

NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 16 au 20 MAI 1983

EXTRAPOLATION DES SIGNAUX LACUNAIRES

Pierre COMON * - Gérard LEJEUNE

C.E.P.H.A.G. (Laboratoire Associé au C.N.R.S.) BP.46, 38402 ST-MARTIN-d'HERES (FRANCE)

RESUME

Les signaux fortement perturbés par en-droits ne sont pas toujours traitables par les méthodes classiques de filtrage.

Nous nous proposons de nous ramener à un signal "lacunaire" en annulant simplement les passages indésirables. Le problème consiste alors à extrapoler le signal dans ces lacunes. Ceci pouvant se faire évidemment d'une infinité de manières, on est amené à adopter des hypothèses a priori sur le signal. Nous proposons trois procédures d'extrapolation correspondant à différents types de signaux :

- . Signal certain à bande spectrale limitée
- . Signal aléatoire auto-régressif
- . Signal aléatoire stationnaire au second ordre et de covariance connue.

L'application de cette méthode à divers exemples nous a conduit à des résultats intéressants, dépendant toutefois des hypothèses adoptées pour le signal étudié dans la procédure choisie.

SUMMARY

Classical filtering methods are not always efficient for signals strongly disturbed in parts.

By cutting out these troublesome parts, we change the signal into a "lacunar" signal. And our purpose is to extrapolate the signal within the gaps ; since there are many ways to carry out this extrapolation, we need a priori assumptions. We propose three extrapolation procedures, corresponding to different kinds of signals :

- . Band limited deterministic data
- . Auto-regressive random process
- . Second order stationary process of known covariance

This study led us to interesting results, but there is a strong dependence on the assumptions made concerning the signal in the chosen procedure.



1-INTRODUCTION

L'opération d'extrapolation consiste à créer artificiellement de nouvelles données à partir de données en nombre plus réduit. En pratique, cette opération peut avoir deux aspects :

- 1-Elargissement du support temporel d'une fonction
- 2-Modification des valeurs d'une fonction en des points déclarés aberrants.

Le premier aspect de ce problème a été étudié dans la littérature, dans le cas de signaux certains (cf [1],[2]). Nous nous intéresserons donc au deuxième aspect de ce problème uniquement qui lui est d'ailleurs connexe. En réalité, ce dernier se décompose en deux étapes :

2-1-Création de "lacunes" dans le signal par suppression des points aberrants. Cette opération étant très subjective et confiée à l'intuition de l'expérimentateur averti.

2-2-Extrapolation du "signal lacunaire" ainsi obtenu. C'est sur cette étape du traitement que nous allons nous pencher. Il est évident que, ne pouvant ajouter de nouvelles informations à celles déjà contenues dans le reste du signal donné, on se contentera de compléter "au mieux" les lacunes, en vue de traitements ultérieurs.

La procédure mise en oeuvre à cet effet dépendra d'une part du type de modélisation adopté (signal certain ou aléatoire), et d'autre part des hypothèses adoptées lors de cette modélisation (signal à bande limitée, stationnaire, auto-régressif...)

2-SIGNAUX CERTAINS

2-1 Position du problème

Une fonction certaine f_E est définie sur un ensemble réel E . On cherche à étendre le domaine de définition de f_E à un surensemble T de E , c'est-à-dire à extrapoler f_E sur T . Avant de passer en revue différents procédés envisageables, nous allons préciser les notations et les hypothèses adoptées.

a) Notations :

Soit $L^2(T)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur T .

On définit la relation d'équivalence sur $L^2(T) : x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1$ coïncide avec x_2 sur E . On notera \mathcal{E}_x la classe de la fonction x dans l'espace quotient $L^2(T) / \mathcal{R}$.

Soit $K(t,u)$ une fonction continue sur $T \times T$, et appartenant à $L^2(T)$. Alors on définit l'espace à noyau reproduisant $NR(K)$ par :

$$NR(K) = \left\{ f \in L^2(T) / \forall y \in T, f(y) = \int_T f(t) K(t,y) dt \right\} \quad (1)$$

En outre, on notera P_E le projecteur orthogonal de $L^2(T)$ sur $L^2(E)$.

Si f_E est une fonction de $L^2(E)$, soit f_T la fonction de $L^2(T)$ de support E et coïncidant avec f_E sur E .

