

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

QUELQUES PROBLEMES LIES A L'AMELIORATION DE LA RESOLUTION
D'UN SYSTEME DE TOMOGRAPHIE A MICRO-ONDES PAR DECONVOLUTION

Didier SAINT-FELIX, Ali M. DJAFARI, Guy DEMOMENT

LABORATOIRE DES SIGNAUX ET SYSTEMES - C.N.R.S.-E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE

RESUME

Le problème posé est celui de l'amélioration de la résolution d'images obtenues par tomographie micro-ondes active. Ces images sont le résultat de la convolution bi-dimensionnelle des densités de courant complexes équivalentes dans l'objet étudié, par une fonction d'appareil. L'étalement du noyau est une des causes de la limitation de la résolution et l'on veut y remédier par déconvolution. Après discrétisation, la résolution de l'équation intégrale se ramène à l'inversion d'un système linéaire de grandes dimensions et mal conditionné.

Dans une première étape, on étudie les problèmes de calcul d'une solution inverse généralisée par une méthode itérative qui permet de travailler directement dans l'espace des données (ici \mathbb{C}^n). L'application de cet algorithme nécessite d'imposer des conditions sur les bords de l'image et permet d'améliorer sensiblement la résolution. Mais la forte dépendance linéaire entre les lignes de la matrice à inverser conduit à une convergence lente et impose plusieurs balayages de l'image pour obtenir une erreur quadratique moyenne acceptable. D'autre part, des problèmes de stabilité numérique peuvent se poser pour des noyaux à intégrale nulle. Une extension stochastique du problème permet, en examinant les propriétés d'une solution à variance minimale, d'expliquer les difficultés précédentes, et d'établir les bases d'une méthode d'estimation récursive sous-optimale ne nécessitant pas d'introduire de semi-causalité dans l'objet à restaurer.

SUMMARY

We are interested in increasing the resolving power of a microwave tomographic system. The smearing effect on the images of complex equivalent currents can be approximated by a convolution of the true currents in the studied object with the apparatus spread function. This problem can be classically expressed in a system of linear equations relating the measured image pixels to the unknown object parameters.

In a first step, we study the difficulties encountered in computing a generalized inverse solution using an iterative method in \mathbb{C}^n . With appropriate boundary conditions, this method affords an effective improvement of the resolution; but the convergence is slow because of the linear dependence between consecutive lines of the matrix to invert. Moreover, computational stability problems may occur when the kernel has a vanishing integral. In a second step, analysis of these difficulties is done through a stochastic extension of this otherwise deterministic problem. Derivation of a minimum variance solution allows one to set the basis of a sub-optimal recursive estimation scheme that does not imply the usual semi-causality assumptions on the object.



QUELQUES PROBLEMES LIES A L'AMELIORATION DE LA RESOLUTION D'UN SYSTEME
DE TOMOGRAPHIE A MICRO-ONDES PAR DECONVOLUTION

I. INTRODUCTION

Le problème abordé ici est celui de l'amélioration de la résolution d'images obtenues par tomographie micro-ondes active. La reconstruction d'images est une question qui a déjà été largement étudiée dans le cadre de la tomographie ultra-sonore ou à rayons X. Mais le principe même de l'instrumentation utilisée en tomographie micro-ondes fait que le problème se pose ici avec davantage de contraintes.

En effet, l'appareillage original développé dans notre laboratoire par Bolomey et Pichot [1] repose sur la mesure, par une méthode de rétrodiffusion modulée, des module et phase du champ *diffraqué* par un objet éclairé par une onde plane. Il apparaît tout de suite que l'hypothèse de parcours rectiligne, couramment faite en imagerie ultra-sonore ou à rayons X [19], ne peut pas être appliquée ici. On mesure l'intégrale d'une grandeur physique, non pas sur un segment de droite, mais sur toute la section de l'objet, ceci exclut l'utilisation ultérieure des méthodes d'épandage (back-projection).

A partir de la mesure sur un segment de droite de ce champ diffracté, une focalisation synthétique permet de construire une image de la distribution des densités complexes de courant équivalentes dans une section de l'objet supposé à symétrie cylindrique. On montre que cette image est le résultat de la convolution bi-dimensionnelle de la distribution effective des densités de courant complexes par la fonction d'appareil [1]. Ce noyau est connu analytiquement et peut être aisément obtenu expérimentalement : c'est l'image d'une tige diélectrique de diamètre petit devant la longueur d'onde. La longueur finie du segment de mesure conduit à un étalement de ce noyau, surtout dans la direction de propagation de l'onde incidente. Comme en holographie ultra-sonore [2], ceci implique une détérioration de la résolution spatiale de l'image. La multiplication des projections permet de remédier partiellement à ce défaut. Mais l'étalement du noyau produit ainsi obtenu reste supérieur à la longueur d'onde qui est la limite théorique de la résolution.

L'accessibilité du noyau incite donc à améliorer la résolution par déconvolution, c'est-à-dire en résolvant l'équation intégrale liant l'image à l'objet réel. La restauration d'un signal dégradé par un appareil linéaire est un problème rencontré dans de nombreux domaines de la physique expérimentale et la littérature sur le sujet est des plus abondantes. En imagerie, de nombreux travaux portent sur le traitement simultané de toute l'image, par approximations circulantes ou circulantes par bloc (Hunt [3,4], Wood [5]). Par contre, la plupart des travaux sur la restauration par des méthodes récursives ne s'intéressent qu'à des images simplement bruitées, ou bruitées et bougées, alors que peu d'entre eux abordent le problème général de la déconvolution bi-dimensionnelle [15,16].

