ordre 10.



V - CONCLUSION

Nous avons insisté sur la spécificité du problème de l'estimation des fréquences de signaux additifs dans un bruit par rapport aux méthodes d'analyse spectrale de signaux purement non déterministes. Nous avons montré en particulier que les méthodes de prédiction linéaire conduisent à une augmentation notable de variance par rapport à la méthode du maximum de vraisemblance.

Les simulations montrent que ce dernier défaut peut être atténué en augmentant l'ordre du prédicteur ($p \gg 2M$).

La présentation de Tuft-Kumaresan a l'avantage de montrer que l'information sur les fréquences inconnues ω_j est contenue dans les vecteurs propres de Γ_p relatifs aux plus grandes valeurs propres. La recherche de ces plus grandes valeurs propres revient à maximiser $e(t)^2$, donné par (48), sous la contrainte $\|U_p\|^2 = 1$: on constate l'analogie avec la formulation du maximum de vraisemblance donnée par (37).

BIBLIOGRAPHIE

- / 1/ - J-L.LACOUME, C.HANNA, J-L.NICOLAS : "Etalonnage de l'analyse spectrale par la méthode du modèle autorégressif". Ann.Télécommunication, vol36, N°11-12, pp579-584, Nov-Déc 81
- / 2/ - A.BLANC-LAPIERRE, B.PICINBONO : "Fonctions Aléatoires". Masson 82
- / 3/ - T-J.ULRYCH, R-W.CLAYTON : "Time serie modeling and Maximum entropy" Phys. Earth Planet vol12, pp188-200, Aout 76
- / 4/ - P-F.FOUGERE : "A solution to the problem of spontaneous line splitting in maximum entropy power spectrum analysis" J.Geophysical Research, vol82, pp1051-1054, 1 mars77
- / 5/ - M.HOLTS : "Prony's method and related approaches to exponential approximation" Aerospace Corp, Rep. ATR-73 (9900)-5, 15 juin 73
- / 6/ - R-N.McDONOUGH, W-H.HUGGINS, "Best least squares representation of signal by exponentials", IEEE Trans. A.C., vol 13, pp408-412, Août 68
- / 7/ - G.E.P.BOX, G-M.JENKINS : "Time Series Analysis : Forecasting and Control" San Francisco, CA : Holden-Day 70
- / 8/ - H.CLERGEOT : " Estimation du spectre d'un signal aléatoire gaussien par le critère du maximum de vraisemblance ou du maximum de probabilité à postériori" Thèse d'Etat, Université de Paris-Sud, 22 Octobre 82
- / 9/ - S.M.KAY : "More accurate autoregressive parameter and spectral estimates for short data records", proc.ASSP workshop spectral estimation, Hamilton, Canada, Août 81
- /10/ - H.CLERGEOT : "Estimation spectrale par le critère Maximum de vraisemblance pour un modèle A.R. avec pôles voisins du cercle unité" IX^e Colloque GRETSI, Nice, Mai 83
- /11/ - D.C.RIFE, R.R.BOORSTYN : " Single-Tone parameter estimation from discrete-time observations" IEEE Trans. on I.T, vol 20, n°5, pp 591-598, Sept.74
- /12/ - L.B. JACKSON, D.W.TUFT, F.K.SOONG, R.M.RAO "Frequency estimation by linear prediction" IEEE ICASSP, pp352-356, 78
- /13/ - V.F.PISARENKO : "The Retrieval of Harmonics from a covariance Function" Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society, vol 33, pp 347-366, 73
- /14/ - D.W TUFT, R.KUMARESAN : "Estimation of multiple Sinusoids: Making linear prediction perform like maximum likelihood" - Proc. of the IEEE, vol 70, N°9, pp 975-989 Sept.82