Extrapoler f_E sur T revient à déterminer un représentant de la classe \mathcal{E}_{f_E} . Par exemple, si on choisit f_T comme représentant, la fonction extrapolée prend la valeur nulle dans les lacunes. Ainsi, on voit que l'extrapolation f de f_E est définie à une fonction de \mathcal{E}_0 additive près :

$$f = f_T + \alpha ; \alpha \in \mathcal{E}_0 \quad (2)$$

Nous voyons qu'il est nécessaire de disposer d'une hypothèse supplémentaire pour résoudre ce problème.

b) Choix d'une hypothèse supplémentaire :

Nous avons choisi d'imposer à f , extrapolation de f_E , d'appartenir à $L^2(B)$, espace des fonctions de carré sommable, et le support spectral inclu dans $[-B,B]$. Le choix de cette contrainte présente les avantages suivants :

I-La contrainte est peu restrictive car, dans la pratique, les signaux traités sont à bande limitée et d'énergie finie.

II-Les fonctions de $L^2(B)$ sont analytiques c'est-à-dire extrapolables sur tout \mathbb{R} à partir de la seule connaissance de la fonction au voisinage d'un point.

III-Il résulte du II que d'un point de vue théorique, s'il existe une extrapolation f de f_E , elle est unique :

$$\mathcal{E} \cap L^2(B) = \{0\} \quad (3)$$

IV-L'espace Hilbertien $L^2(B)$ admet le noyau reproduisant suivant :

$$K(t,u) \triangleq 2B \cdot \text{sinc}[2\pi B(t-u)] \quad (4)$$

c'est à dire que $L^2(B) = NR(K)$. De plus, si on note $NR(K_E)$ l'espace à N.R. associé au noyau $K_E = K / \text{EXE}(t,u)$, restriction de K à $E \times E$, alors

$$P_E \{ L^2(B) \} = NR(K_E) \quad (5)$$

D'après ce qui vient d'être dit, si f_E comporte des HF, l'extrapolation sur $L^2(B)$ ne sera pas possible. Cette condition, dont nous avons dit plus haut qu'elle était peu restrictive, s'exprime par le fait que :

$$f_E \in NR(K_E) \quad (6)$$

c) Procédures d'extrapolation :

Le problème de l'extrapolation dans une lacune ressemble beaucoup au problème de l'interpolation d'une fonction f_E entre deux points connus. Ce dernier problème ayant été étudié dans la théorie des fonctions spline, on pourrait imaginer des solutions similaires. En réalité, toutes les méthodes mises en oeuvre dans ce cas nous intéressent peu, car approximant la fonction f_E par des fonctions n'appartenant pas à $L^2(B)$, elles ne sont pas compatibles avec notre hypothèse du 2-1b. Par exemple, la remarque II suggérerait de développer f_E en série de Taylor ; cette série, devant fatalement être tronquée, représentera une approximation polynomiale de f , qui n'appartiendra pas à $L^2(B)$. Nous écarterons donc cette catégorie de méthodes et nous nous pencherons sur des procédures utilisant la propriété IV.

Dans toute la suite du § 2, nous nous plaçons dans le cas où $T = \mathbb{R}$, et $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$; où les E_i sont des fermés bornés disjoints de \mathbb{R} . Ensuite, nous adopterons les hypothèses expliquées précédemment :

$$f_E \in NR(K_E) \quad (6)$$

$$L^2(B) = NR(K) \text{ et } f \in NR(K) \quad (7)$$

2-2) Procédures itératives :

On note P_B le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(B)$, et $\Omega \triangleq P_B \circ P_E$. C'est à dire que :

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \Omega(x)(t) = \int_E x(u) K(t,u) du \quad (8)$$

Soit Z_0 la filtrée passe-bas de f_E :

$$Z_0 = P_B(f_E) \quad (9)$$

Z_0 ne peut constituer une extrapolation f de f_E puisque $Z_0(t)$ ne coïncide pas avec $f_E(t)$ sur E .

