

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



211

NICE du 16 au 20 MAI 1983

## ANALYSE SPECTRALE DIFFERENTIELLE UNE NOUVELLE APPROCHE DE LA NOTION DE FREQUENCE INSTANTANEE

P. PERIO, V. GIBIAT, F. WU, S. CHAINTREUIL

Laboratoire de Cristallographie et Physique des Matériaux, Bât. 490, Université Paris-XI 91405 ORSAY Cédex

### RESUME

L'intérêt des représentations temps-fréquence pour les signaux d'origine physique n'est plus à démontrer. Néanmoins les techniques habituelles utilisant soit la transformée de HILBERT soit les spectres à court terme présentent des inconvénients majeurs ; les premières ne sont pas causales d'où les difficultés de mise en oeuvre, les secondes dépendent de manière très critique du choix de la fenêtre temporelle. Ces diverses techniques conduisent à une représentation énergétique du signal en renonçant à l'emploi de la phase.

Nous proposons une nouvelle technique basée sur le suivi temporel des coefficients complexes  $F(n) = F_n \exp i\phi_n$  de la T.F.D. calculée sur une fenêtre rectangulaire glissante de durée fixe T.

Son implémentation sur un micro-ordinateur de faible puissance permet déjà les tâches de diagnostic en autorisant une résolution telle que  $\Delta t \cdot \Delta \nu < 10^{-3}$ .

Les possibilités de la méthode sont illustrées par des études de signaux synthétiques (modulations de phase et d'amplitude, battements, etc...) et de signaux réels.

### SUMMARY

A time-frequency representation is often useful when not prerequisite.

So far, the conventional procedures refer to analytic signal after HILBERT filtering or th short-term spectra.

The first approach, beside implementation difficulties suffers from being not causal which is in fact the deep reason for these difficulties. The second one depends critically on the segmentation (i.e. on the choice of the time window). Both apply to an energy representation, i.e. renounce the use of phase.

We developped an original fast algorithm giving the time derivative of the DFT complex coefficients through a constant-duration gliding rectangular time-window. For coherent signals, the evolution of these terms is shown to be correlated to a causal description of the instantaneous frequencies and powers through their time-evolution.

Implementation on a micro-computer, allows diagnostic tasks with a high resolution :  $\Delta \nu \cdot \Delta t < 10^{-3}$ .

The performances are illustrated on various synthetic signals (beats, amplitude and frequency modulations....) and several actual physical signals.



Introduction.

La notion de fréquence instantanée, naturelle dans la vie de tous les jours (partitions de musique ou vitesse instantanée de rotation d'un moteur) est incompatible avec la transformation de Fourier qui définit le passage entre deux duals découplés.

La transformation intégrale est inaccessible pratiquement (les signaux sont souvent trop étendus et de toute façon numérisés) : les traitements se font donc toujours sur des tranches finies de signal.

Ceci est légitime à condition de conserver le lien d'évolution cohérente entre segments. Or ce lien est la phase des transformées partielles, qui est éliminée dans tout traitement quadratique - i.e. énergétique, du signal.

Nous proposons un traitement linéaire basé sur le suivi temporel des coefficients complexes de la T.F.D..

I. Définition des fréquences instantanées.

Toute fonction peut, sur un support borné, être représentée par une somme harmonique de Fourier, qui représente aussi la fonction périodisée obtenue par la répétition de la "tranche" considérée. Pour un signal temporel  $f(t)$ , la transformée de Fourier donne la représentation fréquentielle :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-2i\pi\nu t) \cdot dt \quad \text{et}$$

$$F(n, t) = F(\nu, t) \cdot \delta(\nu - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t') \cdot \exp(-2i\pi\nu t') \cdot dt'$$

$F(n, t) = F(\nu, t) \cdot \delta(\nu - \frac{n}{T})$  est un spectre discret et:

$$f(t') = \sum_n F(n, t) \cdot \exp \frac{2i\pi n t'}{T}, \quad t' \in [t-T/2, t+T/2]$$

