

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

TRAITEMENTS D'ANTENNE EN PRESENCE DE FRONTS D'ONDE ALEATOIREMENT FLUCTUANTS

J.P. Le Cadre, B. Lucas, J.L. Lambla

GERDSM, LE BRUSC, 83140 - SIX FOURS et CEPHAG, BP 46, 38400 - SAINT MARTIN D'HERES

RESUME

Cet article présente diverses méthodes de traitement d'antenne dans le cas de fronts d'onde fluctuant aléatoirement.

Une modélisation temporelle et fréquentielle des fluctuations précède la description des traitements basés sur les principes suivants : approche géométrique, maximum de vraisemblance et maximum d'entropie.

Des méthodes de base sont développées dans quelques cas simples. Celles-ci pouvant être, en général, étendues à un assez grand nombre de cas. Leur évaluation est en cours.

SUMMARY

This article presents several array-processing methods to be applied to the case of randomly fluctuating wavefronts.

Temporal and frequential modelizations are proposed. Processing methods are then described which derive from the following approaches : geometrical approach, maximum likelihood and maximum entropy.

Basic methods are developed. These methods can be extended in many cases.



1 - INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier les traitements d'antennes optimaux pour la détection et l'estimation d'un signal acoustique sous-marin présentant un front d'onde aléatoirement distordu.

Les causes de ces distorsions sont très variées mais on peut en distinguer deux grandes familles. L'une est liée aux déformations mécaniques de l'antenne. Celles-ci peuvent être relativement importantes pour des antennes souples de grande dimension. L'influence de ces déformations dépend du rapport de leur amplitude à la longueur d'onde. L'autre provient du milieu de transmission. Dans la réalité le milieu n'est pas infini, il a un fond et une surface avec des propriétés de réflexion variables. Ceci implique l'existence de trajets multiples pouvant être aléatoires.

En outre, les variations du profil bathycélérimétrique induisent un milieu de célérité stratifié, ce qui peut engendrer des fluctuations dans le plan vertical. La propagation peut aussi être affectée par la présence d'effets de diffusion dus à la présence de particules en suspension (plancton, obstacles divers ...).

Toutes ces causes font que le milieu se comporte (dans ces cas) comme un filtre aléatoire. Les traitements classiques supposent que l'ensemble milieu + antenne est un filtre déterministe linéaire. On veut donc essayer de définir une modélisation plus fine des phénomènes adaptées à un milieu fluctuant (et dont on ne connaît que des propriétés statistiques) ; et définir les traitements adaptés à ces modélisations, et à certains types de critère. En général, le but est de fournir une description, aussi précise que possible du champ des bruiteurs.

2 - DESCRIPTION ET MODELISATION DES FLUCTUATIONS.

MODELISATION DE LA MATRICE INTERSPECTRALE D'UN SIGNAL

2.1. On admet qu'un signal provenant d'une source ponctuelle est reçu sur le i-ème capteur de l'antenne sous la forme :

$$X_i(t) = s(t - \tau_i(t)) + b(t)$$

S signal émis par la source
 $\tau_i(t)$ retard aléatoire (processus aléatoire)
 $\tau_i(t) = \tau_{i0} + \tilde{\tau}_i(t)$; τ_{i0} est la partie géométrique déterministe liée à la position de la source par rapport à l'antenne,
 $\tilde{\tau}_i(t)$ décrit la déformation aléatoire du front d'onde (processus centré).

2.2. Calcul de la fonction d'anticorrélation d'un signal aléatoire affecté de retards aléatoires

La recherche de traitements d'antennes optimaux implique souvent une modélisation fréquentielle des processus considérés. Celle-ci utilise particulièrement les propriétés du 1er et du 2ème ordre, c'est pourquoi on étudie la covariance puis la densité spectrale du signal reçu. On suppose **S** stationnaire au 2ème ordre et τ stationnaire sur la loi des couples c'est à dire que la loi de $(\tau(t), \tau(t+\alpha))$ ne dépend que de α

Soit : $s'(t) = s(t - \tau(t))$

La fonction d'autocorrélation de **s'** s'écrit :

$$r_{s'}(\alpha) = \int_R \gamma_s(v) \Phi_{\tau}^*(v, \alpha) \exp(2i\pi v \alpha) dv$$

avec $\gamma_s(v)$ densité spectrale de **s** et Φ_{τ} fonction caractéristique de τ

On en déduit que les retards aléatoires induisent un élargissement du rayon spectral proportionnel à la variance σ_{τ}^2 de $\tau(t_0)$ (τ' désignant la dérivée de τ).