Si on renverse le problème, on constate qu'il faut que : $P_E(f) = f_E$ (10)
 D'après (9) et (10), il vient que $Z_0 = \Omega(f)$ (11)

On cherche à inverser Ω dans $L^2(B)$; un procédé classique consiste à construire la suite :

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n-1} (I - \Omega)^i \cdot Z_0 \quad (12)$$

Ω étant continu, cette série converge pour tout $Z_0 \in L^2(B)$ SSI :

$$\|I - \Omega\|_{L^2(B)} < 1 \quad (13)$$

Sa limite est alors $f = \Omega^{-1}(Z_0)$. Mais $(I - \Omega)$ et $(P_B - \Omega)$ coïncident sur $L^2(B)$ (14)

$$\text{et} \quad \|P_B - \Omega\|_{L^2(B)} \leq \|P_B - \Omega\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (15)$$

D'autre part, sur $L^2(\mathbb{R})$, $(P_B - \Omega)$ est la composée de deux projecteurs : $(P_B - \Omega) = P_B \circ (I - P_E)$. Or, puisque $\mathcal{E}_0 = \{0\}$, il n'existe aucune fonction propre de P_B et $(I - P_E)$ à la fois. Autrement dit :

$$\|P_B - \Omega\| < \|P_B\| \cdot \|I - P_E\| \quad (16)$$

Et, d'après (15) : $\|I - \Omega\|_{L^2(B)} < 1$
 La suite (12) converge donc dans $L^2(B)$, ce qui est illustré par la figure A.

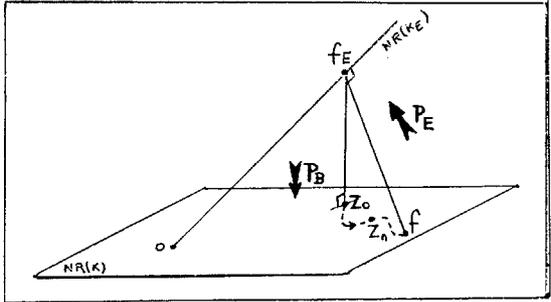


Figure A

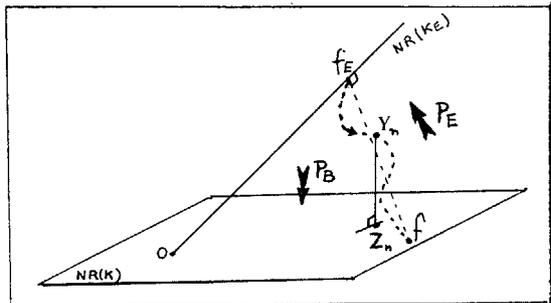


Figure B

En utilisant (14), on remarque que cette suite peut s'exprimer de manière récurrente par :

$$Z_{n+1} = Z_0 + P_B \circ (I - P_E)(Z_n) \quad (17)$$

On pourrait aussi, en s'inspirant de PAPOULIS [2], utiliser la suite définie par :

$$Y_0 = f_E ; P_B(Y_n) = Z_n \quad (18)$$

Ce qui peut également s'écrire de manière récurrente par

$$Y_{n+1} = Y_0 + (I - P_E) \circ P_B(Y_n) \quad (19)$$

Cette suite Y_n converge car la suite $(I - P_E)(Z_n)$ converge, en tant qu'image de la suite convergente Z_n par un opérateur continu. De plus, les suites Z_n et Y_n sont adjacentes car

$$\|Y_{n+1} - Z_n\| \leq \|P_E\| \cdot \|f - Z_n\|$$

En conséquence, Y_n converge aussi vers f , ce qui est illustré par la figure B.

2-3) Procédure directe utilisant les fonctions propres de Ω .

a) Présentation de la procédure :

Cette procédure utilise le fait que Ω est compact (nous le verrons en b), et que, par conséquent, toute fonction peut se décomposer sur la base orthonormée de ses fonctions propres. Les avantages sont les suivants :

- I-Toute décomposition tronquée est à bande limitée.
 - II-Toute l'énergie du signal est concentrée dans les premiers termes, car les valeurs propres forment une suite positive décroissant vers 0.
 - III-Le calcul de f devient plus aisé.
- Ce type de décomposition ne présente donc pas les inconvénients cités au 2-1c.

b) Compacité de Ω :

Soit Ω_E la restriction de Ω à $L^2(E)$; alors on a : $\Omega_E \circ P_E = P_E \circ \Omega$ (20)
 Il vient, en utilisant le fait que $K(t,u)$ est continue sur les compacts E_i et par application du Th d'Ascoli, que les Ω_{E_i} sont compacts (nous rappelons que $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$). Alors