Les méthodes algébriques opérant directement dans l'espace des données semblent bien adaptées au cas étudié. Elles ont déjà montré leur efficacité dans les problèmes de reconstruction (méthodes dites ART [19]) et de restauration d'images tomographiques (méthodes du gradient [6]). Outre de nombreux avantages, tels que l'introduction aisée de contraintes non linéaires (positivité...), extension immédiate à des données dans \mathbb{C}^n , ces méthodes ont montré dans le cadre de la déconvolution mono-dimensionnelle [7] qu'elles pouvaient être mises en oeuvre avec des volumes de calculs très faibles. Ce dernier point est essentiel : l'originalité de l'instrumentation micro-ondes développée repose sur sa rapidité et sa légèreté. Le

traitement aval de l'image doit donc pouvoir être réalisé avec des moyens informatiques légers.

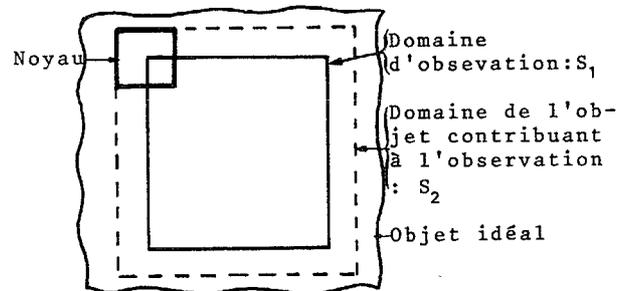
II. FORMULATION DISCRETE DU PROBLEME

L'image à restaurer $y(r,s)$ est liée à l'objet réel $x(r,s)$ par une équation de convolution de la forme :

$$y(r,s) = \iint_{\mathcal{D}} h(r-r_1, s-s_1) \cdot x(r_1, s_1) dr_1 ds_1 + b(r,s) \quad (1)$$

où $h(r,s)$ représente la fonction d'appareil supposée stationnaire dans la zone de mesure, et $b(r,s)$ le bruit entachant la mesure. La discrétisation de (1) nécessite un certain nombre d'hypothèses sur le support des différentes fonctions.

L'image est observée sur un nombre fini de points. Soit S_1 ce domaine d'observation. Le support du noyau h pouvant raisonnablement être supposé borné, seule une partie S_2 de l'objet idéal contribue à l'observation. Ceci correspond au schéma suivant :



Soient δ_r et δ_s les pas spatiaux de discrétisation supposés égaux et constants. Avec les hypothèses précédentes, (1) peut s'écrire sous la forme :

$$y(i,j) = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^{N'} h(k,\ell) \cdot x(i-k-n_0, j-\ell-n'_0) + b(i,j) \quad (2)$$

où $i = 1, \dots, L$ et $j = 1, \dots, L'$. Soit X , Y et B les matrices formées à partir des valeurs discrétisées de x , y et b : $X = \{x(i,j)\}$, $Y = \{y(i,j)\}$ et $B = \{b(i,j)\}$, de dimensions respectives $(M \times M')$, $(L \times L')$ et $(L \times L')$ avec $M = L + N - 1$ et $M' = L' + N' - 1$. Le système linéaire (2) peut s'écrire alors :

$$\underline{y} = H \underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

où \underline{x} , \underline{y} et \underline{b} sont les vecteurs formés par concaténation des lignes de X , Y et B :

$$\begin{aligned} \underline{x}^t &= [x(1,1), \dots, x(1,M'), x(2,1), \dots, x(M,M')] \\ \underline{y}^t &= [y(1,1), \dots, y(1,L'), y(2,1), \dots, y(L,L')] \\ \underline{b}^t &= [b(1,1), \dots, b(1,L'), b(2,1), \dots, b(L,L')] \end{aligned} \quad (4)$$

H est une matrice bloc-circulante de dimensions $(LL' \times MM')$ formée à partir des valeurs discrétisées de $h(r,s)$:

$$H = \begin{bmatrix} H_N & \dots & H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_N & \dots & H_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & H_N & \dots & H_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

où le bloc H_j est une matrice circulante de dimension $L' \times M'$ définie par :

QUELQUES PROBLEMES LIES A L'AMELIORATION DE LA RESOLUTION D'UN SYSTEME DE TOMOGRAPHIE A MICRO-ONDES PAR DECONVOLUTION

$$H_j = \begin{bmatrix} h(j, N') & \dots & h(j, 1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h(j, N') & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h(j, N') & \dots & h(j, 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h(j, N') & \dots & h(j, 1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Le problème de la déconvolution se ramène donc à la résolution du système linéaire défini par (3). Or celui-ci est fortement indéterminé : il s'agit d'estimer MM' inconnues à partir de LL' observations avec $M > L$ et $M' > L'$. L'indétermination est d'autant plus forte que les dimensions du noyau sont élevées. On note également qu'elle est beaucoup plus importante que dans les problèmes de déconvolution mono-dimensionnelle où \underline{x} et \underline{y} ont des dimensions voisines dès que $M > N$ [7].

Il faut donc disposer de méthodes capables d'affronter cette difficulté et introduire, comme dans tout problème mal posé, une information a priori sur la solution. Celle-ci devra porter notamment sur les conditions aux limites. La nécessité d'une connaissance a priori sur les bords de l'objet apparaît clairement chez Woods [20] et Pratt [8] qui font par exemple une hypothèse de régularité.

III. RESTAURATION PAR UNE METHODE ITERATIVE

En raison des dimensions des images considérées dans notre application ($L = L' = 128$), H est de grandes dimensions (typiquement 16000×20000). La résolution directe d'un système de cette taille (ramené à un système sur-déterminé comme nous le montrerons plus bas) conduit à une solution de médiocre qualité, même en absence de bruit, pour des raisons de propagation d'erreurs numériques. En présence de bruit, la divergence de la solution est encore plus rapide.

