

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

971



NICE du 16 au 20 MAI 1983

FILTRAGE AUTOREGRESSIF VECTORIEL

M. GHARBI - N. MARTIN

C.E.P.H.A.G. (Laboratoire Associé au CNRS 346), B.P. 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères. Tél. (76) 44.82.45

RESUME

L'analyse spectrale autorégressive scalaire se généralise pour des processus vectoriels (algorithmes de JONES, NUTTALL, STRAND, ...). La matrice spectrale ainsi évaluée caractérise les relations existant entre les différentes composantes du processus vectoriel. Celle-ci intervient dans un grand nombre de domaines du traitement du signal (filtrage, traitement d'antenne, etc...).

Nous montrons qu'une modélisation autorégressive (AR) vectorielle est équivalente à une modélisation autorégressive à moyenne mobile (ARMA) de chaque composante du processus vectoriel.

Ce résultat explique les raies parasites obtenues sur les autospectres des composantes lorsque celles-ci sont des fréquences pures bruitées additivement. Nous démontrons ceci dans le cas simple d'un modèle AR vectoriel d'ordre 1 et nous l'illustrons par une simulation et par un exemple sur un cas réel.

SUMMARY

Scalar autoregressive spectral analysis becomes generalized for multichannel process (JONES, NUTTALL, STRAND, ... Algorithms). The spectral matrix so evaluated characterizes the relations between the different components of the vectorial process. This one is used in a fairly large number of fields of signal processing (filtering, array processing,...).

We show that a multichannel autoregressive modelling (AR) is equivalent to an autoregressive moving average modelling (ARMA) of each component of the vectorial process.

This result explains the line splitting obtained on the autospectra of the components when these are pure frequencies perturbed by additive noise. We demonstrate it in the simple case of an one order AR model and we illustrate it with a simulation and by an example on a real case.



INTRODUCTION

Lorsque nous nous intéressons non seulement à un signal, mais aussi aux relations entre les différents signaux aléatoires, une analyse spectrale est nécessaire : c'est le cas en traitement d'antennes, filtrage multicomposantes, etc...

Un des outils qui intervient dans un grand nombre de traitement de signaux multicomposantes est la matrice interspectrale. Plusieurs méthodes d'estimation de cette matrice ont été proposées :

- les méthodes classiques basées essentiellement sur la Transformée de FOURIER ;
- les méthodes autorégressives développées surtout après la généralisation de l'algorithme de LEVINSON pour le cas scalaire au cas vectoriel [1].

Dans le cas scalaire, les techniques autorégressives ont connu un essor important surtout après l'apparition de l'algorithme de BURG [2] appelé aussi méthode du maximum d'entropie.

Plusieurs généralisations au cas vectoriel de la méthode de BURG ont récemment été proposées : JONES [3], NUTTALL [4], STRAND [5]. Toutes ces méthodes utilisent le même modèle : un modèle autorégressif (AR) vectoriel (§ 1).

Le but de cet article est de montrer quelques particularités de cette modélisation. Sauf dans le cas trivial où une composante est un processus AR (§ 2.1), la modélisation AR d'un vecteur revient à modéliser chaque composante par un modèle autorégressif à moyenne mobile (ARMA) (§ 2.2).

La modélisation ARMA de ces composantes introduit une fonction de transfert du filtre contenant à la fois des pôles et des zéros. Dans le paragraphe 3, nous montrons l'influence de ces pôles et de ces zéros sur les autospectres obtenus dans le cas particulier où l'ordre du filtre est égal à un. Nous expliquons la présence de raies parasites observées sur les fonctions spectrales lorsque chaque composante du signal est composée de fréquences pures bruitées [6].

Ces résultats sont illustrés par une simulation et par un exemple sur un cas réel (§ 4).

1) MODELE AR VECTORIEL

Un processus réel autorégressif vectoriel à deux composantes $X_1(n)$ et $X_2(n)$ est défini par :

$$\underline{X}(n) = \sum_{k=1}^p \underline{A}(k) \underline{X}(n-k) + \underline{B}(n)$$

avec : $\underline{X}(n) = (X_1(n), X_2(n))^T$ $\underline{B}(n) = (B_1(n), B_2(n))^T$

(T signifie transposé)

- $\underline{B}(n)$ est un bruit blanc vectoriel centré de matrice de covariance :

$$\underline{r}_{\underline{B}}(k) = E\{ \underline{B}(n) \cdot \underline{B}^T(n-k) \} = \underline{Q} \cdot \delta(k) = \underline{Q} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

et $\underline{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & c \sigma_1 \sigma_2 \\ c \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

c est le coefficient de corrélation entre les deux composantes $B_1(n)$ et $B_2(n)$ du bruit.

