

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

## SEPARATION DE FRONTS D'ONDES CORRELES

Georges VEZZOSI

Philippe NICOLAS

Laboratoire de Traitement du Signal - UNIVERSITE DE RENNES I - CAMPUS DE BEAULIEU - 35042 RENNES CEDEX

### RESUME

Les méthodes de traitement spatial dites à haute résolution, c'est-à-dire les méthodes fondées sur l'exploitation des plus grands vecteurs propres de la matrice interspectrale mesurée en sortie des capteurs, ont été appliquées jusqu'à présent au cas de vecteurs sources dépendant d'un très petit nombre de paramètres, comme par exemple les vecteurs de la forme

$$(1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \dots, e^{i(N-1)\theta}) ,$$

obtenus dans le cas d'une propagation par ondes planes et d'une base linéaire de  $N$  capteurs équidistants.

Nous montrons, en fournissant un algorithme approprié, que ces méthodes peuvent être appliquées dans le cas général de vecteurs sources de la forme

$$(1, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N}) ,$$

dont les déphasages  $\theta_2, \dots, \theta_N$  sont des paramètres libres. Ce type de modèle semble bien adapté aux situations où le front d'ondes est distordu de façon aléatoire, et à celles où l'antenne est flexible ou de géométrie inconnue, quand les fluctuations des fronts d'ondes et de l'antenne sont très lentes par rapport aux constantes de temps servant à estimer les matrices interspectrales.

Notre algorithme est conçu pour fonctionner en présence de trajets multiples transportant des signaux corrélés à la réception.

Les essais réalisés par simulation montrent que la méthode est applicable quand la matrice interspectrale, supposée conforme au modèle, est estimée avec une précision de l'ordre du pour cent.

### SUMMARY

The so-called high resolution methods in spatial signal processing, based on the largest eigenvectors of the cross-spectral matrix, have been used up to now in the case of signal vectors depending upon a very small number of parameters, as, for instance, for signal vectors of the form

$$(1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \dots, e^{i(N-1)\theta}) ,$$

obtained in the case of plane waves and a linear array of  $N$  equispaced sensors.

We show, by providing a suitable algorithm, that these methods can be extended to the general case of signal vectors of the form :

$$(1, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}, \dots, e^{i\theta_N}) ,$$

where the phase angles  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_N$  are free parameters. Such a situation occurs in the case of randomly distorted wavefronts, and/or flexible antennas of unknown geometry, when the fluctuations of the wavefronts and the antenna are very slow with respect to the time constants used for the estimation of the cross-spectral matrix.

Furthermore, our algorithm can handle the case of correlated multipaths.

Results obtained by simulation show that the method is applicable when the cross-spectral matrix, assumed consistent with the above introduced general model, is estimated with a relative error-magnitude of the order of one percent.



## SEPARATION DE FRONTS D'ONDES CORRELÉS

G. VEZZOSI P. NICOLAS

## 1. INTRODUCTION

1.1. Position du problème

La présente étude peut être considérée comme une extension des méthodes dites à haute résolution [1,2] au cas d'une antenne de géométrie inconnue. Considérons dans l'espace  $P$  ondes planes monochromatiques corrélées éclairant un réseau de  $N$  capteurs ponctuels de positions inconnues et quelconques. Supposons  $N > P$ , soient  $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_P$  les  $P$  vecteurs d'ondes, et  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  les positions des capteurs. Le gain complexe entre la source responsable de l'onde n°  $j$  et le réseau de capteurs est proportionnel à un vecteur d'exponentielles complexes de la forme

$$d_j = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\theta_{j2}} \\ \vdots \\ e^{-i\theta_{jN}} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

dont les déphasages  $\theta_{jn}$  sont reliés aux positions des sources et des capteurs. On a modulo  $2\pi$  :

$$\theta_{jn} = \vec{k}_j \cdot (\vec{r}_n - \vec{r}_j), \quad 1 \leq j \leq P, \quad 2 \leq n \leq N. \quad (2)$$