L'application du théorème de convolution donne [1] :

$$(1) F(n, t) = \left\{ F(\nu) * \left[ \frac{\sin \omega T/2}{\omega \cdot T/2} \cdot \exp(-i\omega t) \right] \right\} \cdot \delta(\nu - \frac{n}{T})$$

Pour un signal purement sinusoïdal,

$$f(t) = \frac{1}{2} A \left[ \exp(i\varphi) \cdot \delta(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}) + \exp(-i\varphi) \cdot \delta(\nu + \frac{\omega_0}{2\pi}) \right]$$

d'où, avec  $\omega_n = 2\pi n / T$

$$(2) F(n, t) = \frac{1}{2} A \left[ \frac{\sin(\omega_0 - \omega_n) \cdot T/2}{(\omega_0 - \omega_n) \cdot T/2} \cdot \exp i[(\omega_0 - \omega_n)t + \varphi] + \frac{\sin(\omega_0 + \omega_n) \cdot T/2}{(\omega_0 + \omega_n) \cdot T/2} \cdot \exp -i[(\omega_0 + \omega_n)t + \varphi] \right]$$

et comme:  $\sin(\omega_0 + \omega_n) \cdot T/2 = \sin[(\omega_0 - \omega_n)T/2 + \omega_n T]$   
 $= \sin[(\omega_0 - \omega_n) \cdot T/2]$   
 $= \sin(\Delta\omega_n \cdot T/2)$

$$(3) F(n, t) = \frac{1}{2} A \frac{\sin \Delta\omega_n T/2}{\Delta\omega_n \cdot T/2} \exp i(\Delta\omega_n \cdot t + \varphi) \times \left\{ 1 + \frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n + \Delta\omega_n} \cdot \exp -2i(\omega_0 t + \varphi) \right\}$$

En négligeant les oscillations du terme

$$\frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n + \Delta\omega_n} \exp -2i(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{et identifiant } F(n, t) = F_n(t) \cdot \exp i\Theta(t)$$

il vient finalement :

$$F_n(t) \approx \frac{1}{2} A \frac{\sin \Delta\omega_n \cdot T/2}{\Delta\omega_n \cdot T/2} \quad (4)$$

$$\Theta_n(t) \approx \Delta\omega_n \cdot t + \varphi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi n}{T} + \frac{d\Theta_n}{dt} \quad (5)$$

On montre facilement que si :

$$f(t) = A(t) \cos \phi(t) = A(t) \cdot \int_{-\infty}^t \omega(t') \cdot dt'$$

les relations (4) et (5) restent valables pour

$\bar{A}(t)$  et  $\bar{\omega}(t)$ , moyennes de  $A(t)$  et  $\omega(t)$  définies sur l'intervalle  $[t - T/2, t + T/2]$  [2], donnant ainsi une définition et une mesure des puissances et fréquences instantanées.

II. Evolution temporelle des coefficients de la T.F.D. (Analyse Harmonique Continue).

Le signal étant échantillonné à l'acquisition ou pour le traitement numérique, la fenêtre glissante est définie par  $p \cdot \Delta t \in [(m - N + 1) \Delta t, m \Delta t]$  ce qui donne les définitions en transformées de Fourier discrètes (TFD) :

$$F(n, m) = \frac{1}{N} \sum_{p=m-N+1}^m f(p) \cdot \exp \frac{-2i\pi n p}{N} ; N \Delta t = T$$