Cette formule s'étend au cas multidimensionnel par

$$(r_{s'})_{i,j}(\alpha) = \int_R \gamma_s(v) \cdot \Phi_{\tau}^*_{i,j}(v, \alpha) \exp(2i\pi v \alpha) dv$$

ceci conduit à la modélisation suivante de la matrice interspectrale :

$$(\gamma_{s'})_{i,j}(v) = \sigma^2(v) \cdot \Delta_{ij}(\alpha) \gamma_D^*(v, \alpha)$$

avec $\Delta_{ij}(\alpha)$ matrice diagonale

$$\Delta_{ij}(\alpha) = \exp(-2i\pi v (\varphi(\alpha))_{ij})$$

γ_D matrice dite des distorsions

$\sigma^2(v)$ ds.p du signal **s**.

Cette formule est rigoureuse, par exemple, dans chacun des cas suivants :

- les retards sont des variables aléatoires (donc indépendants du temps)
- le signal émis est monochromatique
- les retards sont spatio-temporellement blancs
- le signal est soumis à une diffusion angulaire aléatoire.

Par exemple si on suppose que les $\{\tau_i\}$ sont des processus de Wiener, on a, pour un signal émis à la fréquence ν_0 :

$$(\gamma_D)_{i,j}(\nu) = \frac{4\varphi_{ij}\pi^2\nu_0}{2\varphi_{ij}\pi^2\nu_0^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}$$

φ_{ij} corrélation de $\tilde{\tau}_i$ et $\tilde{\tau}_j$

On voit donc que les retards aléatoires induisent un élargissement spectral.

L'expression de la matrice interspectrale dans le cas fluctuant, soit :

$$\gamma_{s'}(v) = \sigma(v) \Delta_{ij}(\alpha) \gamma_D^*(v, \alpha)$$

est à rapprocher de celle utilisée dans le cas des fronts d'ondes déterministes, soit :

$$\gamma_{s'}(v) = \sigma(v) \cdot \vec{D}_v \cdot \vec{D}_v^* = \sigma \Delta_{ij}(\alpha) \cdot N \Delta_{ij}^*(\alpha)$$

N étant la matrice de rang 1 telle que :

$$N(i,j) = 1 \quad \forall (i,j)$$

Par contre, dans le cas fluctuant, γ_D n'est pas en général de rang 1.

On supposera connue la matrice γ_D (résultat d'expérimentation).

Nous allons maintenant étudier divers types de traitements d'antenne et leur adaptation au cas fluctuant.

3 - METHODES DE DESCRIPTION GEOMETRIQUE DU CHAMP DES BRUITEURS

Il s'agit, ici, d'exploiter la connaissance de la matrice interspectrale des observations (et ses décompositions) afin de déterminer l'existence de

.../...

sources et leurs positions éventuelles. L'approche utilisée implique que toutes les sources jouent des rôles symétriques.

3.1. Imagerie pour une source unique (3)

On suppose ici que les observations sont constituées de la superposition d'un bruit ambiant de matrice interspectrale connue sous forme paramétrique mais de puissance inconnue, et d'un signal (source) de puissance et de direction inconnue. On désire estimer ces paramètres.

La matrice des observations γ_x s'écrit :

$$\gamma_x = \sigma_s^2 \cdot \Delta_1 \cdot \gamma_D \cdot \Delta_1^* + \gamma_B \quad \text{avec } \gamma_B = b^2 \cdot B$$

(B matrice connue)

1. supposons $\gamma_B = b^2 \cdot Id$ (bruit spatialement blanc) Alors le problème a une solution exacte, en effet :

a) les valeurs propres de γ_D et $\Delta_1 \cdot \gamma_D \cdot \Delta_1^*$ sont identiques puisque :

$$\det(\Delta_1 \cdot \gamma_D \cdot \Delta_1^* - \lambda Id) = \det(\gamma_D - \lambda Id) \cdot \det(\Delta_1 \cdot \Delta_1^*) = \det(\gamma_D - \lambda Id) \quad \text{car } \Delta_1 \cdot \Delta_1^* = Id ;$$

b) d'autre part, soit \vec{v}_i un vecteur propre de γ_D associé à la valeur propre λ_i , alors $\Delta_1 \cdot \vec{v}_i$ est un vecteur propre de $\Delta_1 \cdot \gamma_D \cdot \Delta_1^*$, associé à la même valeur propre λ_i .