III.1. Solution inverse généralisée

Parmi les différentes approches qui permettent d'obtenir une solution satisfaisante à un problème mal posé de ce type, la méthode d'inversion itérative de Kaczmarz [9], qui fournit une solution inverse généralisée, présente plusieurs avantages. Elle converge pour tout système sans ligne identiquement nulle, même si celui-ci est singulier, ce qui est souvent le cas en tomographie [10]. Ceci n'est pas le cas des procédures itératives de Gauss-Seidel ou de Jacobi. Ensuite elle s'applique aisément dans \mathbb{C}^n . Enfin, le traitement récursif observation par observation permet de résoudre les problèmes d'encombrement mémoire. La mise en oeuvre est donc moins lourde que celle de la méthode voisine proposée par Ichioka et coll. [6] qui, explorant l'image ligne par ligne, correspond à un gradient vectoriel.

Cette méthode itérative s'écrit [7] :

$$\underline{\hat{x}}^{k+1} = F(\underline{y}, \underline{\hat{x}}^k) = f_{LL}, \dots, f_2 \circ f_1(\underline{\hat{x}}^k) \quad (7)$$

$$f_i(\underline{\hat{x}}^k) = \underline{\hat{x}}^k - \frac{\langle \underline{h}_i, \underline{\hat{x}}^k \rangle - y_i}{\langle \underline{h}_i^*, \underline{h}_i \rangle} \underline{h}_i^* \quad (8)$$

où * dénote la conjugaison dans \mathbb{C} et \underline{h}_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de H . En choisissant $\underline{\hat{x}}^0 = 0$, la suite $\{\underline{\hat{x}}^j\}$ converge vers la solution inverse généralisée de (3).

III.2. Problèmes de mise en oeuvre et premiers résultats

La méthode de Kaczmarz ne prend pas en compte le bruit sur les observations. Elle fournit la solu-

tion inverse généralisée $\underline{\hat{x}}$ du système $\underline{y} = H\underline{x}$

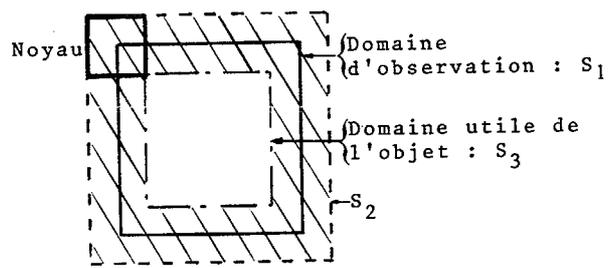
$$\underline{\hat{x}} = H^+ \underline{y} \quad (9)$$

où H^+ est telle que : $H^+HH^+ = H^+$ et $HH^+H = H$. En présence de bruit, la solution fournie est donc :

$$\underline{\hat{x}} = H^+ H\underline{x} + H^+ \underline{b} = \underline{x} + H^+ \underline{b} \quad (10)$$

L'influence du terme parasite $H^+ \underline{b}$ dépend de la matrice inverse généralisée H^+ . Pour réduire l'importance de ce terme, nous introduisons des conditions sur les bords de l'objet à restaurer qui vont permettre de diminuer les dimensions de cet objet, et donc de réduire le mauvais conditionnement de la matrice H .

L'objet étudié est représenté par les densités de courant équivalentes dont il est le siège sous l'action de l'onde électro-magnétique incidente. Cet objet est immergé dans de l'eau où les densités de courant équivalentes sont supposées nulles. $x(r,s)$ est alors nul en dehors des limites physiques de l'objet. Si l'on admet que ses dimensions effectives sont inférieures à celles de l'image observée, il est possible de tronquer le champ utile de l'objet à S_3 en utilisant cette information a priori. Le schéma précédent devient :



et l'objet est nul dans le domaine S_2-S_3 . L'intégrale de convolution (1) se discrétise alors sous la forme :

$$\begin{cases} y(i,j) = \sum_{k=k_0}^{k_1} \sum_{l=l_0}^{l_1} h(k,l) \cdot x(i-k+1, j-l+1) + b(i,j) \\ i = 1, \dots, L \text{ et } j = 1, \dots, L' \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{avec } \begin{cases} k_0 = 1 & \text{pour } i \leq L-N+1 \\ k_0 = N-(L-i) & \text{ailleurs} \end{cases} \begin{cases} k_1 = N & \text{pour } i \geq N \\ k_1 = i & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} l_0 = 1 & \text{pour } j \leq L'-N'+1 \\ l_0 = N'-(L'-j) & \text{ailleurs} \end{cases} \begin{cases} l_1 = N' & \text{pour } j \geq N' \\ l_1 = j & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La matrice \tilde{X} contenant les valeurs échantillonnées de l'objet dans S_3 est extraite de X ; elle est de dimensions ($M=L-N+1, M'=L'-N'+1$). L'équation vectorielle (3) devient :

$$\underline{y} = \tilde{H} \underline{\tilde{x}} + \underline{b} \quad (13)$$

où \tilde{H} est une matrice bloc-Toeplitz définie par :

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tilde{H}_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_N & & & \tilde{H}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{H}_n \end{bmatrix} \text{ avec } \tilde{H}_j = \begin{bmatrix} h(j,1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & h(j, N') & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & h(j, N) \end{bmatrix} \quad (14)$$

et où les blocs \tilde{H}_j ont également une structure de Toeplitz.



