

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

449



NICE du 16 au 20 MAI 1983

---

EGALISEUR A SUR-ECHANTILLONNAGE ET RECEPTEUR OPTIMAL.

Ghassan KAWAS-KALEH

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS, DEPARTEMENT SYSTEMES ET COMMUNICATIONS  
46 RUE BARRAULT - 75634 PARIS CEDEX 13

---

## RESUME

Nous proposons ici une nouvelle structure optimale pour le récepteur d'une suite de symboles en présence de bruit et d'interférence entre symboles (IES). Dans ce récepteur l'élimination de l'IES est assurée par un filtre qui joue également le rôle du filtre adapté, et la détection est effectuée par un organe de décision utilisant l'algorithme de Viterbi. Un schéma de réalisation pratique sous la forme connue de l'égaliseur à sur-échantillonnage est ensuite présenté. Ce récepteur éclaire le problème de l'utilisation de l'algorithme de Viterbi dans les modems et celui de sa simplification. Nous présentons également une méthode pour réaliser l'égaliseur à sur-échantillonnage dans le domaine fréquentiel afin d'éviter le phénomène de saturation de ses coefficients.

## SUMMARY

We propose a new structure for the optimal reception, in the presence of intersymbol interference and noise, of carrier-modulated data sequence. The receiver is composed of a linear filter, whose sampled output is a sufficient statistics containing no intersymbol interference, and of a sequence detector which may use the Viterbi algorithm. We also indicate how to implement a sub-optimal practical version of this receiver in the form of the known fractionally-spaced equalizer. Our approach clarifies the problem of using the Viterbi algorithm for equalization and that of its simplification. We finally give a method for the stable adaptation of the fractionally-spaced equalizer by designing a frequency sampling filter to approximate the optimal one.



## I. INTRODUCTION.

Nous étudions dans cet article la réception d'une suite de symboles de données en présence de bruit et d'interférence entre symboles (IES). Nous déduisons une nouvelle structure de récepteur optimal qui minimise la probabilité de décider en faveur d'une suite différente de la suite émise. Ce récepteur est composé d'un filtre que nous appelons FILTRE ADAPTE EGALISEUR (FAE) et d'un détecteur de suite qui peut utiliser l'algorithme de Viterbi (AV). Par rapport aux récepteurs optimaux de Forney [FOR72] et de Ungerboeck [UNG74], notre récepteur dissocie clairement la fonction d'égalisation, assurée par le FAE, de celle de la détection en présence de bruit prise en charge par l'AV. Il nous permet ainsi de préciser quand et comment on peut réduire la complexité de l'AV et comment la simplification peut conduire à un simple détecteur à seuil symbole par symbole.

Nous étudions également l'implantation de ce récepteur. Outre la simplification de l'AV que nous venons de signaler, nous montrons comment réaliser le FAE optimal sous forme d'égaliseur à sur-échantillonnage. Nous donnons également une méthode pour une adaptation stable des coefficients de l'égaliseur qui consiste à le réaliser dans le domaine fréquentiel.

Le modèle traité est présenté dans le §2. Des notions utiles pour la description de l'espace des signaux en bande de base sont définies au §3. Nous déduisons ensuite au §4 le récepteur optimal. Le §5 donne un schéma simple pour une réalisation approximative du récepteur optimal. Nous discutons ensuite dans le §6 la nécessité de l'AV dans les modems. Le phénomène de saturation des coefficients de l'égaliseur est finalement traité au §7.

Dans la suite tout signal temporel  $x(t)$  est noté en minuscule, et sa transformée de Fourier  $X(f)$  en majuscule. La transformée de Fourier de sa version échantillonnée est notée  $X^*(f)$ .  $\bar{x}$  désigne le conjugué complexe de  $x$ . Dans certains cas, un signal passe bande associé à un signal complexe en bande de base  $s(t)$  est noté  $\tilde{s}(t)$ ; i.e.  $\tilde{s}(t) = \text{Re}\{s(t)\exp(j2\pi f_0 t)\}$ . Les lettres  $i, j, k, l, m$  et  $n$  désignent des entiers positifs ou négatifs.  $\check{X}$  désigne le vecteur  $(x_0, x_1, \dots, x_{K-1})^t$  où  $t$  signifie transposé. L'égalité par définition est notée  $\hat{=}$ .