ANALYSE SPECTRALE DIFFERENTIELLE  
UNE NOUVELLE APPROCHE DE LA NOTION DE FREQUENCE  
INSTANTANEE

D'où, par glissement  $m \rightarrow m+1$

$$F(n, m+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=m-N}^{m+1} f(k) \cdot \exp\left[-\frac{2i\pi n k}{N}\right] \quad \text{et}$$

$$F(n, m+1) - F(n, m) = \frac{1}{N} [f(m+1) - f(m+1-N)] \cdot \exp\left[-\frac{2i\pi n(m+1)}{N}\right]$$

$$(7) \frac{F(n, m+1) - F(n, m)}{\Delta t} = \frac{1}{T} [f(m+1) - f(m+1-N)] \cdot \exp\left[-\frac{2i\pi n(m+1)}{N}\right]$$

qui donnent une loi de récurrence pour le calcul numérique des  $F(n, m) = F_n(m) \cdot \exp i \theta_n(m)$ .  
A la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on aurait :

$$(8) \frac{dF(n, t)}{dt} = \frac{1}{T} [f(t) - f(t-T)] \cdot \exp\left[-\frac{2i\pi n t}{T}\right]$$

et, par identification des parties réelles et imaginaires [3] :

$$(9) \begin{cases} \frac{dF_n(t)}{dt} = \frac{1}{T} [f(t) - f(t-T)] \cdot \cos\left[\frac{2\pi n t}{T} + \theta_n(t)\right] \\ \frac{d\theta_n(t)}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{[f(t) - f(t-T)]}{F_n(t)} \cdot \sin\left[\frac{2\pi n t}{T} + \theta_n(t)\right] \end{cases}$$

Les relations (6) à (9) donnent la définition différentielle de l'analyse harmonique continue et sont la base des algorithmes de calcul numérique de l'Analyse Spectrale Différentielle (A.S.D.).

L'implémentation ne nécessite même pas le calcul d'une première T.F.D. Si  $f(t) = 0$  pour  $t < t_0$ , la relation (6) initialise le calcul à  $F_n = 0$ ,  $\theta_n$  et  $t < t_0 - T/2$ .

Pour un signal de fréquence instantanée  $\frac{\omega(t)}{2\pi}$ , la contribution principale  $F_n$  sera dans la bande  $n$  :

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{T} < \omega(t) < \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{T}$$

dans laquelle  $\left|\frac{\Delta\theta_n}{\Delta t}\right| < \frac{\pi}{T}$  et pour toutes les autres

bandes  $n'$ ,  $\left|\frac{\Delta\theta_{n'}}{\Delta t}\right| > \frac{\pi}{T}$  toutes ces mesures conduiront

à une valeur unique de fréquence instantanée :

$$\bar{\omega}(t) = \frac{2\pi n}{T} + \frac{\Delta\theta_n}{\Delta t} \quad (10)$$

Le rapport  $R_n = \frac{F_n^2(t)}{1/\pi \int f^2(t) dt}$  donne l'importance de la contribution de la bande  $n$  et le rapport corrigé

$$R'_n = R_n \left(\frac{\sin \Delta\omega_n T/2}{\Delta\omega_n \cdot T/2}\right)^2 \quad \text{l'importance de la composante } A(t) \text{ dans le signal total, fig. (1).}$$

La précision spectrale est excellente, de l'ordre de  $\Delta t \cdot \Delta \nu = 10^{-3}$  et la résistance au bruit remarquable, fig. 2. Celle-ci est évidemment fonction du sur-échantillonnage. Avec une fenêtre temporelle de 120 échantillons, on suit une composante unique jusqu'à -24 dB S/B pour une saisie sur 8 bits. Evoluant comme  $N^2$ , la limite de détection passerait à 0 dB pour une fenêtre de 8 échantillons et + 5 dB pour un signal en limite de bande.

La vitesse de réaction ou résolution temporelle est de l'ordre de  $T/2$  fig. (3). C'est également le délai d'élimination d'une entrée fautive ou d'une erreur ponctuelle de calcul numérique.

La fig. 4 donne quelques exemples d'analyses de signaux modulés en amplitude ou fréquence.

Les Algorithmes ont été implémentés sur micro-ordinateurs. Le traitement prend 0,2 sec par point sur Apple II avec sortie sur écran d'oscillographe numérique (Nicolet 4094) et 0,03 sec sur SIRIUS avec visualisation sur console à haute résolution.