QUELQUES PROBLEMES LIES A L'AMELIORATION DE LA RESOLUTION D'UN SYSTEME DE TOMOGRAPHIE A MICRO-ONDES PAR DECONVOLUTION

Le système linéaire (13) est alors sur-déterminé puisque \tilde{x} est de dimension MM' avec $M < L$ et $M' < L'$. Cette nécessité de sur-déterminer le système pour obtenir une solution pseudo-inverse stable en présence de bruit a été traitée différemment par Pratt et Davarian [8]. Ils posent en effet une hypothèse de régularité de la solution dans le domaine S_2-S_3 , ce qui permet de conserver la structure circulante de H , structure nécessaire pour calculer une solution pseudo-inverse par approximations circulantes. Cette nécessité disparaît dès lors que nous recherchons cette solution par itérations, d'autant que la structure de Toeplitz permet d'alléger les calculs de la méthode de Kaczmarz.

En effet, dans la région centrale de l'image $Y = \{y(k, \ell)\}$ définie par :

$$\begin{cases} N \leq k \leq L - N + 1 \\ N' \leq \ell \leq L' - N' + 1 \end{cases} \quad (15)$$

on passe de \tilde{h}_i à \tilde{h}_{i+1} par décalage des composantes. De plus, \tilde{h}_i comporte un nombre important de zéros et NN' composantes seulement de \tilde{x} sont modifiées par (8).

Posons :

$$\begin{aligned} \underline{h}^t &= [h(1,1), \dots, h(1, N'), h(2,1), \dots, h(N, N')] \quad (16) \\ \underline{\eta}_i^t &= [x(k-N, \ell-N'), \dots, x(k-N, \ell), \\ &\quad x(k-N-1, \ell-N'), \dots, x(k, \ell)] \quad (17) \end{aligned}$$

$\underline{\eta}_i$ est donc le vecteur formé à partir de x et ne contenant que les composantes modifiées par l'application f_i , sachant que $i = (k-1).L' + \ell$. En se plaçant dans les conditions (15), on peut alors écrire :

$$y_i = y(k, \ell) = \langle \underline{h}_i, \underline{x} \rangle = \langle \underline{h}, \underline{\eta}_i \rangle \quad (18)$$

et l'équation (8) devient :

$$\hat{\eta}_i = \hat{\eta}_i^0 - \lambda_i \cdot \varepsilon(i) \quad (19)$$

$$\text{avec : } \varepsilon(i) = y_i - \hat{y}_i = y(k, \ell) - \langle \underline{h}, \hat{\eta}_i^0 \rangle \quad (20)$$

$$\text{et } \lambda_i = \lambda = \frac{h^*}{\langle \underline{h}^*, \underline{h} \rangle} \quad (21)$$

Dans la partie centrale de l'image, le vecteur correction λ de dimension NN' est donc constant et peut être calculé au préalable car il ne dépend que de la fonction d'appareil.

Après le calcul de $\hat{\eta}_i$, la première composante $\hat{\eta}_i(1)$ ne sera plus modifiée avant l'itération suivante, c'est-à-dire le balayage suivant de l'image. Les composantes $\hat{\eta}_i(kN'+1)$ pour $k = 1, \dots, N$ doivent être sauvegardées jusqu'au calcul de $\hat{\eta}_{i+L'-N'+1}^0$. En effet, l'initialisation se fait de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{\eta}_{i+1}^0 = \phi \cdot \hat{\eta}_i + \psi \cdot \hat{\eta}_{i-L'+N'-1} + \Lambda_{i+1} \cdot \hat{x}^{j-1} \\ \hat{\eta}_0^0 = 0 \text{ et } \hat{x}^0 = \underline{0} \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{avec } \phi = \{\phi_{i,j}\} \begin{cases} \phi_{i,i+1} = 1 \text{ sauf pour } i = kN' \\ \text{ou } \phi_{i,i+1} = 0 \\ \phi_{i,j} = 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{et } \psi = \{\psi_{i,j}\} \begin{cases} \psi_{i,i+1} = 1 \text{ pour } i = kN' \\ \psi_{i,j} = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Λ_{i+1} est un opérateur linéaire qui initialise $\hat{\eta}_0^{i+1}(N.N')$ avec l'estimation $\hat{x}^{j-1}(k, \ell+1)$ réalisée à l'itération précédente.

Sur les bords de l'image, les vecteurs \underline{h} et $\underline{\eta}$ sont tronqués pour ne prendre en compte que les éléments de l'objet intervenant dans la convolution. Conséquemment, la quantité $\tilde{h}_i^* / \langle \tilde{h}_i^*, \tilde{h}_i \rangle$ intervenant dans (8) doit être calculée en chacun de ces points.

Cette méthode a été appliquée à des simulations. L'exemple présenté concerne la restauration d'une image de dimension 41×41 , résultat de la convolution d'un objet 31×31 par un noyau parallélepipedique 11×11 . La perte de résolution engendrée par un noyau dont l'étendue n'est pas négligeable devant les "détails" à observer apparaît clairement sur cet exemple.