## II. MODELISATION.

Nous traitons le cas général de modulation numérique à deux dimensions et celui de la transmission dans un canal de bande limitée à une largeur  $(-B, B)$  en bande de base, où

$$1/2T \leq B \text{ et } B \leq 1/T$$

$T$  étant l'intervalle de temps entre deux symboles consécutifs. La deuxième condition ne restreint pas la généralité de la conclusion de l'article mais sert à illustrer le cas intéressant de communication dans une bande étroite. La Fig.1 montre le modèle d'une partie d'une chaîne de transmission.

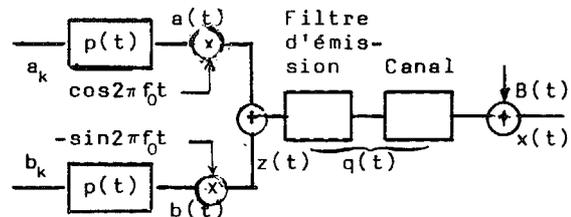


Fig.1.Émetteur et canal de communications numériques.

Dans la Fig.1 le signal modulé  $\tilde{z}(t)$  est constitué de deux composantes en quadrature  $a(t)$  et  $b(t)$  véhiculant deux informations distinctes: Des symboles discrets réels  $a_k$  et  $b_k$  émis simultanément aux instants  $kT$  sous forme d'impulsions respectives  $a_k p(t-kT)$  et  $b_k p(t-kT)$ ;  $k=0, 1, \dots, K-1$ . Le filtre d'émission à la sortie du modulateur met en forme le spectre du signal émis et le limite à une bande de largeur  $2B$  autour de la fréquence porteuse  $f_0$ , où  $B \leq f_0$ . Le canal de transmission est également limité à cette bande et constitue avec le filtre d'émission un filtre global passe-bande modélisé par une réponse impulsionnelle  $q(t)$ . On peut écrire:

$$(1) \tilde{z}(t) = \text{Re} \{ z(t) e^{j2\pi f_0 t} \}$$

$$(2) z(t) = \sum_{k=0}^{K-1} d_k p(t-kT)$$

$$(3) d_k \hat{=} a_k + j b_k$$

où  $d_k$  est un symbole complexe qui appartient à un alphabet de  $L$  éléments discrets d'un espace à deux dimensions. Les  $d_k$  sont supposés équiprobables. A la sortie du canal, le signal  $\tilde{s}_i(t)$  s'écrit:

$$(4) \tilde{s}_i(t) = \text{Re} \{ s(t) e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} \}$$

$$(5) \theta \hat{=} \arg \{ Q(f_0) \}$$

où  $s(t)\exp(j\theta)$  est le signal complexe en bande de base associé à  $\tilde{s}(t)$ . On sait [PAP77] que le filtrage opéré par  $q(t)$  est équivalent en bande de base à l'opération:

$$(6) S(f)\exp(j\theta) = Z(f) \cdot Q'(f+f_0)$$

où

$$(7) Q'(f) \hat{=} \begin{cases} Q(f) & ; f > 0 \\ 0 & ; f < 0 \end{cases}$$

En appelant:

$$(8) H(f) \hat{=} P(f) Q'(f+f_0) \exp(-j\theta)$$

le canal global équivalent en bande de base, on trouve d'après (2), (4) et (6)

(9a)  $\tilde{s}_i(t) = \text{Re}\{s_i(t) \exp(j2\pi f_0 t + j\theta)\}$   
 (9b)  $s_i(t) = \sum_{k=0}^{K-1} d_k^i h(t-kT)$  ;  $i \in \{1, 2, \dots, L^K\}$

La prise en compte du déphasage  $\theta$  de la porteuse de référence  $f_0$  dû à son passage à travers  $q(t)$  permet d'avoir  $\arg\{H(0)\} = 0$

Cependant  $H(f)$  n'est en général pas de symétrie hermitienne ; nous considérons donc le cas général où  $h(t)$  est complexe. Précisons également d'après (8) que  $H(f)$  est de bande limitée à  $(-B, B)$ . Par conséquent  $h(t)$  est de support supérieur à  $T$  et produit donc del'IES.