- $\underline{A}(k)$ sont les matrices coefficients du filtre AR de dimension 2×2 de terme général $a_{ij}(k)$.

- p est l'ordre du filtre.

Ce modèle AR permet d'estimer la matrice spectrale $\underline{S}(z)$ du processus $\underline{X}(n)$. Elle est définie à partir des autospectres $S_{ii}(z)$ de chaque composante et de leur interspectres $S_{ij}(z)$ pour $z = \exp(2\pi j f t_e)$, t_e étant la période d'échantillonnage des composantes $X_i(n)$.

$$\underline{S}(z) = te. \begin{bmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) \end{bmatrix} = te. \underline{G}^{-1}(z) \cdot \underline{Q} \cdot \underline{G}^{-T}(z)$$

avec :

$$\underline{G}(z) = \underline{I} - \sum_{k=1}^p \underline{A}(k) z^{-k}$$

\underline{I} : matrice identité

Nous poserons pour la suite :

$$\underline{G}(z) = \begin{bmatrix} g_{11}(z) & g_{12}(z) \\ g_{21}(z) & g_{22}(z) \end{bmatrix}$$

Pour estimer la matrice spectrale d'un processus AR vectoriel, il suffit donc de connaître les matrices coefficients $\underline{A}(k)$ du filtre ainsi que la matrice de covariance \underline{Q} du bruit $\underline{B}(n)$.

2) MODELISATION ARMA DE CHAQUE COMPOSANTE

La matrice spectrale $\underline{S}(z)$ d'un processus AR vectoriel peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{S}(z) = te. \frac{\text{Adj } \underline{G}(z) \cdot \underline{Q} \cdot \{\text{Adj } \underline{G}(z)\}^T}{|\det \underline{G}(z)|^2}$$

Avec :

$$\text{Adj } \underline{G}(z) = (\det \underline{G}(z)) \cdot \underline{G}^{-1}(z)$$

$\det \underline{G}(z)$ est le déterminant de la matrice $\underline{G}(z)$

La matrice \underline{Q} étant une matrice de covariance, elle est symétrique et définie non négative. Nous pouvons donc factoriser \underline{Q} sous la forme :

$$\underline{Q} = \underline{Q}^{1/2} \cdot \underline{Q}^{T/2} \quad (\underline{Q}^{T/2} = (\underline{Q}^{1/2})^T)$$

avec : $\underline{Q}^{1/2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \sqrt{1-c^2} & c \sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$

La matrice spectrale $\underline{S}(z)$ s'écrit alors :

$$\underline{S}(z) = te. \frac{(\text{Adj } \underline{G}(z) \cdot \underline{Q}^{1/2}) (\text{Adj } \underline{G}(z) \cdot \underline{Q}^{1/2})^T}{|\det \underline{G}(z)|^2}$$

Si nous explicitons l'autospectre de la première composante $X_1(n)$ en fonction des $g_{ij}(z)$, nous obtenons :

$$S_{11}(z) = \frac{\alpha_1^2 |g_{22}(z)|^2 + |\alpha_3 g_{22}(z) - \alpha_2 g_{12}(z)|^2}{|g_{11}(z) g_{22}(z) - g_{12}(z) g_{21}(z)|^2}$$

Le numérateur est une fonction toujours positive. De plus, étant donné que tout spectre $|A(z)|^2$ avec $z = \exp(2\pi jfte)$ d'un système d'ordre fini est une fonction rationnelle non négative de $\cos 2\pi jfte$ et réciproquement, il existe un polynôme $P(z)$ tel que toutes ses racines soient à l'intérieur du cercle unité [7]. D'après ce théorème, nous pouvons écrire l'autospectre $S_{11}(z)$ sous la forme :

$$S_{11}(z) = \frac{|P(z)|^2}{|\det G(z)|^2}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} P(z) : \text{polynôme d'ordre } p \\ \det G(z) : \text{polynôme d'ordre } 2p \end{array} \right.$

Cet autospectre apparaît donc comme celui d'un processus ARMA d'ordre $(2p, p)$, c'est-à-dire la partie AR est d'ordre $2p$ et la partie MA est d'ordre p . Ce raisonnement est identique pour l'autospectre $S_{22}(z)$ de la deuxième composante $X_2(n)$.