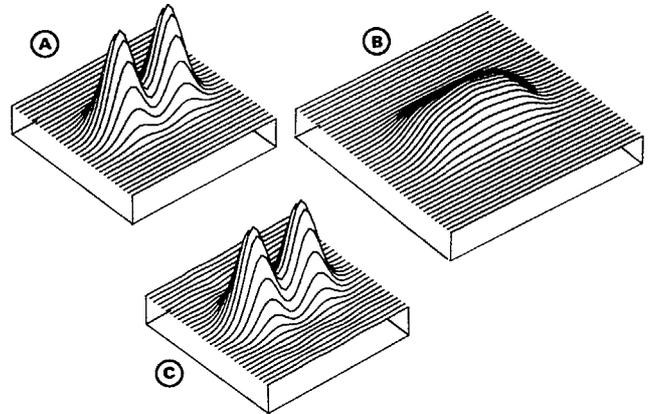


Figure 1 : Exemple de déconvolution par la méthode de Kaczmarcz

- (A) : Objet simulé
- (B) : Image
- (C) : Objet restauré : DQM = 1 %

La méthode converge vers une solution satisfaisante dont la distance quadratique moyenne (DQM) par rapport à l'objet simulé peut être amenée à moins de 1 %. Mais la convergence de l'algorithme est très lente : sur cet exemple, DQM inférieure à 5 % est obtenue au bout de 25 balayages de l'image. Cette lenteur de convergence s'explique par la forte dépendance linéaire qui existe entre les lignes de H . On passe en effet de \tilde{h}_i à \tilde{h}_{i+1} par simple décalage des composantes. Il s'agit là du compromis classique à réaliser entre un pas d'échantillonnage faible pour améliorer la résolution, et la détérioration du conditionnement de H qui en résulte [11].

III.3. Etude des possibilités d'accélération de la méthode

Le temps de calcul nécessaire pour effectuer une estimation étant disproportionné avec le temps de mesure, plusieurs voies ont été suivies pour diminuer le volume global des calculs.

Il s'agit tout d'abord d'accélérer la convergence de la méthode. On sait que la procédure de Kaczmarcz converge en une seule itération si les lignes de H sont orthogonales [10]. L'idée est donc de diminuer la dépendance linéaire entre les lignes de H , suivant une procédure voisine de celle de Mc Comick [14], en balayant les lignes de l'image alternativement de gauche à droite et de droite à gauche, ce qui revient à permuter des lignes de H . De même, une rotation de 90° de l'image entre deux itérations équivaut à balayer l'image successivement par lignes et par colonnes, donc à



QUELQUES PROBLEMES LIES A L'AMELIORATION DE LA RESOLUTION D'UN SYSTEME
DE TOMOGRAPHIE A MICRO-ONDES PAR DECONVOLUTION

modifier également l'ordre de traitement des équations de (2), c'est-à-dire à permuter des lignes de H.

Ensuite, le volume des calculs à chaque itération peut être diminué en prenant λ_i constant dans (16) pour tous les points de l'image, ce qui revient à négliger les effets de bord. Le noyau normé $\lambda = \frac{h^*}{\langle h^*, h \rangle}$ pouvant être calculé au préalable, les calculs en chaque point image se réduisent à :

$$- \text{déterminer l'image estimée } \hat{y}_i = \langle h, \hat{n}_i \rangle \quad (24)$$

$$- \text{corriger le vecteur estimé } \hat{n}_i = \hat{n}_i^0 - \lambda \cdot (y_i - \hat{y}_i) \quad (25)$$

soit 2.NN' multiplications et (NN'+1) additions.

Enfin, l'influence du bruit a été négligée dans la présentation de la procédure de Kaczmarcz. Il est bien connu [12] qu'en présence de bruit, (16) doit être modifiée par l'introduction d'un coefficient de relaxation qui permet d'assurer la convergence. L'écriture de (19) devient alors voisine de celle de l'approximation stochastique [13] :

$$\hat{n}_i = \hat{n}_i^0 - \mu \lambda \cdot \varepsilon(i) \quad (26)$$

où μ est un scalaire appartenant à]0,2[d'autant plus petit que le rapport signal/bruit est faible [12].

Les résultats fournis par cette méthode montrent une nette accélération de la convergence. Sur le même exemple que précédemment, une DQM inférieure à 5 % est atteinte en 7 itérations. D'autre part, la solution rendue sous-optimale par le choix de λ constant diffère peu de la solution inverse généralisée, même pour des dimensions du noyau non négligeables devant celles de l'image. Enfin, l'introduction du coefficient de relaxation permet d'obtenir une bonne convergence en présence de bruit.

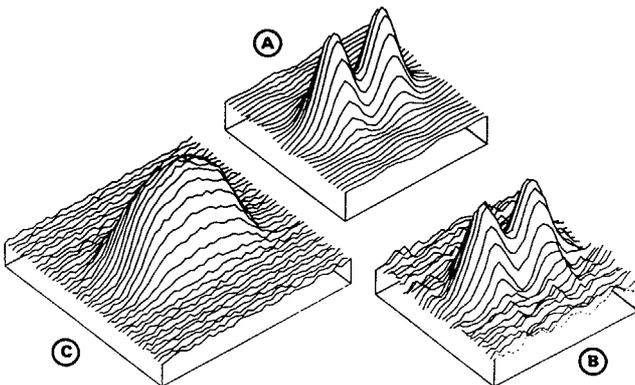


Figure 2 : Exemple de déconvolution par une méthode sous-optimale rapide. (A) Objet restauré : DQM = 1 % (B) Objet restauré en présence d'un bruit uniforme (amplitude égale à 10 % de l'amplitude maximale de l'image) (C) DQM = 5 %

III.4. Difficultés résiduelles

Il subsiste malgré tout une difficulté importante que ces techniques d'accélération ne résolvent pas. C'est la divergence de la méthode lorsque le noyau de convolution est d'intégrale nulle. Ceci est par exemple le cas de la partie imaginaire du noyau lorsque l'image de l'objet est reconstruite à partir d'une seule vue. Le problème est indéterminé, ce qui n'est pas grave en soi car on impose les conditions

initiales \hat{x}^0 , mais on observe une divergence importante de la méthode traduisant probablement une instabilité numérique. Un problème analogue a été rencontré dans le cas monodimensionnel [18] ; il a été résolu par une extension statistique de l'approche.