Dans (9)  $I$  est une variable aléatoire dont la réalisation  $i$  signifie l'émission d'une suite  $d_0, d_1, \dots, d_{K-1}$  parmi les  $L^K$  suites possibles. Nous supposons que l'application effectuée par le canal  $h(t)$  est biunivoque et que  $h(t)$  est de carré-intégrable.

A la réception on dispose de l'observation :

(10)  $x(t) = \tilde{s}_i(t) + w(t)$

où  $w(t)$  est un bruit gaussien, centré, stationnaire et de densité spectrale de puissance  $(DSP)N_0/2$  dans la bande du signal  $\tilde{s}_i(t)$ .  $\tilde{s}_i(t)$  étant de bande limitée permet, sans modifier le problème, d'introduire l'hypothèse fort commode de bruit blanc et de supposer que la DSP de  $w(t)$  est égale à  $N_0/2$  pour tout  $f$ .

III. DEFINITIONS.

Soit  $E$  un sous-espace de  $L^2$  engendré par une base  $H \triangleq \{h(t-kT); k=0, 1, \dots, K-1\}$ . Les signaux  $s_i(t)$  donnés par (9b) appartiennent à  $E$ . Tout élément de  $E$  est de bande limitée à  $(-B, B)$ .

DEFINITION 1: Une base  $H' \triangleq \{h'(t-kT); k=0, 1, \dots, K-1\}$  pour  $E$  est appelée base égalisante de  $h(t)$  si :

(11)  $\int h(t-iT) \bar{h}'(t-jT) dt = g_0$  ;  $i=j$   
 $= 0$  ;  $i \neq j$   
 $i$  et  $j = 0, 1, \dots, K-1$

où  $g_0$  est un réel positif.

Relativement à cette base  $s_i(t)$  s'écrit :

(12a)  $s_i(t) = \sum_{k=0}^{K-1} d_k^i h'(t-kT)$   
 (12b)  $\tilde{s}_i(t) = \text{Re}\{\sum_{k=0}^{K-1} d_k^i h'(t-kT) \exp(j2\pi f_0 t + j\theta)\}$

En utilisant (11) et alternativement (12a) et (9b) on trouve

(13)  $d_k^i = (1/g_0) \int s_i(t) \bar{h}'(t-kT) dt$   
 (14)  $d_k^i = (1/g_0) \int s_i(t) h'(t-kT) dt$

DEFINITION 2: Un filtre de Nyquist est un filtre linéaire et invariant qui résulte de la mise en cascade de  $h(t)$  et  $\bar{h}'(-t)$ ; voir Fig.2. Sa réponse impulsionnelle est :

(15)  $g(t) = \int h(u) \bar{h}'(u-t) du$   
 i.e.  
 (16)  $G(f) = H(f) \bar{H}'(f)$  ;  $f \in (-B, B)$   
 $= 0$  ; ailleurs

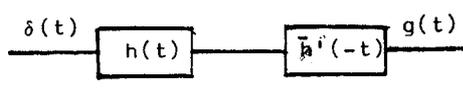


Fig.2. Filtre de Nyquist.

En effet, (11) et (15) donnent :

(17)  $g(kT) = g$  ;  $k=0$   
 $= 0$  ;  $k \neq 0$

Notons la parenté entre la notion de noyaux réciproques [FRA69, formule (4.7)], dont la mise en cascade est équivalente à l'opérateur  $\delta(t)$ , et l'opération (15) que nous destinons à une réalisation physique en remplaçant  $\delta(t)$  par  $g(t)$ . Malgré cette modification, la base égalisante  $H'$  introduite dans ce paragraphe garde son utilité comme base réciproque de la base  $H$ .

IV. RECEPTEUR OPTIMAL

IV.1. FILTRE ADAPTE EGALISEUR.