Nous allons justifier ce résultat. Tout d'abord, nous allons éliminer les cas particuliers où une ou deux des composantes du vecteur $\underline{X}(n)$ sont des processus AR scalaires.

2.1) Cas particuliers

2.1.1) Une des deux composantes est un processus AR scalaire

Une des deux composantes, par exemple $X_1(n)$, est AR signifie que le coefficient $a_{12}(k)$ de la matrice $\underline{A}(k)$ du filtre est nul quelque soit k variant de 1 à p . Ainsi, l'élément $g_{12}(z)$ de la matrice $G(z)$ est nul quel que soit z . L'autospectre $S_{11}(z)$ s'écrit :

$$S_{11}(z) = \frac{\alpha_1^2 |g_{22}(z)|^2 + \alpha_3^2 |g_{22}(z)|^2}{|g_{11}(z) g_{22}(z)|^2}$$

Etant donné que l'élément $g_{22}(z)$ n'a pas de zéro sur le cercle unité [8], $S_{11}(z)$ a la forme suivante :

$$S_{11}(z) = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_3^2}{|g_{11}(z)|^2} = \frac{\sigma_1^2}{|g_{11}(z)|^2}$$

Ce spectre est celui d'un processus AR. Donc, le spectre de la première composante obtenu par un filtrage AR vectoriel de dimension 2, lorsque cette composante est AR, est identique au spectre obtenu par un filtrage AR scalaire dont l'entrée est la première composante $B_1(n)$ du bruit $\underline{B}(n)$. Ce résultat est valable quelle que soit la deuxième composante $X_2(n)$ et quelle que soit la deuxième composante $B_2(n)$ du bruit $\underline{B}(n)$.

Le même raisonnement et les mêmes conclusions s'appliquent lorsque la deuxième composante seulement est un processus AR scalaire.

2.1.2) Les deux composantes sont des processus AR scalaires

Lorsque les deux composantes $X_1(n)$ et $X_2(n)$ sont des processus AR scalaires, la matrice $\underline{G}(z)$ définie à partir des matrices coefficients $\underline{A}(k)$ du filtre est diagonale. Ainsi, les termes diagonaux de la matrice spectrale $\underline{S}(z)$ ou les autospectres de chaque composante s'écrivent sous la forme :

$$S_{ii}(z) = \frac{\sigma_i^2}{|g_{ii}(z)|^2} \quad i = 1, 2$$

Une expression simple de l'interspectre entre les deux composantes $X_1(n)$ et $X_2(n)$ est obtenue :

$$S_{12}(z) = c \cdot \frac{\sigma_1}{g_{11}(z)} \cdot \frac{\sigma_2}{g_{22}(z)}$$

La cohérence $\text{Coh}(z)$ entre deux signaux étant définie comme le rapport de l'interspectre sur la racine du produit des autospectres des deux signaux, nous pouvons calculer le module de cette cohérence :

$$|\text{Coh}(z)| = \frac{|S_{12}(z)|}{S_{11}(z)^{1/2} \cdot S_{22}(z)^{1/2}} = c$$

Dans ce cas bien particulier, le module de la cohérence est égal au coefficient de corrélation des composantes du bruit $\underline{B}(n)$. Le module de la cohérence est donc constant et ne dépend que de la corrélation entre les composantes du bruit ; les deux composantes $X_1(n)$ et $X_2(n)$ ne sont liées entre elles que par le bruit.

D'autre part, nous remarquons aussi que le module de la densité spectrale d'interaction est égale au produit des 2 autospectres, modulé par le coefficient de corrélation des composantes du bruit $\underline{B}(n)$. Ainsi les fréquences données par l'interspectre sont celles données par les autospectres de chaque composante. L'amplitude des pics de cette densité spectrale d'interaction peut être très faible si la corrélation entre les deux composantes du bruit d'entrée est proche de zéro.

A la limite, si les composantes du bruit d'entrée sont non corrélées ($c = 0$), la densité spectrale d'interaction $S_{12}(z)$ est nulle autant en module qu'en phase. Dans ce cas limite, le filtrage AR vectoriel se comporte comme deux filtres autorégressifs scalaires en parallèle, totalement indépendants.