Ω_E est compact car somme finie d'opérateurs compacts. Notons alors λ_j et φ_j ses valeurs propres et fonctions propres. D'autre part, il existe un homéomorphisme \mathcal{A} de $NR(K)$ sur $NR(K_E)$ et tel que $\mathcal{A} = P_E / NR(K)$ (21)
 Comme P_E est continu, $\Omega_E \circ P_E$ est compact. Donc, d'après (20), $P_E \circ \Omega$ est compact. Mais $\text{Im}(\Omega) = NR(K)$, donc $P_E \circ \Omega = \mathcal{A} \circ \Omega$. Il vient en composant par l'opérateur \mathcal{A}^{-1} , qui est continu que Ω est compact.

Remarque : Posons $\psi_j = \mathcal{A}^{-1}(\varphi_j)$.
 Alors : $\Omega_E(\varphi_j) = \lambda_j \varphi_j \Rightarrow \Omega_E \circ P_E(\psi_j) = \lambda_j \varphi_j$

Puis en utilisant (20) : $\mathcal{A} \circ \Omega(\psi_j) = \lambda_j \varphi_j$ (22)
 On voit, en composant par \mathcal{A}^{-1} que $\Omega(\psi_j) = \lambda_j \psi_j$, ce qui montre que ψ_j est fonction propre de Ω relativement à λ_j (de plus, Ω_E étant hermitien non négatif, λ_j sont toutes réelles positives ou nulles).

c) Mise en oeuvre de la procédure :

Ω_E étant compact, φ_j forment une base orthonormée de $NR(K_E)$ (et même une base orthogonale de $L^2(E)$...). Ω étant compact, ψ_j forment une base orthonormée de $NR(K)$. Donc, $\forall f_E \in NR(K), f_E = \sum a_i \varphi_i$. (23)

Dans la pratique, on se contente d'un nombre fini de termes : $f_E = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ (24)

Ceci n'est pas trop grave compte tenu des remarques I et II du 2-3 a.

Alors posons $f = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$. On a bien $f \in NR(K) = L^2(B)$, et $P_E(f) = f_E$, c'est-à-dire que f et f_E coïncident sur E . Il vient donc que f constitue l'extrapolation de f_E , approximée au au rang n . Cette procédure, directe, est extrêmement simple puisqu'il suffit de déterminer les coefficients a_i en décomposant f_E sur la base φ_i .

d) Remarques

d1) La définition des fonctions φ_i n'est pas sans rappeler les fonctions sphéroïdales aplaties (Prolate Spheroidal Wave Functions), largement étudiées dans la littérature, par exemple par SLEPIAN (REF[3]). En effet, nos fonctions φ_i sont les PSWF dans le cas où $E = [-T, T]$.

d2) Bien que nous n'ayons pas jugé bon de la passer sous silence, cette procédure s'avère peu pratique.



En effet, la définition des ψ_j dépend de B et de E, et on est obligé de les calculer à chaque fois lorsqu'on passe d'un traitement à un autre. De plus, leur calcul est très long. On est donc conduit à abandonner cette procédure pourtant séduisante.

2-4) Procédure utilisant la TFD

Tout ce qui précède a été exposé dans le cadre d'espaces Hilbertiens de dimension infinie. Dans la pratique, on se place en dimension finie puisque les signaux traités sont échantillonnés. En toute rigueur, l'opérateur Ω par exemple, peut être représenté par une matrice, et peut être inversé. Compte-tenu de la taille importante de ces matrices, on préférera de toutes façons des solutions soit itératives, comme celle du 2-2, soit "directes" basées sur des algorithmes rapides comme la FFT.

A présent, on suppose que les signaux sont échantillonnés avec un pas t_e ; f_E est alors définie sur $\mathcal{P} \triangleq E \cap \mathbb{Z}t_e$, en p points ; les fonctions K, f, Z_0, f_T sont définies sur $\mathcal{N} \triangleq T \cap \mathbb{Z}t_e$ par N points, $N > p$. Pour que tout calcul soit possible, on supposera bien sûr que tous les signaux définis sur \mathcal{N} sont périodiques, de période $T = Nt_e$.