La détection optimale cohérente de  $s_i(t)$  à partir de l'observation (10), l'optimalité étant définie au sens du minimum de la probabilité de détecter une suite  $d_k$  différente de la suite émise, s'effectue par l'obtention du résumé exhaustif contenu dans le produit scalaire :

$\int x(t) \tilde{s}_i(t) dt$

En donnant à  $\tilde{s}_i(t)$  sa valeur de (12b) on trouve :

(18)  $\int x(t) \tilde{s}_i(t) dt = 0.5 \text{Re} \sum_{k=0}^{K-1} \bar{d}_k^i y_k$

(19)  $y_k \triangleq \int x(t) 2 \exp(-j2\pi f_0 t - j\theta) \cdot \bar{h}'(t-kT) dt$  ;  
 $k=0, 1, \dots, K-1$

est une suite qui dépend de l'observation et représente un résumé exhaustif pour la détection de la suite  $d_k; k=0, 1, \dots, K-1$ . Elle est obtenue, d'après (19) et comme le montre Fig.3, par une démodulation cohérente de  $x(t)$  suivie d'un filtre  $c(t)$  et d'un échantillonneur actionné aux instants  $kT$ , avec :

(20)  $c(t) \triangleq \bar{h}'(-t)$

i.e., d'après (16)

(21)  $C(f) = \begin{cases} G(f)/H(f) & ; f \in (-B, B) \\ 0 & ; \text{ailleurs.} \end{cases}$

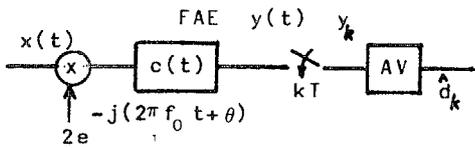


Fig.3. Récepteur optimal.

La sortie de c(t) s'écrit:

$$y(t) = \int x(p) 2 \exp(-j2\pi f_0 p - j\theta) \bar{h}'(p-t) dp$$

$$(22) \quad = u(t) + v(t)$$

où d'après (10)

$$(23) \quad u(t) \hat{=} \int s(p) 2 \exp(-j2\pi f_0 p - j\theta) \bar{h}'(p-t) dp$$

$$(24) \quad v(t) \hat{=} \int w(p) 2 \exp(-j2\pi f_0 p - j\theta) \bar{h}'(p-t) dp$$

En utilisant (9) dans (23) on trouve

$$u(t) = \sum_k d_k^i h(p-kT) \bar{h}'(p-t) dp$$

$$+ \sum_k \int \bar{d}_k \bar{h}(p-kT) \exp(-2j\pi f_0 p - 2j\theta) \bar{h}'(p-t) dp$$

Le deuxième terme est nul car  $B < f_0$ . On obtient

$$(25) \quad u(t) = \sum_k d_k^i g(t-kT)$$

à cause de (15). (19) devient alors:

$$(26) \quad y_k = g_0 d_k^i + v_k$$

car  $g(t)$  vérifie (17);  $v_k \hat{=} v(kT)$ .

Nous appelons le filtre  $c(t)$  FILTRE ADAPTE EGALISUR (FAE): Adapté car il fournit le résumé exhaustif, et égaliseur car, comme le montre (26), les  $y_k$  sont complètement dégagés de l'IES.

IV.2. ORGANE DE DECISION.

Le traitement optimal qui fournit les  $y_k$  est poursuivi par un organe de décision qui doit décider sur la suite  $d_k$  en prenant en compte le fait que les bruits  $v_k$  sont corrélés. En effet, la fonction d'autocorrélation et la DSP de  $v(t)$  sont:

$$(27) \quad R_v(t) = E \{v(u) \bar{v}(u-t)\}$$

$$= 2 N_0 \int c(p) \bar{c}(p-t) dp$$

$$(28) \quad S_v(f) = 2 N_0 |C(f)|^2$$

$$= 2 N_0 |G(f)/H(f)|^2$$

Sous forme vectorielle (26) s'écrit

$$(29) \quad Y = g_0 D_i + V$$

Le détecteur optimal décide en faveur de la suite  $D_i$  qui maximise la densité de probabilité conditionnelle  $p(\text{Re}Y, \text{Im}Y | I=i)$ , ou minimise la fonction:

$$(30) \quad Q_i \hat{=} (\bar{Y} - \bar{D}_i)^t F (Y - D_i)$$

où

$$(31) \quad F^{-1} = E \{V \bar{V}^t\}$$

La recherche de la suite qui minimise (30) peut s'effectuer au moyen de l'AV si on introduit, comme [FOR72], l'hypothèse que  $h(t)$  s'annule pour  $t > MT$  et qu'en conséquence selon (28) et (31) les éléments  $(i,j)$  de la matrice  $F$ , appelés dans (32)  $f_{i-j}$ , s'annulent pour  $i-j > M$ . (27) peut alors se mettre sous la forme:

$$(32) \quad Q_i = \text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{K-1} (\bar{y}_n - \bar{d}_n^i) \left[ f_0 (y_n - d_n^i) + 2 \sum_{j=1}^M f_j d_{n-j}^i \right] \right\}$$

Le nombre d'états associés à l'algorithme est  $L^M$ . La complexité de l'algorithme peut être réduite en réduisant arbitrairement  $M$ . Pour  $M=0$ , l'algorithme prend la forme d'un simple détecteur à seuil symbole par symbole. La perte d'optimalité qui en résulte dépend du degré de l'approximation.

Dans le cas particulier où la base  $H$  est orthogonale, on a  $H^* = H$ ,  $c(t) = \bar{h}(-t)$  et  $R_v(t) = 2N_0 g(t)$ . Les  $v_k$  sont donc non corrélés et l'organe de décision prend alors la forme d'un simple détecteur symbole par symbole.

Il est utile de situer le récepteur optimal que l'on vient de déduire par rapport au récepteur de [KOB71]. En "linéarisant" la stratégie du récepteur optimal, [KOB71] fournit la suite  $y_k$  sans préciser qu'elle est résumé exhaustif. Cependant cette suite est obtenue au moyen d'un récepteur différent du notre; voir Fig.4. Dans ce récepteur, la sortie d'un filtre adapté au canal est échantillonnée aux instants  $kT$  et le canal total échantillonné, i.e.  $\{H(f)\bar{H}(f)\}^*$  est alors inversé aux moyen d'un égaliseur synchrone:

$$W^*(f) = 1 / \{|H(f)|^2\}^*$$

Le récepteur présenté dans cet article diffère par le fait que l'ensemble, filtre adapté et égaliseur synchrone, sont contenus dans un seul filtre  $C(f)$ . Cette particularité présente des avantages que l'on évoquera dans la suite.

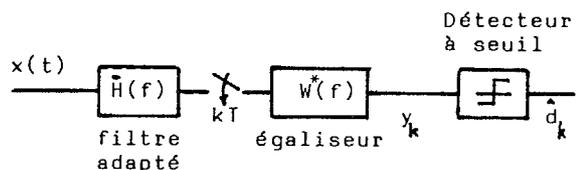


Fig.4. Récepteur de [KOB71].

**V. IMPLANTATION DU RECEPTEUR OPTIMAL, L'EGALISEUR A SUR-ECHANTILLONNAGE.**

Afin de réaliser le récepteur optimal déduit dans le paragraphe précédent, deux simplifications s'imposent :

1. En ignorant la corrélation du bruit à la sortie de l'échantillonneur, un simple détecteur à seuil effectuant des décisions symbole par symbole peut remplacer le détecteur de suite optimal. La perte d'optimalité qui en résulte est faible si le bruit est peu corrélé (c'est le cas lorsque le spectre du FAE ne présente pas de pics ou de vallées) ou si le rapport signal à bruit est bon (c'est le cas de la transmission sur câble).
2. Le FAE est implanté sous forme d'un filtre discret, qui permet de l'adapter au canal inconnu et variable, et non récursif afin d'éviter le risque d'instabilité. Le fait que le FAE est de bande limitée signifie que sa réalisation nécessite un grand nombre de coefficients. La contrainte d'une complexité acceptable nous impose de limiter la longueur du FAE à un nombre réduit  $N$ . Le choix des meilleures valeurs  $\{c_k\}$  de ces coefficients s'effectue au moyen d'un algorithme adaptatif garantissant que la sortie du FAE aux instants  $kT$  est la plus proche possible du symbole désiré  $d_k$ ; voir Fig.5. Sous cette forme, le bruit intervient dans la détermination des  $c_k$  et l'écart  $e_k$  entre la sortie  $y_k$  et le symbole  $d_k$  est alors un mélange bien dosé de bruit et d'IES résiduelle.