Pour conclure, lorsque une ou deux composantes sont des processus AR scalaires, le canal correspondant se comporte en théorie comme un filtrage AR scalaire ; c'est-à-dire que le spectre obtenu est celui d'un processus AR scalaire. Nous verrons au paragraphe 3 qu'il faut nuancer cette conclusion dans le cadre de la pratique.

2.2) Cas général : les deux composantes ne sont pas des processus AR scalaires

Dans ce paragraphe, nous ne considérons qu'un filtrage AR vectoriel d'ordre $p = 1$. Les équations du filtrage vectoriel en temps qui sont à l'origine de la matrice spectrale :

$$\underline{X}(n) = \underline{A} \cdot \underline{X}(n-1) + \underline{B}(n) \quad \text{à l'ordre } p = 1$$

permettent d'écrire en isolant la première composante :

$$X_1(n) = \text{Tr } \underline{A} \cdot X_1(n-1) - \text{Det } \underline{A} \cdot X_1(n-2) + W(n)$$

avec : $W(n) = B_1(n) - a_{22}B_1(n-1) + a_{12}B_2(n-1)$

$$\text{Tr } \underline{A} = \text{trace de } \underline{A}$$

$$\text{Det } \underline{A} = \text{déterminant de } \underline{A}$$

Le premier canal se comporterait comme un filtrage ARMA scalaire si $W(n)$ était un processus à moyenne mobile (MA) $\nu(n)$ avec $\nu(n) = e(n) - \beta e(n-1)$; $e(n)$ étant un bruit blanc de variance N_e . En fait, ces deux signaux, $W(n)$ et $\nu(n)$, ne sont égaux qu'en moyenne quadratique. Ces résultats sont identiques pour l'autre canal. Ainsi, nous pouvons conclure que l'autospectre obtenu de chaque composante est identique à un spectre ARMA contenant à la fois des pôles et des zéros.



D é m o n s t r a t i o n

W(n) peut être considéré comme la sortie d'un filtre F₀ linéaire et causal dont l'entrée B(n) est bidimensionnelle :

$$W(n) = \underline{w}_0^T \cdot \underline{B}(n) + \underline{w}_1^T \cdot \underline{B}(n-1) \quad \underline{w}_0^T = (1, 0)$$

$$\underline{w}_1^T = (-a_{22}, a_{12})$$

Le bruit blanc e(n) du processus MA est la sortie d'un filtre F linéaire et causal dont l'entrée est aussi B(n) :

$$e(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{h}_k^T \cdot \underline{b}(n-k)$$

Le but de la démonstration est donc d'identifier le filtre F tel que le processus v(n) soit égal au signal W(n) en moyenne quadratique.

Cette condition E { (W(n) - v(n))^2 } = 0 permet de définir les coefficients h_k du filtre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{h}_0 = \underline{w}_0 \\ \underline{h}_1 = \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_0 \\ \underline{h}_k = \beta^{k-1} \cdot \underline{h}_1 \quad k \geq 2 \end{array} \right.$$

Pour que le bruit e(n) soit à corrélation microscopique, le coefficient du processus MA doit vérifier l'équation suivante :

$$\beta^2 + \frac{\underline{w}_0^T \underline{Q} \underline{w}_0 + \underline{w}_1^T \underline{Q} \underline{w}_1}{\underline{w}_1^T \underline{Q} \underline{w}_0} \beta + 1 = 0$$

Q étant une matrice définie non négative, cette équation du second degré admet deux racines réelles.

De plus, le produit de ces deux racines vaut 1. Il existe donc une solution telle que le module de β soit inférieur à 1. Ce dernier cas est intéressant puisqu'il correspond à un filtre MA à déphasage minimum.

La connaissance de ce coefficient β détermine pleinement les coefficients h_k du filtre F ainsi que la variance Ne du bruit e(n) :

$$N_e = - \frac{\underline{w}_0^T \underline{Q} \underline{w}_1}{\beta}$$

Cette variance est bien constante et positive.

Ainsi, un filtrage AR vectoriel revient à modéliser chaque composante du signal comme un processus ARMA : l'égalité des deux processus est presque sûre (la probabilité de l'événement "les deux processus sont égaux" vaut 1 quelle que soit la date t. Nous n'avons traité que le cas d'un filtrage vectoriel à 2 composantes ; l'ordre p = 1 seul a été explicité mais ces résultats se généralisent pour un ordre p quelconque.