La matrice interspectrale des sources seules en sortie des capteurs est alors de la forme :

$$\gamma_s = \sum_{j,k=1}^P \alpha_{jk} d_j d_k^* = M^* \Sigma M, \quad (3)$$

où le symbole \* désigne le transposé conjugué,  $\Sigma = [\alpha_{jk}]$  est la matrice de covariance des sources, et  $M$  la matrice à  $P$  lignes et  $N$  colonnes dont les lignes sont formées des vecteurs  $d_1^*, \dots, d_P^*$ . Les lignes de  $M$  seront appelées dans la suite les vecteurs sources, et le sous espace qu'elles engendrent le sous espace des sources. Nous supposons les vecteurs sources linéairement indépendants, de sorte que la matrice  $M$  est de rang  $P$ . La matrice des covariances  $\Sigma$  est d'ordre  $P$ , hermitienne, et définie positive. Ses termes extradiagonaux non nuls traduisent la présence de trajets multiples transportant des signaux corrélés à la réception. Nous supposons la matrice  $\Sigma$  définie positive strictement, ce qui exclut le cas de trajets multiples corrélés et de corrélation égale à un. Dans ces conditions la matrice interspectrale des sources est d'ordre  $N$  et de rang  $P$ .

Aux  $P$  ondes précédentes se superpose le bruit, dont nous supposons la matrice interspectrale connue à un facteur près. On sait qu'alors on peut, sans nuire à la généralité, considérer que cette matrice est proportionnelle à la matrice identité, et le problème à résoudre devient :

"Etant donné une estimation  $\hat{\gamma}$  de la matrice interspectrale  $\gamma = \alpha I + \gamma_s$  du mélange signal + bruit en sortie des capteurs, identifier les vecteurs sources et la matrice de covariance  $\Sigma$ ".

Une fois les déphasages déterminés, on peut remonter aux positions relatives des sources et des capteurs en résolvant les équations (2). Ici on s'intéresse seulement à l'estimation des déphasages, qui sont d'ailleurs des quantités utiles en elles mêmes pour l'étude des distorsions aléatoires de fronts d'ondes [3].

On notera le grand nombre de paramètres mis en jeu dans ce type de problème. Chaque vecteur source est décrit par la donnée de  $N-1$  déphasages, et la matrice hermitienne complexe  $\Sigma$  fait intervenir  $P^2$  paramètres réels libres. On a donc au total, sans compter la puissance du bruit :

$$N_1 = P(N-1) + P^2 \quad (4)$$

inconnues réelles, au lieu des

$$P + P^2$$

inconnues réelles mises en jeu dans le cas usuel d'une base linéaire de capteurs équidistants, dans lequel les composantes des vecteurs sources forment une progression géométrique :

$$d_j = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta_j} \\ \vdots \\ e^{i(N-1)\theta_j} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Le grand nombre des inconnues mises en jeu entraîne par ailleurs que la condition d'identifiabilité du modèle n'est plus la condition usuelle :  $N > P$ , mais la condition  $N \geq 2P-1$ . Supposons en effet la matrice interspectrale du mélange signal + bruit mesurée sans erreur. Dans ce cas la matrice interspectrale des sources  $\gamma_s$  est connue. Comme  $\gamma_s$  est d'ordre  $N$  et de rang  $P$ , le nombre de paramètres réels libres qu'elle contient vaut :

$$N_2 = P(2N-P), \quad (6)$$

et une condition nécessaire pour que le modèle soit identifiable est que  $N_2$  soit supérieur ou égal à  $N_1$ , ce qui conduit à  $N \geq 2P-1$ . Si  $N = 2P-1$ , les essais ont montré que le modèle n'est pas identifiable en général, l'équation  $\gamma_s = M^* K M$  par rapport aux inconnues matricielles  $M$  et  $K$  admettant alors des solutions parasites. Cette circonstance ne semble pas se produire si  $N > 2P-1$ , les solutions parasites étant éliminées par la surdétermination. Dans la suite nous admettrons que  $N$  est nettement supérieur à  $2P-1$ .