La suite construite est alors celle définie par les relations (11) et (17). L'opérateur P_B utilise la transformée de Fourier discrète :

$$P_B(Z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \prod_B \left(\frac{k}{Nt_e} \right) \cdot \mathcal{F} \{ Z \} \left(\frac{k}{Nt_e} \right) \right\} \quad (25)$$

Nous présentons ci-dessous un exemple de simulation : le signal initial, en figure C, était connu en tout point ; la lacune, représentée par des pointillés sur notre figure, s'étendait sur le domaine [250, 280]. Nous présentons sur la figure D, l'extrapolation obtenue au bout de 12 itérations. Cette solution est assez mauvaise si on la compare au signal initial (fig. C)

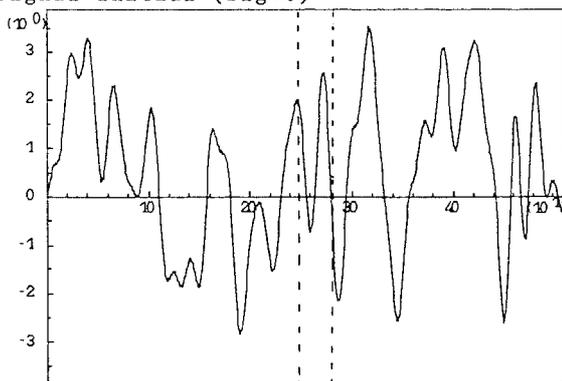


Figure C

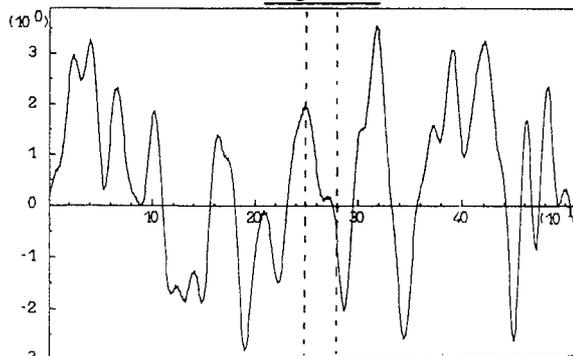


Figure D

Ceci provient du fait que la suite $Z_n(t)$, telle qu'elle a été définie par les relations (11) et (17), converge trop lentement. Il s'en suit que, pour un nombre d'itérations raisonnable, le choix de la première fonction Z_0 de la suite a encore une influence sensible. Bien qu'il soit vraisemblablement possible d'accélérer cette convergence, nous avons préféré nous pencher sur des méthodes fondamentalement différentes, assimilant cette fois le signal à une fonction aléatoire.

3 - SIGNAUX ALEATOIRES

Ce paragraphe est très incomplet : bien d'autres méthodes pourraient être imaginées et essayées. Nous nous sommes contentés pour notre part, d'adapter deux outils très classiques : le modèle auto-régressif, et le filtrage de Wiener.

3-1 Modèle auto-régressif

On suppose que le signal étudié X suit un modèle AR d'ordre M :

$$X(n) = \sum_{k=1}^M a_k X(n-k) + B(n) \quad (26)$$

où $B(n)$ est un bruit indépendant de $X(n-k)$ $\forall k > 0$; l'extrapolation dans la lacune peut alors se faire de proche en proche en utilisant la relation :

$$\hat{X}(i) = \sum_{k=1}^M a_k \hat{X}(i-k) \quad (27)$$

Le seul problème qui se pose à cet égard est l'évaluation des coefficients. En effet, si on estime les coefficients sur une "mémoire" de N points de part et d'autre de la lacune, on aura a priori deux estimations différentes de l'ensemble des coefficients, soient : $\{\hat{a}_k^P\}$ avant la lacune, et $\{\hat{a}_k^R\}$ après la lacune. Nous avons résolu ce problème de manière simple mais arbitraire : à partir des estimations $\{\hat{a}_k^P\}$ et $\{\hat{a}_k^R\}$, on évalue deux extrapolations $\hat{X}_P(i)$ par prédiction progressive, et $\hat{X}_R(i)$ par prédiction rétrograde, conformément aux relations :