III. Décomposition d'un signal en composantes discrètes.

Si l'emploi d'une fenêtre temporelle rectangulaire simplifie le traitement numérique, on pourrait craindre que les lobes bien connus de sa transformée - le sinus cardinal - n'introduise des couplages inextricables entre composantes de signaux complexes. En fait, il n'en est rien, aussi longtemps que ces composantes sont discrètes, ce qui est le cas le plus fréquent pour les signaux physiques déterministes.

Pour éclairer la situation, considérons d'abord le cas de deux composantes proches :

$$f(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t = A(t) \cos \phi(t) \\ A_2/A_1 = \epsilon \leq 1, \quad |\omega_1 - \omega_2| < \pi/T$$

En passant en notations complexes, on écrit immédiatement :

$$f(t) = A_1 \cdot \exp i\omega_1 t \cdot [1 + \epsilon \exp i(\omega_2 - \omega_1)t] \quad (11)$$



ANALYSE SPECTRALE DIFFERENTIELLE  
UNE NOUVELLE APPROCHE DE LA NOTION DE FREQUENCE  
INSTANTANEE

Le crochet de (11) ne s'annulant jamais, la fréquence "moyenne" reste celle de la composante la plus importante, avec une modulation couplée d'amplitude et de phase à la fréquence  $(\omega_2 - \omega_1)$ .

Le diagramme de Fresnel - fig. 5 - montre que l'excursion de fréquence autour de  $\omega_1$  n'atteint jamais  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  et est plus grande vers l'extérieur de l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$ . L'écart maximal d'argument est donné par  $\sin(\bar{\omega}(t) - \omega_1 t) = r$  et les limites extrêmes de l'excursion de fréquence,  $(\omega_1 - \omega_2) \frac{r}{1-r}$  et  $(\omega_2 - \omega_1) \frac{r}{1+r}$  correspondent respectivement au minima et maxima de  $A(t)$  (opposition et conjonction de  $A_1$  et  $A_2$ ) [4].

La fig. (5) permet de comparer le comportement de  $(t)$  déterminé par ASD avec sa formulation analytique. L'accord - remarquable - vient du fait que les oscillations prévues par la formule (3) sont d'amplitude très faible par rapport aux contributions principales de  $A_1$  et  $A_2$ . Ces oscillations très rapides -  $2\omega_1, 2\omega_2 \gg |\omega_2 - \omega_1|$  se compensent d'ailleurs en partie par interférences. Pour un traitement de 8 bits, la dynamique de détection  $(A_2/A_1)^2$  peut atteindre - 30 db (fig. 5).

Le comportement pour plusieurs composantes telles que  $|\omega_n - \omega'_n| > \pi/T$  s'en déduit immédiatement. Si tous les  $A_n$  sont de même ordre de grandeur, les diaphonies ("leakage") induites de bande à bande resteront inférieures à la contribution principale dans la bande. Les oscillations introduites aux fréquences  $|\omega_n - \omega'_n| \gg \frac{2\pi}{T}$  s'atténuent par interférences et le comportement "régularisé" des  $A_n(t)$  et  $n(t)$  caractérise chaque composante individuelle.

Si une composante  $A_n$  est d'un ordre de grandeur supérieur aux autres, elle sera parfaitement identifiable dans sa bande propre et sa fréquence  $\omega_n$  déterminable avec une grande précision. Il suffit alors d'ajuster la fenêtre d'analyse à  $T = \frac{2\pi \cdot n}{\omega_n}$  pour supprimer toute diaphonie liée à cette composante principale. Les autres composantes se trouvent alors parfaitement découplées comme dans le cas précédent. On peut en plus rétrécir à volonté les bandes  $(n \pm \frac{1}{2}) \frac{1}{T}$  en accroissant la fenêtre d'analyse, au détriment évident de la résolution temporelle - ce qui n'a pas d'importance pour les signaux permanents. Pour des signaux évolutifs, le choix du compromis optimal est une affaire d'expérience.