c) soit λ_n la plus grande valeur propre de γ_D (\vec{v}_n vecteur propre associé). Alors, $\Delta_1 \cdot \vec{v}_n$ est un vecteur propre de $\Delta_1 \cdot \gamma_D \cdot \Delta_1^*$ et donc de γ_x (puisque $\gamma_B = b^2 \cdot Id$) associé à la plus grande valeur propre de γ_x ;

d) donc, ayant estimé γ_x (observations) on peut calculer sa plus grande valeur propre λ_n et un vecteur propre \vec{w}_n associé à λ_n .

Supposons (hyp raisonnable) que le sous-espace propre associé à μ_n soit de dimension 1, alors

$$\vec{w}_n = \alpha \cdot \Delta_1 \cdot \vec{v}_n \quad (\alpha \text{ scalaire complexe})$$

\vec{w}_n et \vec{v}_n étant connus on détermine Δ_1 et on en déduit la position de la source.

Par exemple dans le cas où on considère une antenne linéaire à capteurs équirépartis, les paramètres se calculent aisément

$$\sigma_s^2 = \frac{\mu_n - \lambda_n - 1}{\lambda_n - \lambda_n - 1} ; \theta_1 \text{ (gisement du bruiteur) :}$$

$$\frac{\sigma}{2\pi d \nu} \text{Arc cos} \left(\frac{z_0}{z'_0} \cdot \frac{z'_1}{z_1} \right) = \theta_1$$

$$b^2 = \mu_n - \lambda_n \cdot \sigma_s^2 \quad \text{ou: } \vec{w}_n^t = (z'_0, \dots, z'_p) \text{ et } \vec{v}_n^t = (z_0, \dots, z_p)$$

En conclusion on peut dans ce cas déterminer tous les paramètres de la source et du bruit.

2. on ne suppose plus: $\gamma_B = b^2 \cdot Id$

Dans ce cas le problème devient bien plus complexe ;

on sait qu'il existe une matrice U telle que : $U^* \cdot B \cdot U = Id$

$$\rightarrow U^* \cdot \gamma_x \cdot U = \sigma_s^2 (U^* \Delta_1 \gamma_D \Delta_1 U) + b^2 Id$$

Mais la difficulté est que $U^* \Delta_1$ n'est pas en général une matrice unitaire, la méthode précédente n'est donc pas directement applicable.

Toutefois on peut encore déterminer les paramètres si la matrice γ_D n'est pas de rang maximal. En effet, dans ce cas b^2 est la plus petite valeur propre de $U^* \cdot \gamma_x \cdot U$, et la méthode précédente s'applique à : $\gamma_x = \tilde{\gamma}_x \cdot B$

3.2. Imagerie pour plusieurs sources (3)

L'impossibilité de résoudre le problème pour plusieurs sources et pour des matrices de distorsion de rang maximal conduit à étudier des méthodes de moindres carrés, on écrit :

$$\gamma_x^M = \sum_{i=1}^{n'} \sigma_i^2 \cdot \tilde{\gamma}_{\theta_i} + b^2 \cdot B \quad (\theta_i, \text{ paramètres de position fixés et: } \tilde{\gamma}_{\theta_i} = \Delta_i \cdot \gamma_D \cdot \Delta_i^*)$$

et on cherche la matrice modèle γ_x^M s'approchant au mieux de la matrice des observations γ_x au sens des moindres carrés matriciels, la solution est alors la projection orthogonale de γ_x sur le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par : $\{\tilde{\gamma}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\gamma}_{\theta_n'}\}$

Le nombre n' de directions "scrutées" augmente la finesse d'analyse mais $n'+1$ doit rester inférieur (et dans la pratique assez largement inférieur) à la dimension du sous-espace des matrices hermitiennes, soit $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$

En conclusion, l'existence de fluctuations de fronts d'ondes modifie assez profondément l'application des méthodes à "haute résolution".

4 - ESTIMATION AU SENS DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Un grand nombre de cas peut être envisagé (3), on se bornera ici au cas de signaux aléatoires centrés.