1.2. Principe de la méthode

Supposons la matrice interspectrale  $\gamma$  mesurée sans erreur. Alors la matrice  $\gamma_s$  est connue, et le sous espace des sources peut être identifié parfaitement : c'est le sous espace engendré par les lignes du facteur de Choleski de  $\gamma_s$ , ou encore celui engendré par les  $P$  plus grands vecteurs propres de  $\gamma$  : ces deux sous espaces sont identiques. Soit  $v_1, \dots, v_P$  une base du sous espace. Déterminer les vecteurs sources revient alors à déterminer dans le sous espace des sources tous les vecteurs linéairement indépendants de la forme :

$$[e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots, e^{i\phi_N}]^T, \quad (7)$$

c'est-à-dire les vecteurs complexes

$$(z_1, \dots, z_P) \quad (8)$$

tels que le vecteur :

$$z_1 v_1 + \dots + z_P v_P \quad (9)$$

ait ses composantes égales à un en module. Naturellement le vecteur  $z_1, \dots, z_P$  est défini à un facteur de phase près. Pour lever l'indétermination, il suffit d'imposer que l'une quelconque de ses composantes non nulles, par exemple celle de module maximum, soit réelle et positive. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Décomposons  $z_j$  et  $v_j$  en partie réelle et imaginaire

$$z_j = x_j + iy_j \quad (10)$$

$$v_j = (v_{j1}(1) + iv_{j1}(2), \dots, v_{jP}(1) + iv_{jP}(2)) \quad 1 \leq j \leq P,$$

et écrivons que le module au carré des composantes du vecteur (9) vaut un. Supposons la première composante réelle. Nous obtenons le système de  $N$  équations quadratiques par rapport aux  $2P-1$  inconnues réelles  $(x_1, x_2, y_2, \dots, x_P, y_P)$  :

$$f_k(z_1, \dots, z_P) = \sum_{j=1}^P (x_j v_{jk}(1) - y_j v_{jk}(2))^2 + (x_j v_{jk}(2) + y_j v_{jk}(1))^2 - 1 = 0$$

$$1 \leq k \leq N, \quad y_1 = 0. \quad (11)$$

Ce système possède P solutions distinctes.

Pratiquement la matrice  $\gamma$  n'est pas mesurée sans erreur, le sous espace des sources ne peut pas être identifié parfaitement, ce sous espace ne contient aucun vecteur de la forme (7), et le système (11) n'a pas de solution. Mais on peut toujours résoudre ce système au sens des moindres carrés, en rendant minimum la fonction :

$$\phi(z_1, \dots, z_P) = \sum_{k=1}^P f_k^2(z_1, \dots, z_P). \quad (12)$$

La fonction  $\phi$  possède de nombreux minima locaux. Mais tant que le bruit de mesure sur  $\gamma$  n'est pas trop élevé, les minima locaux restent supérieurs aux minima dus aux sources, ce qui permet d'estimer les vecteurs sources. C'est cette méthode que nous voulons expérimenter. Elle suppose :

- 1- une identification aussi bonne que possible du sous espace des sources ;
- 2- le calcul d'une bonne initialisation ;
- 3 - la résolution du système quadratique (11) par un algorithme de descente approprié.

On notera que cette méthode n'est pas une méthode de maximum de vraisemblance, ni une méthode de projection : minimiser la fonction  $\phi$  n'est pas équivalent à maximiser la projection du vecteur (7) dans le sous espace des sources.

## 2. TEST DU NOMBRE DE SOURCES ET ESTIMATION DU SOUS ESPACE DES SOURCES

2.1. Rappelons tout d'abord un résultat classique dans l'estimation des matrices interspectrales [4]. Soit le problème d'estimer le spectre d'un processus vectoriel à temps discret, stationnaire, centré et gaussien. Supposons que l'on adopte l'une des deux méthodes classiques d'estimation : périodogramme lissé, ou moyenne des périodogrammes calculés sur des segments adjacents, avec une fenêtre convenable. Quelle que soit la méthode choisie, l'estimée  $\hat{\gamma}$  du spectre  $\gamma$  à la fréquence  $f$  peut être écrite approximativement :