La fig. (7) représente une partie de l'analyse en vibration libre d'un gong métallique. On y a déterminé 13 modes inharmoniques avec leur coefficient d'atténuation, la fréquence la plus élevée à la moitié de

la fréquence de Shannon. Les deux modes les plus proches n'étaient séparés que de 33 Hz - soit 1/8 de la bande d'analyse.

On peut évidemment envisager des signaux de plus haute complexité - avec des fréquences très serrées et des modulations très profondes et rapides - qu'aucun choix de fenêtre ne permette de ramener aux cas envisagés. Aucun traitement n'est universel et il est douteux qu'un traitement classique soit alors plus performant que l'ASD.

### Conclusion.

Le traitement proposé est économique en calculs et très performant. Il a été développé pour le traitement ou diagnostic de signaux déterministes - i.e. - dont le proche futur dépend du passé immédiat.

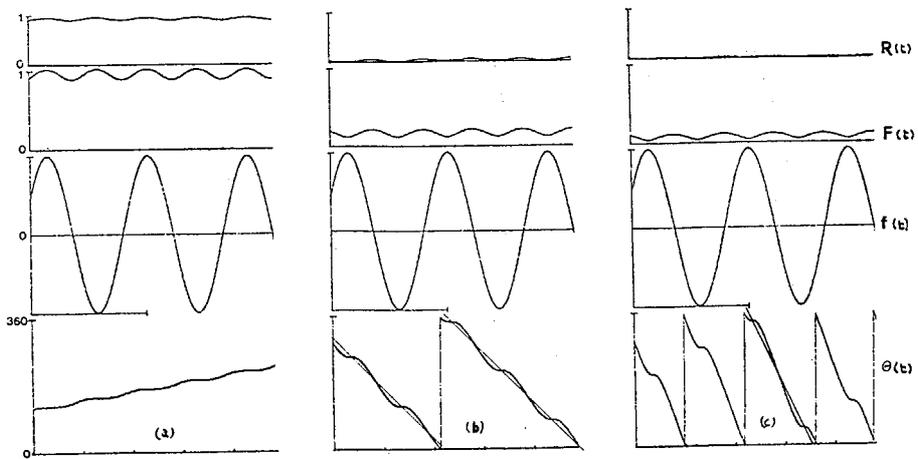
Son application à des signaux dont la caractéristique essentielle est leur évolution imprévisible ne doit être envisagée qu'avec prudence et cas à cas.

Un traitement assez voisin a été proposé par Flanagan [5]. Conçu uniquement pour le codage, il ne fait pas la différence entre les  $F(n,t)$  et  $A(n,t)$ . Papoulis [6] a proposé une relation de récurrence pour  $\frac{dF(n,t)}{dt}$  : son choix d'origine lui enlève la simplicité et l'efficacité de celle que nous proposons, mais les deux formulations sont fondamentalement identiques.

### Références.

- 1 F. WU et P. PERIO (1979).  
La phase en Acoustique musicale I.  
Journal de Physique 40, 799-810.
- 2 V. GIBIAT, F. WU, P. PERIO, S. CHAINTREUIL (1982)  
Analyse spectrale différentielle (A.S.D.).  
CRAS Paris 294, 633-636.
- 3 P. PERIO, V. GIBIAT, S. CHAINTREUIL, F. WU (1982)  
Décomposition d'un signal physique en composantes discrètes.  
CRAS Paris 294, 693-696.
- 4 P. PERIO, S. CHAINTREUIL, F. WU, V. GIBIAT, P. JARDIN (1983)  
L'analyse spectrale différentielle : mise en oeuvre, applications et extensions.  
CRAS Paris 296, 33-38.
- 5 J.L. FLANAGAN (1980)  
Parametric coding of speech spectra.  
J. Acoust. Soc. Am. 68, 412-419.
- 6 A. PAPOULIS (1982)  
Signal Analysis p 173-179 Mc Graw-Hill.