$$\hat{X}_P(i) = \sum_{k=1}^M \hat{a}_k^P \hat{X}_P(i-k) \quad (28)$$

$$\hat{X}_R(i) = \sum_{k=1}^M \hat{a}_k^R \hat{X}_R(i+k) \quad (29)$$

Pour obtenir une extrapolation unique $\hat{X}(i)$, compatible avec $\hat{X}_P(i)$ et $\hat{X}_R(i)$, nous avons fait un moyennage barycentrique de la forme :

$$\hat{X}(i) = \frac{(L-i) \hat{X}_P(i) + i \hat{X}_R(i)}{L} \quad (30)$$

où L désigne la longueur de la lacune. Autrement dit, le choix des coefficients de pondération est tel, qu'on tient compte plutôt des données proches du point considéré (i), que des données éloignées, pour le calcul de la valeur de $\hat{X}(i)$.

Nous montrons sur la figure E ce qu'apporte cette méthode sur notre exemple, étudié au paragraphe précédent (cf. figure C).

La lacune (en pointillés) est toujours de 30 points. La mémoire choisie s'étend sur 40 points de part et d'autre de lacune, et l'ordre du modèle est $M=5$.

Cette méthode est rapide, facile à mettre en oeuvre, et converge à chaque fois que les pôles du modèle AR sont inclus dans le disque ouvert de rayon 1. De plus, elle donne de bons résultats comme nous le montre la comparaison des figures C et E.

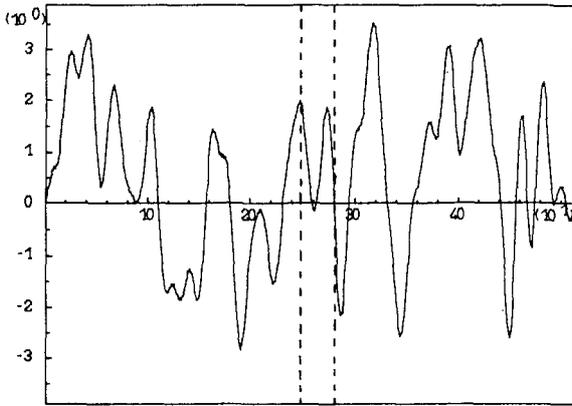


Figure E

3-2 Filtrage de WIENER

On suppose ici que $x(n)$ est stationnaire, et de corrélation connue $\Gamma_x(n)$. Ce type de filtrage linéaire est bien sûr non causal, et n'est stationnaire que dans peu de cas.

Reprenons les notations du § 2, et posons :

$$E=[0, N1]U[N2, N]; T=[0, N]$$

La lacune est alors $T-E =]N1, N2[$. Le signal connu $x(n)$ peut être représenté par le vecteur :

$$\underline{x}^t = [x(0), \dots, x(N1), x(N2), \dots, x(N)] \quad (31)$$

De même, les valeurs dans la lacune du signal réel et du signal extrapolé peuvent se représenter par les vecteurs :

$$\underline{\tilde{x}}^t = [x(N1+1), \dots, x(N2-1)] \quad (32)$$

$$\underline{\hat{x}}^t = [\hat{x}(N1+1), \dots, \hat{x}(N2-1)] \quad (33)$$

Ainsi, on cherche la matrice \underline{H} rectangulaire telle que :

$$\underline{\hat{x}} = \underline{H} \underline{x} \quad (34)$$

et telle que :

$$\sum \{(\hat{x} - \tilde{x}) + (\hat{x} - \tilde{x})\} \text{ minimum} \quad (35)$$

En dérivant l'erreur (35) par rapport à la matrice \underline{H} , il vient :

$$\sum \{(\underline{x} - \underline{\hat{x}}) \underline{x}^t\} = \underline{0} \quad (36)$$

a) Equation de WIENER

Pour $i \in T-E$, et $j \in E$, on a :

$$\sum \{x(i)x(j)\} = \Gamma_x(i, j)$$

Et, en utilisant (36), il vient :

$$\sum \{\hat{x}(i)x(j)\} = \Gamma_x(i, j)$$

Et, d'après (34) :

$$\Gamma(i, j) = \sum_{p \in E} H(i, p) \cdot \Gamma(p, j); i \in T-E \text{ et } j \in E \quad (37)$$

b) Solution itérative

En réalité, on résoud :

$$\Gamma(i, j) = \sum_{p \in E_k} H(i, p) \cdot \Gamma(p, j); i \in T_k - E_k, \text{ et } j \in E_k \quad (38)$$

où E_k et T_k sont les sous-ensembles de E et T définis par :

$$E_{2k} = [N_1 - k + 1, N_1] U [N_2, N_2 + k - 1]; \\ T_{2k} = [N_1 - k + 1, N_2 + k - 1]$$

$$E_{2k+1} = [N_1 - k + 1, N_1] U [N_2, N_2 + k]; \\ T_{2k+1} = [N_1 - k + 1, N_2 + k]$$