$$\hat{\gamma}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} W(f-\lambda) \gamma(\lambda) d\lambda + \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{T}}, \quad (13)$$

où le paramètre T s'interprète comme un produit : temps  $\times$  résolution spectrale, et la matrice aléatoire  $\Delta\gamma$  obéit à la loi de Wishart complexe centrée à T degrés de liberté et de matrice  $\gamma$ . On a en particulier, quels que soient les entiers  $j, k, m, n$  choisis dans  $\{1, \dots, N\}$  :

$$E \Delta\gamma(j, k) \overline{\Delta\gamma(m, n)} = \gamma_{jm} \overline{\gamma_{kn}}. \quad (14)$$

Supposons de plus que le biais de l'estimateur, qui provient du terme de convolution de la formule (13), ait pu être réduit à une valeur négligeable à la fréquence  $f$  :

$$\int_{-1/2}^{1/2} W(f-\lambda) \gamma(\lambda) d\lambda = \gamma(f) = \gamma. \quad (15)$$

Enfin approchons le paramètre T par l'entier le plus voisin. Alors tout se passe comme si l'estimée  $\hat{\gamma}$  du spectre  $\gamma$  était construite sur la base de T vecteurs complexes indépendants  $X_1, \dots, X_T$ , gaussiens, centrés, et de covariance  $\gamma$ , suivant la formule

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t^*. \quad (16)$$

2.2. Cette approximation ramène l'identification du sous espace des sources à un problème connu d'analyse multivariée. Supposons que la matrice  $\gamma$  ait la forme particulière :

$$\gamma = aI + \gamma_s,$$

avec  $\gamma_s$  : matrice d'ordre N et de rang  $P < N$  connu, dont les  $N_2 = P(2N-P)$  paramètres réels (cf. (6)) peuvent varier librement (ce qui signifie que nous négligeons les liaisons induites par la structure particulière des vecteurs sources). Il s'agit d'estimer  $\gamma_s$ , et accessoirement la puissance du bruit  $a$ , à partir des vecteurs indépendants  $X_1, \dots, X_T$ . C'est un cas où la méthode du maximum de vraisemblance permet un traitement analytique complet. Rappelons le résultat : soit

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$$

les valeurs propres de  $\hat{\gamma}$  rangées par ordre décroissant, et  $v_1, \dots, v_N$  les vecteurs propres correspondants. Alors :

- 1- la puissance du bruit est estimée par les N-P plus petites valeurs propres de  $\hat{\gamma}$  :

$$\hat{a} = \frac{1}{N-P} \sum_{j=P+1}^N \lambda_j; \quad (17)$$

- 2- la matrice  $\gamma_s$  est estimée par les P plus grands vecteurs propres de  $\hat{\gamma}$  :

$$\hat{\gamma}_s = \sum_{j=1}^P (\lambda_j - \hat{a}) v_j v_j^*; \quad (18)$$

- 3- le sup de la log vraisemblance vaut à une constante près :

$$\phi(P) = -\frac{1}{T} \sup_{a, \gamma_s} (\text{Log vraisemblance})$$

$$= (N-P) \text{Log } \hat{a} - \sum_{j=1}^P \text{Log } \lambda_j. \quad (19)$$

2.3. Reste à estimer le rang P de la matrice  $\gamma_s$ , qui donne aussi le nombre de sources. Là aussi nous sommes en terrain connu : il s'agit typiquement d'un problème de test d'ordre, auquel s'applique le critère AIC d'Akaike [5]. On sait que ce critère conduit à estimer l'ordre d'un modèle au minimum de

$$f(p) = -\frac{1}{T} \sup (\text{Log vraisemblance à l'ordre } p) + (\text{nombre de paramètres libres à l'ordre } p)/T.$$

Appliquons ce résultat au cas présent. Quand le rang de la matrice est p, la log vraisemblance vaut  $\phi(p)$  (cf. 19), et le nombre de paramètres mis en jeu vaut  $N_2 = p(2N-p)$  (sans compter la puissance du bruit, commune à tous les ordres). Ceci donne aussitôt le test du nombre de sources :

Estimer le nombre de sources au minimum  $\hat{P}$  de :

$$f(p) = \phi(p) + p(2N-p)/T.$$

Ce test est différent de celui proposé en [6], et plus facile à mettre en oeuvre. Dans la suite on notera  $\hat{P} = P$ .