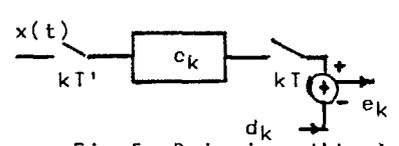


Fig.5. Principe d'implantation du FAE.

Dans le schéma de Fig.5, le choix du paramètre  $T'$ , intervalle de temps entre deux prises consécutives du filtre, est d'importance primordiale. En effet, la fonction de transfert  $C^*(f)$  du filtre discret est donnée par :

$$(33) \quad C^*(f) = \sum_k C(f - k/T')$$

Elle est de période  $1/T'$ . Pour que cette fonction soit proche de la forme idéale de (21), et par conséquent pour réaliser à la fois le filtrage adapté et l'égalisation, il faut, d'après le théorème d'échantillonnage, satisfaire la condition :

$$1/2T' \gg B.$$

Ceci implique le sur-échantillonnage du signal reçu  $x(t)$ , i.e. son échantillonnage à un rythme  $1/T'$  supérieur au rythme baud  $1/T$ . On choisit  $(T'/T) = K/L$ , où  $K$  et  $L$  sont deux entiers premiers entre eux et  $K < L$ . Voir [UNG76] et ses références.

Avec l'égaliseur synchrone où  $T'=T$ , il n'est pas possible pour le filtre discret de simuler le FAE. En effet cet égaliseur est une réalisation du filtre  $W(f)$  de la Fig.4, où on suppose que le filtrage adapté a été assuré auparavant par le filtre  $H(f)$ . La connaissance de ce filtre étant pratiquement impossible le filtre adapté n'est donc pas réalisé.

Outre la maximisation du rapport signal à bruit, l'importance de la réalisation du filtrage adapté vient du fait que tout écart de l'origine de temps, transformant la réponse impulsionnelle du canal en  $h(t-\tau)$  et sa transformée de Fourier en  $H(f)\exp(-j2\pi f\tau)$ , sera compensé par le filtre adapté  $H(f)\exp(j2\pi f\tau)$ . La non réalisation du filtrage adapté dans le schéma de l'égalisation synchrone implique donc qu'un écart de l'instant d'échantillonnage  $kT$  n'est pas compensé et qu'une mauvaise valeur de  $\tau$  produirait des creux dans le spectre du canal équivalent échantillonné fourni à l'égaliseur. Dans ce cas, le nombre fini des coefficients de l'égaliseur ne permet pas d'égaliser ces creux et il en résulte une dégradation des performances du système. En outre, les creux dans le spectre donnent lieu à deux dégradations supplémentaires : le ralentissent de la convergence de l'algorithme du gradient utilisé pour l'adaptation de l'égaliseur et le renforcement du bruit à la sortie de l'égaliseur.

La réalisation du FAE au moyen d'un filtre discret opérant sur un signal échantillonné aux instants  $kT'$  permet de bien approcher la fonction de transfert du FAE et de bien compenser un éventuel écart de l'instant d'échantillonnage  $kT'$ , grâce évidemment à sa simulation de la fonction du filtrage adapté. L'égaliseur ainsi réalisé est donc, contrairement à l'égaliseur synchrone, presque insensible à l'écart.

**VI. SUR L'EGALISATION PAR L'ALGORITHME DE VITERBI**

L'utilisation de l'AV, ou d'autres algorithmes de décodage, pour l'égalisation a suscité une recherche abondante. De nombreux articles proposent des méthodes de simplification en vue d'une application concrète dans les modems; [FAL73, VER74, FOS77]. Le récepteur optimal déduit dans cet article permet de dissocier clairement les deux volets du problème de la réception : l'égalisation et la détection en présence de bruit.