Ce résultat permet d'interpréter les autospectres de chaque composante. En effet, chaque spectre obtenu sera identique au spectre d'un processus ARMA contenant à la fois des pôles et des zéros. La connaissance seule des pôles ne détermine plus les fréquences présentes dans chaque composante à l'opposé du filtrage AR scalaire. Il est donc indispensable de connaître les zéros, de plus qu'ils seront déterminants pour distinguer chaque spectre puisque les pôles des autospectres de chaque canal sont communs [9].

3) I N F L U E N C E D E S P O L E S E T D E S Z E R O S

Le paragraphe précédent montre l'importance des pôles et des zéros des autospectres de la matrice spectrale obtenue par un filtrage AR vectoriel. Nous nous plaçons ici dans le cas particulier d'un signal dont chaque composante est une fréquence pure complexe bruitée additivement. L'intérêt d'un tel signal est qu'il suffit d'avoir un ordre p = 1 pour déterminer la matrice spectrale. Les coefficients a_{ij} du filtre sont aussi complexes.

Dans un premier temps, si l'interaction entre les deux composantes est nulle (a₁₂ = a₂₁ = 0), nous avons montré dans ce cas-là (cf § 2.1.1) que le modèle du filtrage AR vectoriel pour chaque canal est un modèle AR scalaire dont les pôles sont respectivement a₁₁ et a₂₂ pour les deux composantes. Ces coefficients représentent donc, quant à leur phase, la fréquence de chaque composante. Il est à noter qu'en pratique, les autospectres obtenus, théoriquement AR dans ce cas, contiennent à la fois des pôles et des zéros. En effet, avant simplification du terme |S₂₂(z)|² (cf § 2.1.1), l'autospectre du premier canal, par exemple, s'écrit :

$$S_{11}(z) = \frac{\sigma_1^2 \cdot |g_{22}(z)|^2}{|g_{11}(z)|^2 |g_{22}(z)|^2}$$

Cet autospectre est celui d'un spectre ARMA particulier puisqu'à chacun de ses zéros correspond un pôle identique qui annule son effet. En pratique, ces pôles et ces zéros ne sont pas toujours rigoureusement égaux. Dans ce cas, il apparaît dans S₁₁(z) un parasite à la fréquence de la deuxième composante. Ce raisonnement s'applique pour l'autre canal.

Dans un premier temps, si l'interaction entre les composantes n'est pas nulle, chaque canal du filtrage AR vectoriel se comporte comme un filtrage ARMA scalaire (cf § 2.2) d'ordre (2p=2 ; p=1). L'autospectre de chaque composante contient à la fois des pôles et des zéros. Pour le premier canal par exemple, S₁₁(z) peut s'écrire sous la forme :

$$S_{11}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sigma_1^2 |1 - z_0 z^{-1}|^2 + \sigma_2^2 |a_{12}|^2 (1 - c^2)}{|1 - \text{Tr } \underline{A} \cdot z^{-1} + \text{Det } \underline{A} z^{-2}|^2}$$

avec :

$$z_0 = a_{22} - c \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{12}$$

$$\text{Tr } \underline{A} = a_{11} + a_{22} \quad \text{et} \quad \text{Det } \underline{A} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Si les fréquences de chaque composante sont assez éloignées, c'est-à-dire si l'écart entre a₁₁ et a₂₂ est suffisamment grand devant le terme de couplage représenté par le produit a₁₂a₂₁, alors les pôles de l'autospectre S₁₁(z) sont approchés par :

$$z_1 = a_{11} + \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} - a_{22}} \quad z_2 = a_{22} + \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} - a_{22}}$$

et le zéro de S₁₁(z) de même argument que z₀ est proche de a₂₂.

Cet autospectre aura un pôle et un zéro proche de a₂₂ : ces deux racines sont voisines mais non égales. Elles ne peuvent donc pas s'annuler. Ainsi, S₁₁(z) aura un pic associé à a₁₁ qui représente la fréquence de la première composante mais aussi un pic associé à a₂₂ qui représente la fréquence de la seconde composante. Ce dernier pic est une raie parasite.

FILTRAGE AUTOREGRESSIF VECTORIEL

Ce résultat se retrouve pour des ordres quelconques. Lorsque le signal est composé de fréquences pures, sur chaque autospectre il apparaît des raies parasites correspondant aux fréquences de l'autre composante. L'amplitude de ces raies dépend du rapport signal sur bruit. Cette raie parasite est beaucoup plus importante sur le coefficient de cohérence.