## 3. L'INITIALISATION

3.1. Revenons au système d'équations quadratiques (11), que nous voulons résoudre au sens des moindres carrés. Ce système peut s'exprimer sous forme matricielle. Soient  $v_1, \dots, v_P$  les P plus grands vecteurs propres



SEPARATION DE FRONTS D'ONDES CORRELÉS

reprendre le traitement du § 3.

Si les sources sont non corrélées (ce qui signifie : pas de trajets multiples corrélés à la réception) la matrice de covariance des sources  $\Sigma$  est diagonale. Soit D la matrice diagonale d'ordre P formée par les P valeurs propres non nulles de  $\gamma_s$  ; D est connue, ou s'estime à l'aide de (18). Il existe une matrice unitaire Q telle que

$$Q\sqrt{D}U = \sqrt{\Sigma}M \quad (31)$$

En comparant (29) et (31), on voit que

$$(\sqrt{\Sigma})^{-1}Q = Z(\sqrt{D})^{-1} \quad (32)$$

Si les p premières lignes de Z sont connues, les p premières lignes de Q le sont aussi. On peut donc compléter Q comme précédemment, en déduire une estimation de Z, puis reprendre le traitement du § 3.

4.3. Une fois que les P vecteurs sources ont été déterminés, il reste à estimer la covariance des sources. C'est la phase la plus élémentaire de la méthode. La formule (31) reste valable dans le cas de sources corrélées,  $\sqrt{\Sigma}$  s'interprétant alors comme l'un des facteurs quelconques de  $\Sigma$  :

$$\Sigma = (\sqrt{\Sigma})^* (\sqrt{\Sigma}) \quad (33)$$

On en tire aussitôt :

$$\Sigma = (Z^{-1})^* D Z^{-1} \quad (34)$$

5. RESULTATS

Nous présentons ci-après deux exemples typiques tirés d'une série d'essais réalisés par simulation. Dans le premier exemple, les déphasages des vecteurs sources sont tirés au hasard. Dans le second, ils forment une progression arithmétique (cf. (5)), ce qui permet de comparer notre méthode aux méthodes de goniométrie classiques, basées sur le calcul de la projection du vecteur (5) sur le sous espace des sources. Dans les deux cas le nombre des capteurs vaut N=30, celui des sources vaut P=8, les sources sont corrélées 3 par 3 (avec des corrélations tirées au hasard), la matrice du bruit est prise égale à l'identité, et la puissance des sources par capteur varie de 0,176 à 3,26. Pour synthétiser la matrice interspectrale bruitée  $\hat{\gamma}$ , nous commençons par calculer la matrice interspectrale  $\gamma_s$  des sources seules suivant la formule (3), nous lui ajoutons la matrice identité, puis nous perturbons la somme à l'aide d'une matrice aléatoire complexe gaussienne dont les corrélations respectent la formule (14). C'est la même séquence de bruit qui est utilisée dans tous les essais. Pour faire varier le niveau du bruit de mesure, il suffit alors de faire varier le paramètre T (cf. 16). Aucun des éléments de la matrice  $\gamma$  n'est nul, et on se fait une bonne idée de l'amplitude de la perturbation en regardant la moyenne des perturbations relatives : si  $\hat{\gamma} = \gamma + \Delta\gamma$  désigne la matrice perturbée, cette moyenne est définie par :

$$\epsilon = \frac{2}{N(N+1)} \sum_{i < j} \frac{|\Delta\gamma_{ij}|}{|\gamma_{ij}|} \quad (35)$$

Enfin dans tous les cas le nombre de sources est estimé à l'aide du critère d'Akaike.