III.5. Conclusions sur l'approche déterministe

La méthode itérative précédente permet donc de restaurer de façon satisfaisante des images déformées par un appareil linéaire. Mais, même si le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour un balayage est relativement faible, sa convergence lente conduit à des temps de calcul incompatibles avec une instrumentation voulue légère et rapide. La convergence en une seule itération nécessite l'orthogonalisation quasi-complète des lignes de H. Celle-ci peut être obtenue en sphérisant l'espace des observations, ce qui revient à passer à une méthode du deuxième ordre. Mais l'impossibilité de déterminer l'opérateur de sphérisation optimal dans un cadre déterministe [18] et les difficultés de convergence évoquées au § III.4 nous ont conduits à explorer une extension stochastique du problème de restauration d'images.

IV. EXTENSION STATISTIQUE

Le problème est d'accélérer la convergence de cette méthode récursive de restauration, mais le manque d'ordonnement naturel de l'image rend l'utilisation de techniques de quasi-orthogonalisation [7] délicate. L'information a priori jouant un rôle essentiel dans ces problèmes mal-posés, et les difficultés venant pour une grande part du bruit de mesure, il est naturel de se placer dans un cadre bayésien et de considérer x et b comme des réalisations de processus aléatoires. L'information a priori doit donc porter sur leurs lois de probabilité (en fait on se limite à l'ordre deux), le problème de la restauration devient alors un problème d'estimation et, avec nos hypothèses, la solution optimale est fournie par l'estimateur linéaire à variance minimale.

Le problème devient bien-posé, ce qui lève les difficultés liées aux solutions pseudo-inverses (cf. § III.2), mais il faut encore résoudre les problèmes de volume de calcul et d'encombrement mémoire que cette solution entraîne. Deux types d'approche sont possibles. Soit exploiter la structure particulière de la matrice de covariance des observations pour introduire des approximations circulantes ou circulantes par blocs et résoudre en utilisant des algorithmes rapides type FFT (Hunt [3],[4], Wood [5], Pratt [8]). Soit traiter récursivement les données. C'est cette dernière approche que nous avons choisie.

Dans le cas des signaux monodimensionnels, ce problème du calcul récursif de la solution a été résolu en utilisant le filtre de Kalman, mais son extension au cas bidimensionnel soulève des difficultés. Si l'on se contente de prendre comme vecteur d'état l'objet tout entier, les dimensions des matrices de covariance à stocker et à réajuster sont très importantes. Si l'on réduit les dimensions du vecteur d'état, on y introduit des hypothèses de semi-causalité et de séparabilité de covariance qui font perdre dès le départ l'optimalité de la solution (Woods [15],[16], Murphy [17]).

C'est pourquoi nous avons utilisé un algorithme rapide réduisant notablement le volume des calculs et de la mémoire, ce qui permet de conserver un modèle sans dynamique d'état pour des dimensions d'images déjà importantes, quitte à introduire ensuite des solutions sous-optimales.



IV.1. Restauration à variance minimale

Dans le modèle choisi, l'état est pris constant et égal à l'objet. La dynamique est introduite dans la seule équation d'observation. Le modèle obtenu n'est pas invariant dans le temps, mais il est cependant possible de réduire le volume des calculs et de la mémoire nécessaires pour mettre en oeuvre le filtre de Kalman en remplaçant l'équation de Riccati utilisée pour corriger la matrice de covariance d'erreur par une équation du type Chandrasekhar [18].

Les équations du modèle s'écrivent :

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i = \underline{x} \quad (27)$$

$$y_i = \underline{h}_i^t \cdot \underline{x} + b_i \quad (28)$$

l'estimation de x se fait suivant l'algorithme décrit en détail dans (18) :

$$\hat{\underline{x}}^{i+1} = \hat{\underline{x}}^i + \underline{K}_i (y_i - \underline{h}_i^t \cdot \hat{\underline{x}}^i) \quad (29)$$

$$\underline{K}_{i+1} = \underline{D}_i^t \cdot \underline{K}_i + \underline{dZ}_i \quad (30)$$

$$\underline{d} = \underline{cM}_i \quad (31)$$

$$\underline{c} = \underline{h}_{i+1}^t \cdot \underline{Z}_i \quad (32)$$

$$\underline{Z}_{i+1} = \underline{Z}_i - \underline{c} (\underline{r}_{i+1}^e)^{-1} \cdot \underline{K}_{i+1} \quad (33)$$

$$\underline{r}_{i+1}^e = \underline{r}_i^e + \underline{c} \underline{d} \quad (34)$$

$$\underline{M}_{i+1} = \underline{M}_i + \underline{d}^2 (\underline{r}_{i+1}^e)^{-1} \quad (35)$$

avec, dans le cas d'hypothèses de stationnarité du bruit et de stationnarité des moments d'ordre 2 de l'objet, les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{K}_0 &= \pi_0 \underline{h}_0 \quad \text{où } \pi_0 = E\{\underline{x} \cdot \underline{x}^t\} \\ \underline{r}_0^e &= \underline{h}_0^t \cdot \pi_0 \cdot \underline{h}_0 + \underline{r} \quad \text{où } \underline{r} \delta_{ij} = E\{b_i b_j\} \\ \underline{Y}_0 &= \underline{K}_0 \\ \underline{M}_0 &= -(\underline{r}_0^e)^{-1} \end{aligned} \quad (36)$$

\underline{D}_i intervenant dans (30) est un opérateur orthogonal traduisant l'invariance du noyau de (1) et permettant de passer de \underline{h}_i à \underline{h}_{i+1} :

$$\underline{h}_{i+1} = \underline{D}_i^t \cdot \underline{h}_i \quad \text{avec } \underline{D}_i^{-1} = \underline{D}_i^t \quad (37)$$