4) EXEMPLES

Un processus vectoriel à deux composantes échantillonné à $F_e = 2$ KHz a été synthétisé pour le modéliser par un filtrage AR vectoriel. Les composantes de 256 points ont deux fréquences pures dont une commune : la première 100 Hz et 300 Hz, la seconde 100 Hz et 700 Hz. Chaque composante est perturbée par un bruit blanc additif, le rapport signal sur bruit étant de 20 db. Avec un ordre $p = 12$, le filtrage AR vectoriel a permis d'estimer la matrice spectrale de ce processus (fig.1).

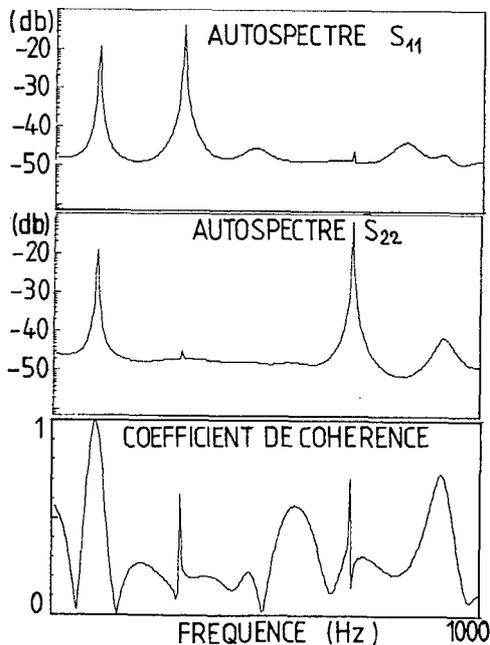


FIGURE 1 : Spectres obtenus par filtrage AR vectoriel $p = 12$ simulation

Chaque autospectre fait apparaître une raie parasite de faible amplitude correspondant à la fréquence de l'autre composante. Nous avons ensuite calculé les pôles et les zéros des autospectres de chaque composante qui sont représentés graphiquement dans le plan des z . Il ne figure que la moitié supérieure du cercle unité, les autres pôles complexes conjugués pouvant être obtenus par symétrie.

Les pôles des autospectres communs aux deux composantes [9] se divisent en deux familles [10] : les pôles proches du cercle unité correspondant à des fréquences présentes dans le signal et des pôles de module inférieur correspondant au bruit. Il apparaît dans cet exemple (cf figure 2) que trois pôles sont proches du cercle unité :

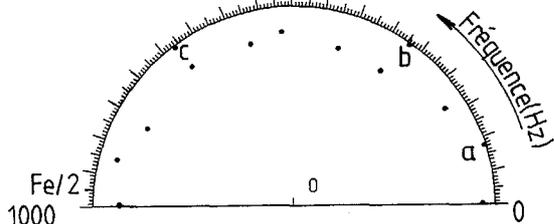


FIGURE 2 : Représentation des pôles communs aux autospectres - $p = 12$ - simulation.

- pôle a de phase 100 Hz
- pôle b de phase 300 Hz
- pôle c de phase 700 Hz

Pour distinguer les deux composantes, il faut tracer les zéros des autospectres de chacune (cf fig. 3 & 4).

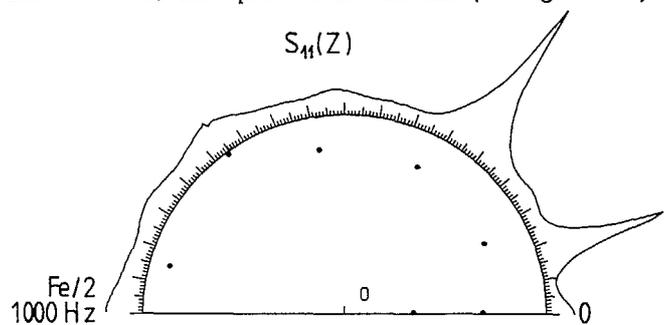


FIGURE 3 : Représentation des zéros de $S_{11}(z)$ avec $\log(S_{11}(z)) - p = 12$ - simulation.

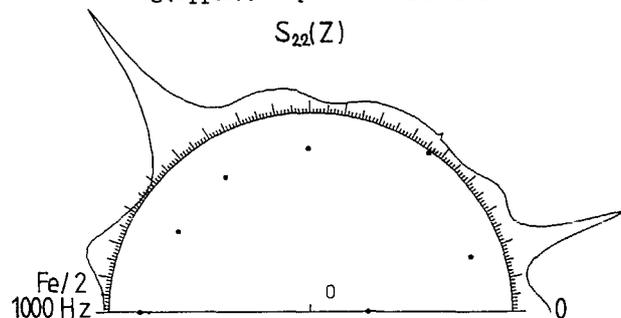


FIGURE 4 : Représentation des zéros de $S_{22}(z)$ avec $\log(S_{22}(z)) - p = 12$ - simulation.