4.1. Etude pour une source unique

a) On suppose l'observation gaussienne et la matrice de bruits γ_B connue et on appelle signal utile ce qui vient de la direction θ . On note σ^2 (ou σ_θ^2) la puissance de ce signal utile. \vec{x} étant l'observation, la fonction de vraisemblance est donc :

$$P_{\vec{x}|\sigma}(\vec{x}) = \pi^{-n} \cdot \det^{-1}(\gamma_x(\sigma)) \cdot \exp(-\vec{x}^* \cdot \gamma_x^{-1}(\sigma) \cdot \vec{x})$$

$$\text{avec } \gamma_x(\sigma) = \sigma^2 \cdot \tilde{\gamma}_\theta + \gamma_B ; (\tilde{\gamma}_\theta = \Delta_\theta \gamma_D \Delta_\theta^*)$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} P_{\vec{x}|\sigma}(\vec{x}) = \alpha \leftrightarrow \vec{x}^* \cdot \gamma_x^{-1}(\sigma) \cdot \tilde{\gamma}_\theta \cdot \gamma_x^{-1}(\sigma) \cdot \vec{x} = \text{tr}(\tilde{\gamma}_\theta^{-1}(\sigma) \cdot \tilde{\gamma}_\theta)$$

Cette équation ne faisant pas intervenir explicitement σ , il est nécessaire de la développer en fonction de σ pour la résoudre. Pour cela, on utilise une méthode de décomposition matricielle :

soit: $\tilde{\gamma}_\theta = L \cdot L^*$ (une telle décomposition est possible car $\tilde{\gamma}_\theta$ est positive)



on a :

$$(\sigma^2 \tilde{\gamma}_0 + \gamma_B)^{-1} = \gamma_B^{-1} - \sigma^2 \gamma_B^{-1} L (Id + \sigma^2 L^* \gamma_B^{-1} L)^{-1} L^* \gamma_B^{-1}$$

d'où :

$$\text{tr} (\gamma_X^{-1} (\sigma) \tilde{\gamma}_0) = \text{tr} [A - \sigma^2 A (Id + \sigma^2 A)^{-1} A]$$

avec $A = L^* \gamma_B^{-1} L$

or $A - \sigma^2 A (Id + \sigma^2 A)^{-1} A = (A^{-1} + \sigma^2 Id)^{-1}$

donc: $\text{tr} [(\gamma_B + \sigma^2 \tilde{\gamma}_0)^{-1} \tilde{\gamma}_0] = \text{tr} [(A^{-1} + \sigma^2 Id)^{-1}]$

de même:

$$\tilde{X}^* \gamma_X^{-1} (\sigma) \tilde{\gamma}_0 \gamma_X^{-1} (\sigma) \tilde{X} = \|(Id + \sigma^2 A)^{-1} L^* \gamma_B^{-1} \tilde{X}\|^2$$

or A est hermitienne, elle est donc diagonalisable :
 $U^* A U = D \quad U \in \mathcal{U}_n$

$$\Rightarrow \text{tr} [(A^{-1} + \sigma^2 Id)^{-1}] = \text{tr} [(\sigma^2 Id + D^{-1})^{-1}]$$

$$\Rightarrow \tilde{X}^* \gamma_X^{-1} (\sigma) \tilde{\gamma}_0 \gamma_X^{-1} (\sigma) \tilde{X} = \|(Id + \sigma^2 D)^{-1} U^* L^* \gamma_B^{-1} \tilde{X}\|^2$$

avec: $\gamma_X^R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \tilde{X}_i^*$

Alors la Hessienne de la fonction g a pour terme général :

$$H(i, j) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = -b \left\{ \gamma_X^{M-1} (2\gamma_X^R - \gamma_X^M) \gamma_X^{M-1} \tilde{\gamma}_0 \gamma_X^{M-1} \tilde{\gamma}_0 \right\}$$

soit : $\tilde{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ un vecteur de \mathbb{R}^{n+1}

alors : $\tilde{X}^* H \tilde{X} = \sum_{i,j=1}^{n+1} x_i^* H(i, j) x_j$
 $= -b \left\{ \gamma_X^{M-1} (2\gamma_X^R - \gamma_X^M) \gamma_X^{M-1} C^* \gamma_X^{M-1} C \right\}$

avec: $C = \sum_{i=1}^{m'} x_i \tilde{\gamma}_0 i + x_{m'+1} B$

Supposons la matrice $(2\gamma_X^R - \gamma_X^M)$ positive, alors $\gamma_X^{M-1} (2\gamma_X^R - \gamma_X^M) \gamma_X^{M-1}$ est positive ; elle admet donc une décomposition de Choleski $T.T^*$ ainsi que γ_X^{M-1} (décomposition SS^*).