5.1. Déphasages aléatoires

Les déphasages et la matrice de covariance des sources sont tirés au hasard, et il est commode de résumer les différents paramètres mis en jeu par :

- 1- la puissance des sources ;
- 2- la corrélation normée des sources, qui est un nombre compris entre 0 et 1 défini par :

$$\rho(j,k) = |\Sigma(j,k)| / (\Sigma(j,j) \Sigma(k,k))^{1/2} ; \quad (36)$$

- 3- les produits scalaires normés des vecteurs sources, définis par :

$$r(j,k) = |(d_j, d_k)| / \|d_j\| \|d_k\| = |(d_j, d_k)| / N \quad (37)$$

Ces informations sont reportées dans le tableau 1. La puissance des sources se lit sur la diagonale du tableau, les corrélations normées dans le triangle inférieur, les produits scalaires normés dans le triangle supérieur. On remarque sur ce tableau qu'aucun vecteur source ne pointe dans la même direction, et que les sources sont bien corrélées 3 par 3, avec des corrélations assez fortes.

.82	.24	.18	.21	.13	.25	.27	.18
.73	.18	.27	.06	.42	.15	.06	.17
.65	.91	3.26	.10	.15	.23	.16	.08
0	0	0	.40	.15	.23	.25	.19
0	0	0	.78	.86	.10	.13	.30
0	0	0	.44	.26	1.07	.09	.10
0	0	0	0	0	0	.42	.09
0	0	0	0	0	0	.81	1.71

Tableau 1 : déphasages aléatoires : puissance des sources (sur la diagonale), corrélation normée des sources (triangle inférieur), produits scalaires normés des vecteurs sources (triangle supérieur).

Les valeurs propres de la matrice spectrale non bruitée  $\gamma$  valent par ordre décroissant : 145.0, 67.8, 47.1, 19.7, 9.9, 4.6, 2.9, 1.2, 1 répété 22 fois.

Pour mesurer l'erreur commise sur chaque vecteur source, nous utilisons le complément à 1 du produit scalaire entre ce vecteur et son estimation :

$$e_j = 1 - |(d_j, \hat{d}_j)| / N \quad (38)$$

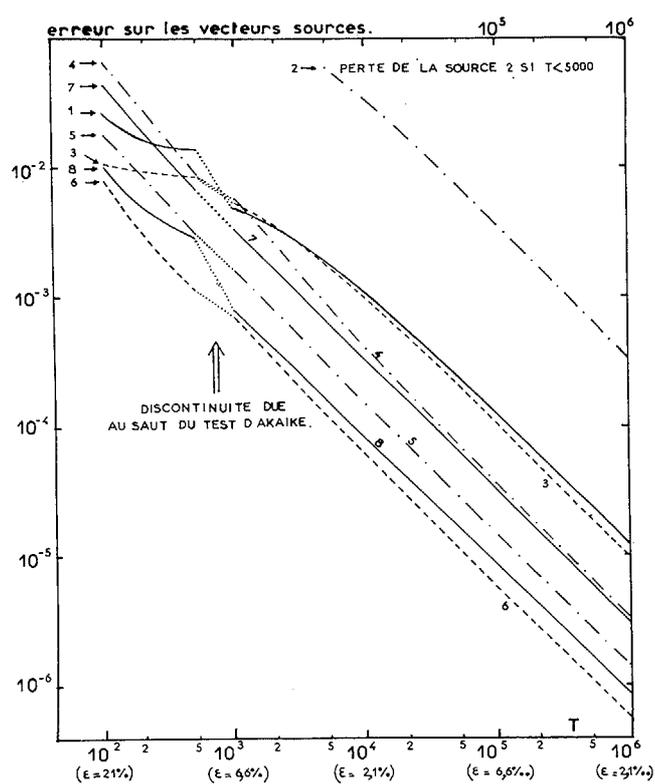


FIG 1 - DÉPHASAGES ALÉATOIRES ; NOMBRE DE SOURCES : P=8 ; NOMBRE DE CAPTEURS : N=30 ; DIMINUTION DE L'ERREUR SUR LES VECTEURS SOURCES QUAND T AUGMENTE.