Pour la première composante, il existe un zéro proche du cercle unité à la fréquence 700 Hz qui annule l'effet du pôle c. L'autospectre $S_{11}(z)$ n'a donc que deux pics correspondant aux pôles a et b. De même pour la deuxième composante, le zéro à la fréquence 300 Hz compense le pôle b : $S_{22}(z)$ a deux pics correspondant aux pôles a et c.

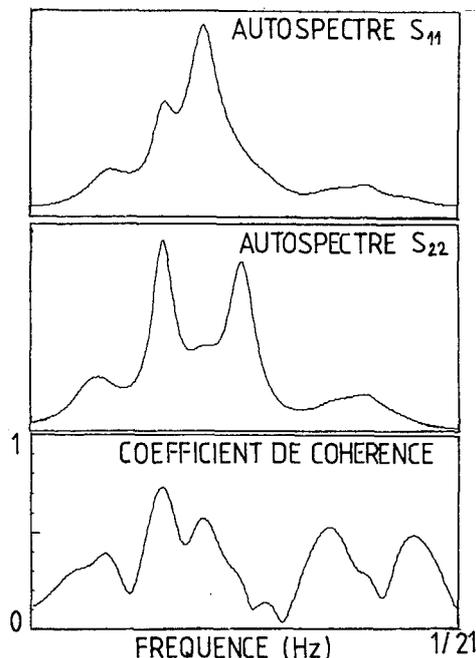


FIGURE 5 : Spectres obtenus par filtrage AR vectoriel $p = 10$ cas réel



Dans cet exemple, les pôles et les zéros devant se compenser ont des modules et des phases très voisines (phase égales à $1/10$ Hz) ; ce qui explique la faible amplitude du pic parasite.

Nous avons ensuite traité un cas réel : une onde électromagnétique naturelle a été enregistrée sur 256 points à deux stations différentes ($F_e = 95\text{mHz}$) [9]. La matrice spectrale de ce processus à deux composantes a été estimée avec un ordre $p = 10$ (cf figure 5).

Comme précédemment, nous avons représenté les pôles et les zéros. Les pôles communs aux deux autospectres (cf figure 6) font apparaître trois fréquences intéressantes dans la bande $B = [10\text{mHz}, 30\text{mHz}]$:

pôle α de phase 14,7 mHz
 pôle β de phase 23,6 mHz
 pôle γ de phase 19,5 mHz

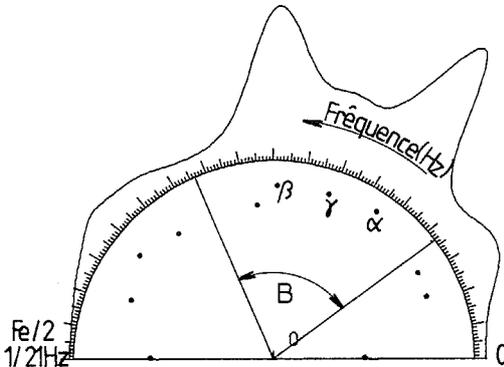


FIGURE 6 : Représentation des pôles communs aux autospectres - $p = 10$ - cas réel

Dans la bande B considérée, un zéro de $S_{22}(z)$ annule l'effet du pôle γ tandis que les deux autres pôles α et β correspondent à deux fréquences de cette composante (cf figure 8).

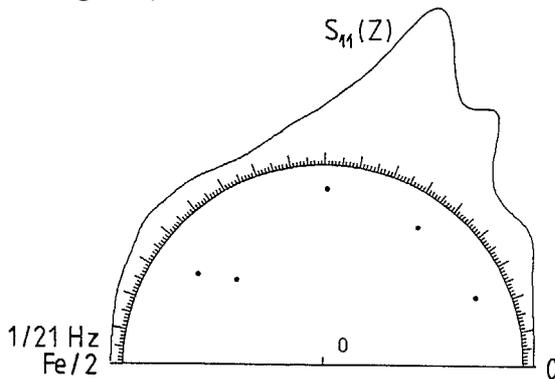


FIGURE 7 : Représentation des zéros de l'autospectre $S_{11}(z)$ avec l'autospectre $S_{11}(z)$ - $p = 10$ - cas réel.