Alors : $\tilde{X}^* H \tilde{X} = -\text{tr} (T.T^* C.S.S^* C) = -\text{tr} [(T^* C S)(S^* C.T)]$
 $= -\|S^* C.T\|_H^2 < 0$

L'équation de vraisemblance prend alors une forme explicite en σ :

$$\boxed{-\sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_k}{1 + \sigma^2 \lambda_k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{|\gamma_k|^2}{(1 + \sigma^2 \lambda_k)^2} = 0}$$

où : γ_k est la k-ième composante du vecteur $\tilde{\gamma} = U^* L^* \gamma_B^{-1} \tilde{X}$

λ_k est la k-ième valeur propre de A .

En réduisant au même dénominateur on voit que σ^2 est solution d'une équation polynomiale de degré $4n - 2$.

b) Si on connaît γ_B uniquement sous la forme paramétrique $\gamma_B = b^* B$, les inconnues à estimer sont σ^2 et b^* . On peut alors utiliser la même méthode que précédemment et obtenir le même type d'équation.

c) L'extension de cette méthode à plusieurs sources amène à utiliser une méthode de modélisation de la matrice interspectrale du type du § 3.2 :

$$\gamma_X^M = \sum_{i=1}^{n'} \alpha_i \tilde{\gamma}_0 i + \beta B$$

$\tilde{\gamma}_0 i$: matrice interspectrale due à la source numéro i .

Si on suppose que l'on dispose de N vecteurs observations indépendants, la fonction de vraisemblance peut s'écrire :

$$g(\gamma_X^M, \gamma_X^R) = -\log \det (\gamma_X^M) - \text{tr} (\gamma_X^M^{-1} \cdot \gamma_X^R)$$

La fonction $(-g)$ est donc convexe sur l'ensemble (convexe) des matrices γ_X^M telles que : $2\gamma_X^R - \gamma_X^M$ soit positive. Par le même raisonnement on peut prouver l'ellipticité de (g) et la convergence des méthodes de gradient et d'itération inverse (4).

Toutefois la convexité de $(-g)$ n'existe pas relativement aux θ_i dans un domaine aussi "grand" il paraît donc indispensable de fixer les directions de "scrutation" θ_i et de déterminer (θ_i) et b . On peut, cependant remarquer, qu'on peut estimer plusieurs paramètres du bruit, ce qui peut être très important.

5 - ESTIMATION AU SENS DU MAXIMUM D'ENTROPIE DANS LE CAS D'UN FRONT D'ONDE FLUCTUANT

On définit (1) la densité spectrale multidimensionnelle par :

$$P(\nu, \vec{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_E \Gamma(\tau, \vec{r}) \exp(-2i\pi(\nu \cdot \tau - \vec{R}^* \cdot \vec{r})) d\tau d\vec{r}$$

\vec{R} : vecteur d'onde, $\Gamma(\tau, \vec{r})$: fonction d'intercorrélation de deux capteurs séparés par \vec{r} ; pour une antenne linéaire on prend pour un axe de coordonnées l'axe de l'antenne et on suppose être dans un plan, donc :

$$\vec{R}^* \cdot \vec{r} = \left(\frac{\nu}{c}\right) r_x \cos(\theta)$$

où: θ est l'angle du bruiteur avec l'antenne.

L'introduction de fluctuations de fronts d'onde implique qu'on peut écrire

$$\gamma_X^{(m, n)} = \int_{-W/2}^{W/2} P(\nu, k) \exp(-2i\pi k \cdot (m-n)\delta) f_{m, n}(k) dk$$

avec : $\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{\nu}{c} \cos \theta \cdot c^{-1} \\ \delta : \text{distance intercapteurs} \\ W : \text{largeur de bande spatiale} \end{array} \right.$

$f_{m,n}$ étant une fonction dépendant des propriétés statistiques des fluctuations.