## SEPARATION DE FRONTS D'ONDES CORRELES

La figure 1 présente la variation de cette erreur quand  $T$  augmente de  $10^2$  (moyenne des perturbations relatives =  $\epsilon = 21\%$ ), à  $10^6$  ( $\epsilon = 2,1 \times 10^{-3}$ ). On remarque que pour  $T = 2000$ , ( $\epsilon = 4,7 \times 10^{-2} \approx 5\%$ ) la source n° 2, qui est aussi la plus faible, est perdue : le minimum qui lui correspond devient supérieur à un minimum local parasite.

Le critère d'Akaike estime le nombre exact de sources pour  $T > 10^3$ , et élimine l'une des sources pour  $T \leq 500$ . Au moment du saut, le sous espace des sources se trouve brutalement privé du 8<sup>ème</sup> vecteur propre, et c'est pourquoi les courbes présentent un point de discontinuité. Le phénomène est particulièrement sensible pour les sources 1 et 8. On remarque toutefois que la discontinuité n'est pas très importante, et qu'en tous cas elle n'entraîne pas le décrochage de la méthode. Cela signifie qu'au moment du saut, les vecteurs sources restants sont presque orthogonaux au vecteur propre éliminé.

## 4.2. Déphasages en progression arithmétique

Maintenant les 8 vecteurs sources ont la forme (5), où les  $\theta_j$  sont pris égaux à :  $\theta_j = 2\pi f_j$ , avec  $f_j = -.21, -.20, -.1, -.05, .05, .1, .20, .21$ . Les sources sont comme précédemment corrélées 3 par 3, avec des corrélations et des puissances identiques à celles de l'exemple précédent. A cause du faible écart entre ( $f_1, f_2$ ) et ( $f_7, f_8$ ), les vecteurs sources (1)-(2) et (7)-(8) pointent dans la même direction (produit scalaire normé = .86), et d'après le tableau 1, les corrélations correspondantes sont assez fortes. De plus, la source (2) reste fortement corrélée avec la source (3), qui est 20 fois plus puissante qu'elle. C'est pourquoi ce cas est difficile. On le voit d'ailleurs très bien en examinant la suite des valeurs propres de la matrice non bruitée, qui valent par ordre décroissant : 103.4, 58.2, 40.6, 26.4, 17.4, 3.7, 2.02, 1.084, 1 répété 22 fois.

Les résultats obtenus sont assez décevants : le critère d'Akaike estime 7 sources au lieu de 8 pour  $T \leq 5000$  ( $\epsilon \approx 4\%$ ), et notre méthode perd la source (2) ( $f_2 = -.2$ ) pour  $T \leq 10000$  ( $\epsilon = 2,8\%$ ), et la source (7) ( $f_7 = .2$ ) pour  $T \leq 2000$  ( $\epsilon = 6,2\%$ ). Ces deux sources sont remplacées par des minima locaux parasites, qui d'ailleurs ne sont pas conformes au modèle (5), et peuvent donc être éliminés.

Dans le cas présent nous pouvons comparer notre méthode à celle du goniomètre [2], qui exploite pleinement la structure particulière des vecteurs sources, puisqu'il estime les  $\theta_j = 2\pi f_j$ , en maximisant la projection du vecteur

$$u(\theta) = (1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(N-1)\theta}) \quad (39)$$

dans le sous espace des sources.

Les essais réalisés montrent que les deux méthodes donnent des résultats pratiquement identiques. En particulier le goniomètre perd lui aussi la source (2) si  $T \leq 10000$ , et la source (7) si  $T \leq 2000$ . Les tableaux 2 et 3 donnent les valeurs des erreurs absolues

$$\Delta f_j = \hat{f}_j - f_j$$

obtenues par les deux méthodes pour  $T = 2000$  ( $\epsilon = 6.3\%$ ) et  $T = 100$  ( $\epsilon = 28\%$ ). Comme on peut le constater, les erreurs commises sont du même ordre de grandeur.