ANALYSE SPECTRALE DIFFERENTIELLE  
UNE NOUVELLE APPROCHE DE LA NOTION DE FREQUENCE  
INSTANTANEE



Sur toutes les figures,  $\theta(t)$ ,  $f(t)$ ,  $F(t)$  se rapportent aux définitions des formules (1) à (5),  $R_n(t)$  est défini au § II.

Figure 1. ASD. Composante unique analysée sur  $T \neq \omega/2\pi$ .

- (a) bande 1.  $(\bar{\omega} - 1/T) < \pi/T$
- (b) bande 2.  $\pi/T < \bar{\omega} - 2/T < 3\pi/T$
- (c) bande 3.  $3\pi/T < \bar{\omega} - 4/T < 5\pi/T$

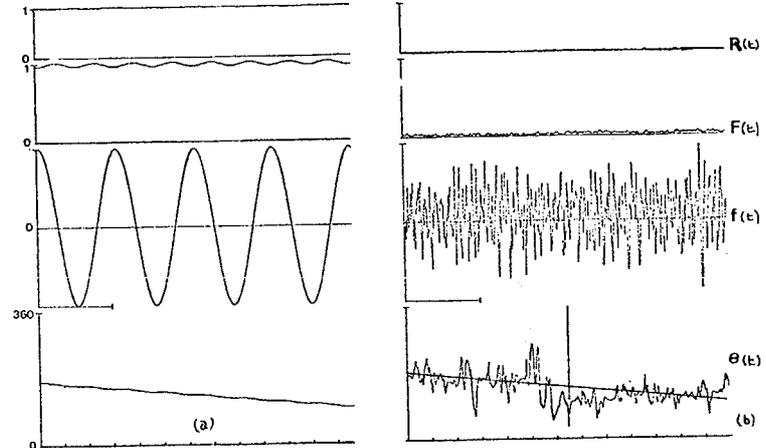


Figure 2. Résistance au bruit. (bande 1).

- (a) une composante synthétique décentrée.
- (b) mêmes conditions dans un bruit,  $S/B = -24$  dB.

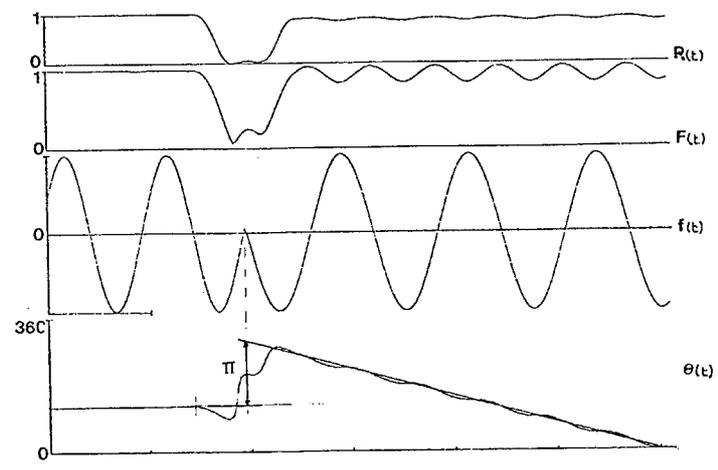


Figure 3. Résolution temporelle.