Le problème est donc de déterminer $P(v, k)$ solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_x(m, n) &= -\frac{1}{2i\pi\delta} \oint P(v, k) \cdot z^{m-n-1} f_{m,n}(z) dz \\ \text{et} \quad H &= - \int_{-W/2}^{W/2} \text{Log } P(v, k) dk \quad \text{maximum} \\ z &= \exp(-2ik\pi\delta) \end{aligned} \right.$$

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange on montre que :

$$P(v, k) = \frac{1}{\sum_{m,n} d_{m,n} \cdot z^{m-n} \cdot f_{m,n}(z)} = \frac{1}{\sum_{-N}^N b_j \cdot z^j}$$

Le problème est de déterminer les multiplicateurs $d_{m,n}$. Pour cela on peut envisager deux types de méthodes :

1. On utilise un développement en série de Laurent de $f_{m,n}(z)$, alors :

$$\sum_{-N}^N b_j \cdot z^j = m \cdot (\vec{V}^* \cdot \vec{A}) \cdot (\vec{A}^* \cdot \vec{V}) \quad \begin{aligned} \vec{V}^t &= \{1, z, \dots, z^N\} \\ \vec{A}^t &= \{ \dots, f_j(z) \} \end{aligned}$$

et on peut déterminer les $\{A_j\}$

2. On utilise la théorie de la dualité (2)

6 - CONCLUSION

L'approche théorique présentée n'est, évidemment, pas exhaustive. D'autres méthodes ont déjà été proposées dans la littérature, et en particulier dans (3). Une caractéristique commune de toutes ces méthodes est l'important volume de calcul nécessaire dès qu'on s'écarte des cas simples. Toutefois certaines applications telles que le sonar ou le radar requièrent une amélioration du contraste spatial qui peut justifier l'utilisation de tels principes.

Parallèlement à ces études théoriques, nous avons entrepris des travaux sur ordinateur pour estimer les performances de ces méthodes sur des signaux d'antennes sonar simulés et réels.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) T.E. Barnard. Two maximum entropy beamforming algorithms for equally spaced line arrays IEEE. Vol ASSP-30 n°2 April 1982
- (2) SW Lang and J.H. Mac Clellan. Multidimensional MEM Spectral Estimation IEEE. Vol ASSP-30 n°6 December 1982
- (3) J.P. Le Cadre. Thèse de Doctorat de 3ème cycle INPG. Juillet 1982
- (4) J.P. Le Cadre. Méthodes itératives en traitement d'antennes. Note ET/LD, GERDSM. Le Brusac.

Fig 1

ENDE 3

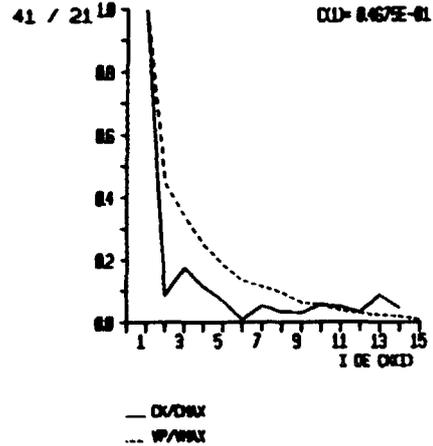
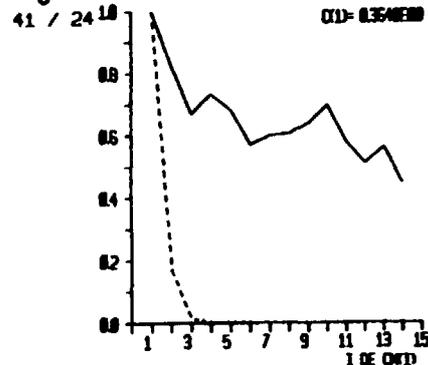


Fig 2



On présente ici des résultats expérimentaux obtenus à partir de 15 hydrophones. Le signal était émis à fréquence pure (basse fréquence), et on se trouvait à très fort rapport signal à bruit (lors de l'émission). On présente en pointillés la courbe des valeurs propres de la matrice interspectrale des observations obtenue par la méthode du périodogramme (VP/VP Max) et en traits pleins la courbe des modules des moyennes des éléments de la k-ième diagonale (de 1 à 15, CK/CK max).

Sur la figure (1) se trouvent les résultats correspondant au bruit seul et sur la figure (2) on trouve les résultats correspondant au signal seul.

.../...



On constate que l'allure des courbes est sensiblement différente, dans le cas de la figure (2) on remarque une seconde valeur propre non négligeable, quoiqu'assez faible. Cependant, il faut tenir compte de la précision de l'estimation.