\underline{D}_i va donc dépendre du mode de balayage de l'image. Par exemple pour un balayage ligne par ligne de gauche à droite, l'objet étant défini dans le domaine S_2 , \underline{D}_i est constant tout au long d'une ligne :

$$\underline{D}_i = \underline{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

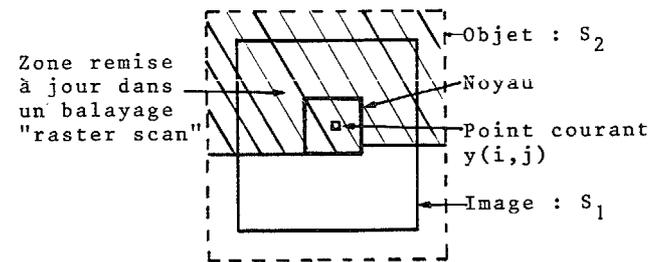
Au passage d'une ligne de l'image à la suivante, \underline{D}_i est égal à $\underline{D}_2 = \underline{D}_1^N$.

Comme dans l'approche déterministe, le problème des bords se pose encore ici. Le développement précédent suppose en effet que (37) est vérifié. Le domaine de définition de l'objet doit donc être étendu à

S_2 . L'information a priori sur le domaine S_2 - S_3 doit être traduite par le choix de la matrice de covariance initiale π_0 et le choix de $\underline{x}_0 = E\{x\}$. S'il est certain que $x(i,j) = 0$ dans S_2 - S_3 , alors les termes de π_0 correspondant aux éléments de S_2 - S_3 sont pris nuls. Si l'objet est stationnaire, une structure de Toeplitz est donnée à π_0 . S'il n'y a pas de connaissance a priori et si l'objet débordé S_2 , alors π_0 est prise égale à I.

IV.2. Problèmes de mise en oeuvre de la solution optimale

La dimension de la zone de l'objet remise à jour augmente à chaque itération comme le montre le schéma suivant :



Malgré l'emploi de l'algorithme rapide qui ne nécessite pas le calcul explicite de la matrice de covariance de l'erreur, les calculs demeurent lourds pour corriger un nombre de plus en plus grand de composantes du vecteur d'état.

Cependant, si les statistiques de $\{x_i\}$ et de $\{b_i\}$ sont stationnaires, la correction apportée au vecteur gain : $\underline{d} \cdot \underline{Z}_i$ devient rapidement négligeable, sauf aux sauts de lignes image. L'évolution du vecteur présente l'allure caractéristique de la figure 3.

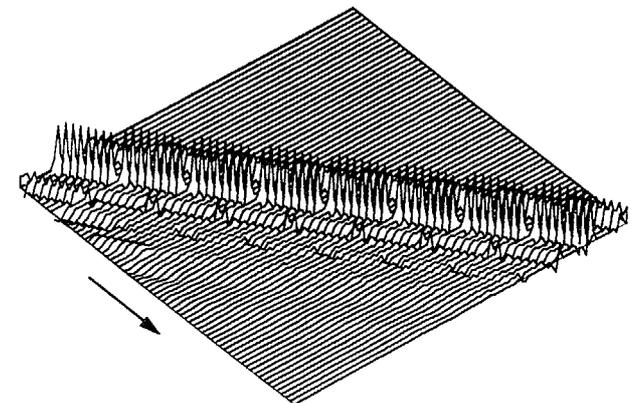


Figure 3 : Evolution du vecteur gain lors du balayage d'une image ligne par ligne

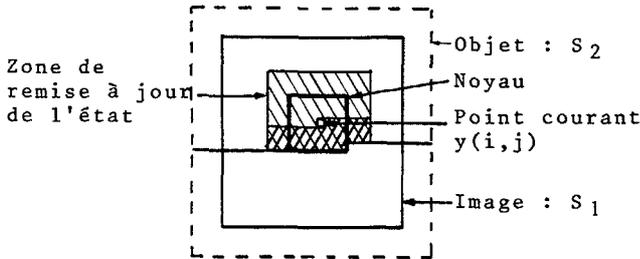
Ceci incite donc à développer une méthode sous-optimale rapide tirant parti de cette propriété.

IV.3. Méthode sous-optimale rapide

Cette méthode, qui est actuellement en cours de développement, revient à considérer que l'objet restauré est une partie d'un objet de plus grande étendue et que l'hypothèse $\underline{d} \cdot \underline{Z}_i \equiv 0$ est justifiée. Elle consiste à effectuer une remise à jour réduite de l'objet dans une fenêtre située autour du point courant, avec un vecteur gain constant dans cette fenêtre et calculé avec un algorithme rapide (Reduced Update Fast Kalman Estimator). La région remise à jour est de dimensions au moins égales à celles du noyau et on voit que l'association :

- (i) modèle à état sans dynamique artificielle
- (ii) filtre à remise à jour réduite

conduit à une méthode sous-optimale différente des méthodes existantes, et ne présentant pas cette semi-causalité choquante. Le schéma suivant met en évidence (doubles hachures) la zone de l'objet modifiée par la méthode proposée et qui ne l'est pas dans la méthode voisine de S.Woods [5].