$$-\infty < t < t_0, \quad v = 100 \text{ Hz},$$

$$t_0 < t < \infty, \quad v = 80 \text{ Hz},$$

$$\Delta\phi_{t_0} = \pi$$

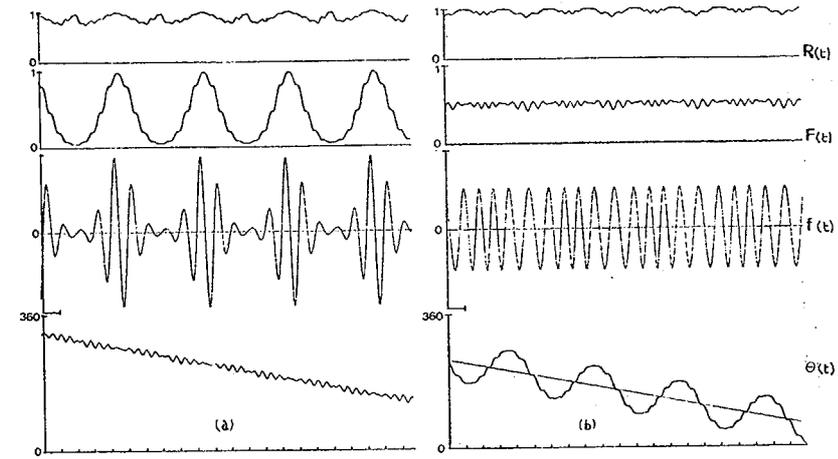


Figure 4. Signaux modulés synthétiques.

- (a) modulation d'amplitude,  $\Delta\phi/\Delta t = Ct^e, \Delta F/\Delta t = g(t)$ .
- (b) modulation de fréquence,  $\Delta\phi/\Delta t = \sin\Omega t + k, F(t) = Ct^e$ .



ANALYSE SPECTRALE DIFFERENTIELLE  
UNE NOUVELLE APPROCHE DE LA NOTION DE FREQUENCE  
INSTANTANEE

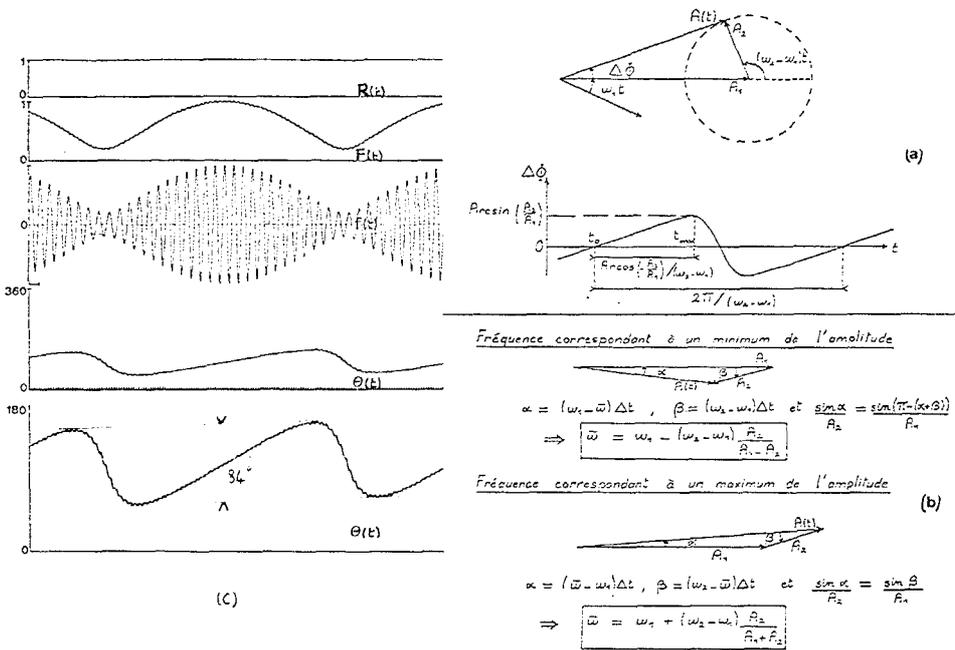


Figure 5. Battement entre 2 composantes inégales. Représentation de Fresnel.

(a)  $\Delta\phi = \int_{t_0}^t [\bar{\omega}(t') - \omega_1] dt'$

(b) extéma de  $[\bar{\omega}(t) - \omega_1]$

(c) ASD correspondante.