Nous avons démontré que l'élimination de l'IES, résultat d'une distorsion déterministe introduite par le canal, est prise en charge par le FAE qui joue le rôle d'un filtre de mise en forme spectrale du canal global. Ce filtre forme avec le canal un canal global de Nyquist. Nous rejoignons ainsi la notion intuitive de l'égaliseur - correcteur de distorsion. Par ailleurs, l'AV est réduit à son rôle de détecteur; en fournissant une décision sur la suite de symboles émise à partir de son observation, sous forme d'une suite  $y_k$ , dans un bruit corrélé et en l'absence de l'IES.

De plus, notre récepteur permet de trouver clairement le récepteur sous-optimal qui simplifie l'AV comme il a été signalé aux §IV et §V. Dans une transmission sur câble téléphonique le rapport signal à bruit est bon et le gain de performances de l'AV par rapport au détecteur symbole par symbole est négligeable. D'ailleurs les hypothèses théoriques qui conduisent vers la solution optimale ne sont pas garanties dans la pratique. A l'entrée de l'algorithme le bruit n'est pas forcément gaussien et peut être entaché d'une IES résiduelle. En outre il n'est pas possible de fournir avec exactitude les coefficients de corrélation nécessaires pour l'algorithme; cette tâche coûte cher et elle est grandement entravée par la gigue de la phase de la porteuse [FAL76].

## VII. SATURATION DE L'EGALISEUR.

On a constaté [UNG76] et [GIT82] lors de l'adaptation de l'égaliseur à sur-échantillonnage au moyen de l'algorithme du gradient stochastique que les mots de mémoire qui contiennent les valeurs des coefficients  $c_k$  deviennent saturés. La raison en est que la matrice de corrélation du signal à l'entrée de l'égaliseur est mal conditionnée, i.e. une partie de ses valeurs propres sont petites; ce qui rend les coefficients très sensibles à une éventuelle "perturbation" existante dans une réalisation.

Les résultats obtenus plus haut permettent de diagnostiquer ce phénomène de saturation et de proposer une solution. En effet, le nombre limité des coefficients du filtre qui approche le FAE ne permet pas d'obtenir la fonction de transfert de (21). La saturation arrive lorsque le filtre  $c_k$  prend des grandes valeurs dans la bande  $(B, 1/2T')$  qui contient ni signal et, dans certains cas, ni bruit. Un résultat immédiat peut être obtenu en notant que la saturation est évitée si  $B=1/2T'$ . Dans le cas où  $B < 1/2T'$  nous proposons de réaliser le FAE dans le domaine fréquentiel (Frequency Sampling Filter) de la façon décrite dans la suite.

La structure du filtre proposé est celui de [PAP77, page 177] que nous reproduisons dans la Fig.6. Les coefficients dans le domaine fréquentiel sont:

$$(34) \quad C_m = C(f_m)$$

$$(35) \quad f_m = m/NT'$$

où  $C(f)$  est la fonction de transfert (21) du FAE que l'on souhaite approximer et  $N$  le nombre de coefficients du filtre équivalent  $c_k$  construit dans le domaine temporel. Comme le FAE est de bande limitée à  $(-B, B)$  on impose:

$$(36) \quad C(f_m) = 0; f_m \in (B, 1/2T') \cup (-B, -1/2T')$$

La fonction de transfert du filtre obtenu est une interpolation entre les points  $C(f_m)$  et elle sera proche de nulle dans la bande  $(B, 1/2T')$ . (36) implique que le nombre des coefficients du filtre est réduit à  $2BT'N$ ; ce qui représente une certaine économie. Cependant le circuit nécessaire à la réalisation de la transformée récursive de Fourier représente un coût supplémentaire par rapport à la réalisation temporelle. Il ne faut pas conclure que cette solution est préférable à ce qui a été proposé dans [UNG76] et [GIT82] mais qu'elle est utile dans le cas où on envisage de construire un égaliseur fréquentiel. Le filtre proposé peut, par exemple, réaliser l'égaliseur d'évanouissement sélectif proposé dans [EWE81]. L'adaptation peut se faire au moyen de l'algorithme du gradient stochastique où les itérations sont effectuées aux instants  $kT$  comme dans le cas de l'égaliseur temporel. L'implantation de ce filtre et son adaptation ont été largement étudiées; voir par exemple [BIT81]. Nous avons effectué des simulations pour comparer un égaliseur temporel de 32 coefficients à un égaliseur fréquentiel de 20 coefficients. Un canal téléphonique de bande  $B=1,25/2T'$  a été utilisé. Nous avons pris  $T'=1/2$ . La convergence de l'égaliseur fréquentiel est alors du même ordre que celle de l'égaliseur temporel.