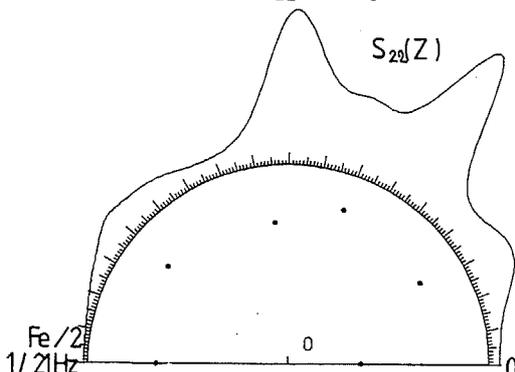


FIGURE 8 : Représentation des zéros de l'autospectre $S_{22}(z)$ avec l'autospectre $S_{22}(z)$ - $p = 10$ - cas réel.

Les fréquences de l'autre composante, dans cette même bande B , sont associées aux pôles α et γ . En effet, deux zéros de $S_{11}(z)$ sont proches du cercle unité (cf figure 7).

Un des zéros annule l'effet du pôle β tandis que l'autre diminue l'importance du pic associé au pôle α . On pourrait croire qu'il s'agit d'un pic parasite puisque la fréquence associée existe aussi dans l'autre composante. L'observation du coefficient de cohérence (cf fig. 5) proche de l'unité dans cette zone de fréquence permet de penser que cette fréquence associée au pôle α est commune aux deux signaux. Cette interprétation est confirmée lorsque les autospectres de chaque composante sont estimés séparément par un filtrage AR scalaire [9].

CONCLUSION

L'utilisation d'un modèle AR vectoriel pour estimer une matrice spectrale conduit à des autospectres de type ARMA. La localisation dans le plan complexe des pôles et des zéros explique l'allure de ces spectres et la nature du lien entre les composantes du processus imposé par le modèle. Cette décomposition de l'autospectre permet de distinguer les rafes parasites des fréquences présentes dans le signal lorsque celui-ci est composé de fréquences pures bruitées additivement.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier Monsieur F. GLANGEAUD pour les signaux réels qu'il nous a communiqués et Monsieur G. TZIRITAS pour les conseils qu'il nous a apportés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. WHITTLE "On the fitting of multivariate autoregressions and the approximate factorization of a spectral density matrix", *Biometrika*, Vol. 50, pp. 129-134, 1963.
- [2] J.P. BURG "Maximum Entropy Spectral Analysis", *Proc. of 37th Meeting of the Soc. of Exploration Geophysicists*, 1967.
- [3] R.H. JONES "Multivariate autoregression estimation using residuals", presented at *Applied Time Series Analysis Symp.*, Tulsa, OK, May 14-15, 1976.
- [4] A.H. NUTTALL "Multivariate linear predictive spectral analysis employing weighted forward and backward averaging : a generalization of Burg's algorithm", NUSC, Tech.Rep.5501, New London, CT, 1976.
- [5] O.N. STRAND "Multichannel complex maximum entropy spectral analysis", *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. AC-22, pp. 634-640, Aug. 1977.
- [6] S.L. MARPLE "Performance comparison of three multichannel spectral estimates based on linear prediction analysis", *Proc. of the Inst. of Acoustics 'Spectral Analysis & its Use in Underwater Acoustics'* : UAG Conf., Imper. Coll, London, Apr.1982.
- [7] A. PAPOULIS "Signal Analysis", M.C. Graw-Hill Book Company, 1977, Ed. Nalle & Gardner, pp. 49-50.
- [8] A.H. NUTTALL "Positive definite spectral estimate and stable correlation recursion for multivariate linear predictive spectral analysis", NUSC, Tech. Rep. 5729, New London, CT, Nov. 14, 1977.
- [9] F. GLANGEAUD, M. GHARBI, N. MARTIN, J.L. LACOUME "Use of Multidimensional MEM Spectral Analysis in Geophysics", *Proc. of ICASSP82*, Vol.3, pp. 1886-1889, Mai 1982.
- [10] J.L. LACOUME, M. GHARBI, C. LATOMBE "Close Frequencies Resolution by Maximum Entropy Spectral Estimator", *Proc.ICASSP82*, V.2, pp.1034-1037, 1982.