$r = A_2/A_1 = 2/3, \omega_2 > \omega_1$

agrandissement de  $\Delta\phi(t)$

$\Delta\phi_{max} = 4\mathcal{L}^{\circ} \Rightarrow r = 0,67$

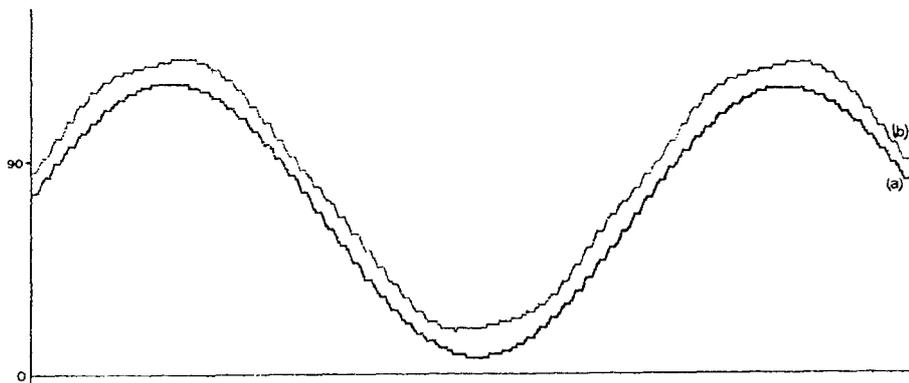


Figure 6. Limite de détection pour 2 composantes dans la bande.

(a)  $f_1(t) = \cos[2\pi(60)t + \sin(2\pi/2)t]$

(b)  $f_2(t) = f_1(t) + \frac{1}{30} \cos 2\pi(50)t$

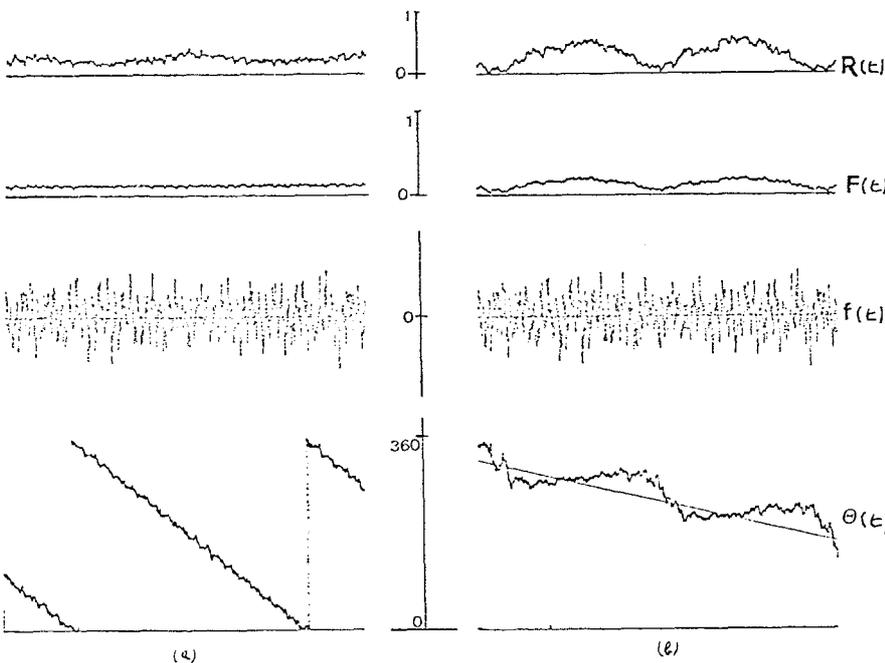


Figure 7. Détail d'analyse modale en vibration libre (gong). Composantes inharmoniques.

(a) bande 1,  $1/T = 239,23$  Hz,  $\nu_1 = 217,6$  Hz.

(b) bande 3,  $3/T = 717,70$  Hz, 2 composantes  $\nu_2 = 744$  Hz,  $\nu_3 = 711,4$  Hz,  $A_3/A_2 = 0,57$