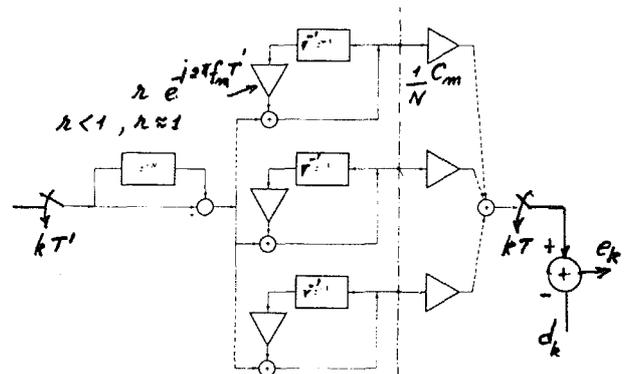


Fig.6. égaliseur fréquentiel.

## REFERENCES.

- BIT81 Bitmead, R., "Adaptive Frequency Sampling Filters", IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-29, pp 684-693, June 1981.
- EWE81 Eweda, E. et Macchi, O., "A New Equalizer for Rapid Selective Fading", GRETSI Nice 1981.

FAL73 Falconer, D., D. and Magee, F., R., "Adaptive Channel Memory Truncation for Maximum Likelihood Sequence Estimation", BSTJ, vol.52, pp.1541-1562, Nov. 1973.

FAL76 Falconer, D., D., "Evaluation of Decision Feedback Equalization and Viterbi Algorithm Detection for Voiceband Data Transmission", IEEE Trans. Commun., vol.COM-24, pp 1130-1139, Oct.1976.

FOR72 Forney, G., D., "Maximum- Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference", IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-18, pp.363-378, May 1972.

FOS77 Foschini, G., J., "A Reduced State Variant of ML Seq. Det. UNG 74§ Ungerboeck, G., "Adaptive Maximum- Likelihood Receiver for Carrier- Modulated Data - Transmission Systems.", IEEE Trans. Commun., Vol. COM-22, No.5, pp. 624-635, May 1974.

FRA69 Franks, L. "Signal Theory", Prentice Hall 1969.

GIT82 Gitlin, R., D., Meadors, H., C. and Weinstein, S., B., "The Tap- Leakage Algorithm for the Stable Operation of a Digitally Implemented, Fractionally Spaced Adaptive Equalizer," BSTJ, vol.61, pp 1817-1839, Oct.1982.

KOB71 Kobayashi, H., "Simultaneous Adaptive Estimation and Decision Algorithm for Carrier- Modulated Data Transmission Systems." IEEE Trans. Commun. Technol., vol.COM-19, pp 268-280, June 1971.

PAP77 Papoulis, "Signal Analysis", McGraw Hill, 1977.

UNG74 Ungerboeck, G., "Adaptive Maximum-Likelihood Receiver for Carrier-Modulated Data-Transmission Systems", IEEE trans. Commun., vol.COM-22, pp 624-636, May 1974.

UNG74 Ungerboeck, G., "Fractionally Tap-Spacing Equalizers and Consequences for Clock Recovery for Data Modems," IEEE Trans. Commun., COM-24, pp856-864, Aug. 1976.

VER74 Vermeulen, F., L. and Hellman, M.E., "Reduced State Viterbi Decoder for Channel with Intersymbol Interference", Inter.Conf.Comm. Minneapolis, Minn., June 1974.