La procédure utilisée à cet effet utilise principalement le lemme d'inversion matricielle suivant :

si \underline{A} matrice symétrique réelle (n,n)
si \underline{B} vecteur réel (n,1)

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B}^t & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{A}^{-1} + X \mu \mu^t & -X \mu \\ -X \mu^t & X \end{bmatrix} \quad (39)$$

où $\mu = \underline{A}^{-1} \underline{B}$ et $X = 1/(D - \underline{B}^t \mu)$

A chaque pas, en résolvant (42) à l'aide de (43), on fait une estimation \hat{x}_k de la solution $\underline{H} \cdot \underline{x}$, à partir de l'estimation au rang précédent \hat{x}_{k-1} , de l'autocorrélation $\Gamma_x(i)$ et des k valeurs $x(n)$ lorsque $n \in E_k$.

Reprenons l'exemple du signal représenté sur la figure C. La fonction d'autocorrélation utilisée est alors estimée soit avant, soit après la lacune (figure G). La méthode procure alors une solution en général très bonne. Nous avons représenté sur la figure F l'allure de la solution au bout de 40 itérations.

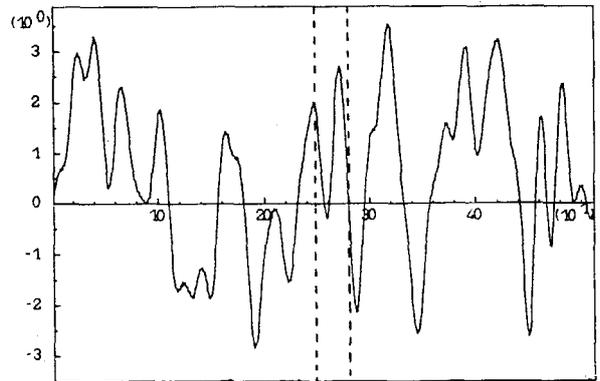


Figure F

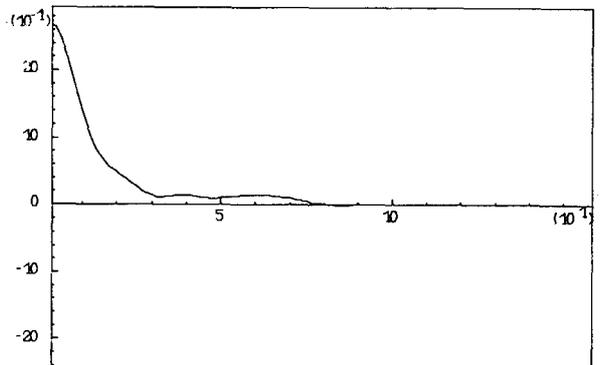


Figure G

4 - CONCLUSION

Nous avons exposé trois méthodes d'extrapolation. Compte-tenu des résultats obtenus, tant sur des simulations que sur des signaux réels, les deux dernières méthodes nous semblent très satisfaisantes. Cependant, aucune méthode n'est parfaite. En effet, les lacunes ne peuvent être complétées qu'à partir des informations contenues dans le reste du support : ainsi, certains signaux sont très difficiles à extrapoler, en particulier ceux dont l'information est peu redondante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FORTET, 1981 - Sur une méthode de PAPOULIS pour l'extrapolation d'un signal - Annales Télécomm., 1981,36,pp413-420.
[2] PAPOULIS, 1975 - A new Algorithm in spectral analysis and Band limited extrapolation. IEEE Trans. Circuits Syst., 1975,22,pp735-742
[3] SLEPIAN-POLLAK, 1961-Prolate Spheroidal wave functions - Bell. Syst. Tech. Journ., 1961,40,pp43-63.