IV.4. Retour sur la méthode déterministe

Remarquons tout d'abord que, avec les hypothèses du § IV.3, (29) prend pour la méthode sous-optimale une forme analogue à (26), avec $K_i = \mu \cdot \lambda$. Ensuite, on peut observer que cette extension stochastique permet d'expliquer les difficultés rencontrées dans l'approche déterministe, tout comme dans le cas mono-dimensionnel [18]. En effet, pour une itération décrite par (8), on peut calculer la loi d'évolution de l'erreur moyenne quadratique :

$$emq_{i+1} = emq_i - (\underline{h}_i^t \cdot \underline{h}_i)^{-1} \left[(2-\mu) \underline{u}_i^t P_i \underline{h}_i - \mu^2 \sigma_b^2 \right]$$

où P_i est la matrice de covariance de l'erreur. Dans le cas réel où $\sigma_b^2 \neq 0$, le choix de $\mu < 1$ permet de réduire l'influence néfaste du terme σ_b^2 , et donc d'assurer la convergence, mais au prix d'un grand nombre de balayages de l'image. Cette méthode serait optimale si :

$$\underline{h}_i (\underline{h}_i^t \cdot \underline{h}_i)^{-1} = P_i \underline{h}_i (r_i^e)^{-1}$$

c'est-à-dire si les lignes de H étaient vecteurs propres de la matrice de covariance d'erreur. Cette condition est vérifiée si $P_i = \alpha \cdot I$, mais en général cette approximation est loin d'être vérifiée et la méthode déterministe est nettement sous-optimale.

V. CONCLUSIONS

L'extension statistique du problème de la restauration d'images permet de comprendre les difficultés rencontrées dans l'approche déterministe. En particulier, il apparaît clairement que cette méthode itérative ne peut approcher l'optimum que pour un noyau causal et "mince". Ceci explique qu'il soit plus difficile d'accélérer cette procédure dans le cas bi-dimensionnel que dans le cas mono-dimensionnel [7]. Ensuite, le vice fondamental de la solution pseudo-inverse dans le cas des noyaux à intégrale nulle semble devoir s'expliquer par l'indétermination du problème dans ce cas, indétermination que le bruit a tôt fait de transformer en instabilité.

L'utilisation du filtre de Kalman en restauration d'images n'est pas nouvelle. Mais l'approche proposée se distingue par la possibilité d'obtenir une solution optimale grâce à l'absence des hypothèses usuelles de semi-causalité. La mise en oeuvre d'un algorithme rapide permet de restaurer des images de dimensions déjà importantes. De plus, la dérivation

d'une méthode sous-optimale se fait naturellement et permet de retrouver la simplicité de mise en oeuvre de la méthode déterministe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOLOMEY J.C., IZADNEGADHAR A., JOFFRE L., PICHOT C., PERONNET G. "Microwave diffraction tomography for biomedical applications". IEEE Trans., MTT-30 : 1998-2000, (1982)
- [2] ADAMS M.F., ANDERSON A.P. "Tomography from multi-view ultrasonic diffraction data : comparison with image reconstruction from projections". in Proc. 10th Int.Symp. on Acoustical Imaging, Cannes, (1980)
- [3] HUNT B.P. "Bayesian methods in digital image restoration". IEEE Trans., C-26 : 219-229, (1977)
- [4] ANDREWS H.C., HUNT B.R. "Digital image restoration" Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, (1977)
- [5] WOOD S.L. et coll. "Reconstruction with limited data using estimation theory", in Computer aided tomography and ultrasonics in medicine, J.Raviv, J.F.Greenleaf & G.T.Herman ed., North-Holland, (1979)
- [6] ICHIOKA Y. et coll. "Iterative image restoration by a method of steepest descent". J.Optics, vol.12: 35-41, (1981)
- [7] DEMOMENT G., SAINT-FELIX D. "Déconvolution discrète en temps réel". 8ème Colloque GRETSI, Nice, 275-281 (1981)
- [8] PRATT W.K., DAVARIAN F. "Fast computational techniques for pseudo-inverse and Wiener image restoration". IEEE Trans., C-26 : 571-580, (1977)
- [9] KACZMARZ S. "Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen". Bull.Acad.Polon.Sc.Lettres, A:355-357, (1937)
- [10] TANABE K. "Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications" Numer.Math. 17:203-214, (1971)
- [11] DEMOMENT G., SAINT-FELIX D., POSCA L.C. "Traitement par déconvolution des signaux délivrés par un appareillage médical". Inov.Tech.Biol.Med., vol.3:287-303, (1982)
- [12] HO Y.C. "On the stochastic approximation method and optimal filtering theory". J.Math.Anal.Appl., vol.6: 152-154, (1962)
- [13] TSYPKIN Y.Z. "Adaptation and learning in automatic systems" New-York, Academic Press, (1971)
- [14] Mc CORMICK S.F. "The method of Kaczmarz and row orthogonalization for solving linear equations and least squares problems in Hilbert space". Indiana Univ.Math.J., 26:1137-1150, (1977)
- [15] WOODS J.W., RADEWAN C.M. "Kalman filtering in two-dimensions". IEEE Trans., IT-23 : 473-482, (1977)
- [16] WOODS J.W. "Correction to "Kalman filtering in two-dimensions"". IEEE Trans., IT-25 : 628-629, (1979)
- [17] MURPHY M.S. "Comments on "Recursive filtering algorithm for a two-dimensional system"". IEEE Trans., AC-25 : 336-337, (1980)
- [18] DEMOMENT G., REYNAUD R., SEGALAN A. "Estimation sous-optimale rapide pour la déconvolution en temps réel". 9ème Colloque GRETSI, Nice, (1983)
- [19] BROOKS R.A., DI CHIRO G. "Principles of computer assisted tomography in radiographic and radioisotopic imaging". Phys.Med.Biol., vol.21 : 689-732, (1976)
- [20] WOODS J.W., INGLE V.K. "Kalman filtering in two dimensions : further results". IEEE Trans., ASSP-29 : 188-197, (1981).