## 6. CONCLUSION

Cette étude est un exemple d'application des méthodes générales fondées sur l'exploitation des plus grands vecteurs propres de la matrice interspectrale [1]. Elle montre, en fournissant un algorithme approprié, la possibilité concrète d'estimer tous les déphasages des vecteurs d'exponentielles complexes définis-

sant les vecteurs sources quand les déphasages sont des paramètres libres. Les essais réalisés montrent que la méthode est applicable quand les éléments de la matrice interspectrale sont disponibles avec une précision de l'ordre du pour cent. Enfin, quand on se place dans les cas où la comparaison a un sens, notre méthode donne des résultats analogues à ceux des méthodes classiques.

n° source	f	redressement $\Delta f$	goniomètre $\Delta f$
1	-.21	$+9.7 \times 10^{-4}$	$+9.7 \times 10^{-4}$
2	-.20	perdue	perdue
3	-.1	$+2.1 \times 10^{-4}$	$+1.8 \times 10^{-4}$
4	-.05	$+6.7 \times 10^{-6}$	$-6.6 \times 10^{-5}$
5	+.05	$+8.5 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-5}$
6	+.1	$-6.3 \times 10^{-5}$	$-6.8 \times 10^{-5}$
7	+.2	perdue	perdue
8	+.21	$5.7 \times 10^{-5}$	$-1.4 \times 10^{-4}$

Tableau 2 : déphasages en progression arithmétique. Comparaison des erreurs absolues d'estimation  $T = 2000$  ;  $\epsilon = 6.3\%$ .

n° source	f	redressement $\Delta f$	goniomètre $\Delta f$
1	-.21	$4.9 \times 10^{-4}$	$+4.5 \times 10^{-4}$
2	-.20	perdue	perdue
3	-.1	$+3.7 \times 10^{-4}$	$+3.1 \times 10^{-4}$
4	-.05	$-5.3 \times 10^{-5}$	$-3.3 \times 10^{-4}$
5	+.05	$+2.5 \times 10^{-4}$	$-3.1 \times 10^{-5}$
6	+.1	$-1.8 \times 10^{-4}$	$-2.2 \times 10^{-4}$
7	+.2	perdue	perdue
8	+.21	$-3.2 \times 10^{-3}$	$-9.9 \times 10^{-4}$

Tableau 3 : déphasages en progression arithmétique. Comparaison des erreurs absolues d'estimation.  $T = 100$  ;  $\epsilon = 28\%$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] MERMOZ H., Imagerie, corrélation et modèles. Ann. Télécommunic. (Jan.-Fév. 1976), 31, n° 1-2, pp. 17-36.
- [2] BIENVENU G., KOPP L., Principe de la goniométrie passive adaptative. VII<sup>e</sup> Colloque GRETSI. Nice (28 Mai-2 Juin 1979), pp. 106/1-106/10.
- [3] LECADRE J.P., Traitements d'antennes en présence de fronts d'ondes aléatoirement fluctuants. Thèse Univ. de Grenoble (Juillet 1982).
- [4] BÖHME J.F., Remarks on the statistical behaviour of orthogonal beamforming. Proceedings of the international conference on spectral analysis and its use in underwater acoustics. Londres (29-30 Avril 1982), pp. 16/1-16/8.
- [5] AKAIKE H., A new look at the statistical model identification; dans : Modern spectrum analysis, pp.234/241. D.G. CHILDERS Editeur IEEE Press (1978).
- [6] KOPP L., BIENVENU G., AIACH M., New approach to source detection in passive listening. Proceedings ICASSP 82. Paris (3-5 Mai 1982), Vol. 2, pp. 779-782.
- [7] VEZZOSI G., Séparation de fronts d'ondes par redressement du facteur de Choleski de leur matrice interspectrale. Ann. Télécommunic. (Sept.-Oct. 1982), 37, n° 9-10, pp. 425-439.
- [8] LUENBERGER D.G., Introduction to linear and non linear programming. Addison-Wesley (1973).

Remerciements : Les auteurs remercient le GERDSM et le CELAR pour les moyens mis à leur disposition.