

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

## L'ANALYSE DE SIGNAUX VECTORIELS PAR FILTRAGE ADAPTE-QUADRATION-INTEGRATION

Jacques MUNIER - Gilles Y. DELISLE +

C.E.P.H.A.G. (Laboratoire Associé au C.N.R.S.) BP.46, 38402 ST-MARTIN-d'HERES (FRANCE)

### RESUME

Un signal vectoriel de dimension  $K$  peut souvent être considéré comme la somme d'un nombre fini de vecteurs significatifs et d'un nombre fini ou infini de vecteurs non-significatifs assimilés à du bruit. Dans chaque cas particulier, les vecteurs significatifs dépendent généralement d'un très petit nombre de paramètres caractéristiques et appartiennent donc à un certain sous-ensemble de l'espace vectoriel complexe de dimension  $K$ . Ce sous-ensemble constitue le modèle de signal pour le problème en question.

L'analyse au second ordre d'un tel signal vectoriel consiste à estimer les paramètres des vecteurs significatifs et les variances de leurs amplitudes respectives (celles-ci étant supposées être des variables aléatoires non-corrélées). Une telle analyse paramétrique peut être réalisée au moyen de la méthode "du maximum de vraisemblance" de CAPON, laquelle est présentée dans ce papier comme étant strictement équivalente à une méthode de "filtrage adapté discret". Le principe de la méthode proposée consiste à choisir la dimension  $K$  du vecteur signal observé supérieure d'une unité au nombre estimé de vecteurs significatifs.

La plus petite valeur propre de la matrice de covariance du vecteur observé est alors représentative du bruit seul et doit être annulée dans le but d'obtenir une finesse d'analyse infinie. La méthode apparaît ainsi comme étant une généralisation de la méthode de PISARENKO.

### SUMMARY

A  $K$ -dimensional vector signal may be often considered as the sum of a finite number of significant vectors plus a finite or infinite number of non-significant vectors regarded as noise vectors. In any specific case, the significant vectors generally depend on very few characteristic parameters and then belong to a given subset of the  $K$ -dimensional complex vector space. This subset constitutes the signal model for the problem at hand.

The second-order analysis of such a vector signal consists in estimating the parameters of the significant vectors and the variances of their respective amplitudes (these ones being assumed as uncorrelated random variables). Such a parametric analysis may be performed by means of the "maximum likelihood" CAPON'S method, which is showed in this paper to be strictly equivalent to a "discrete matched filter" method. The principle of the proposed method is to choose a dimension  $K$  for the observed vector signal when the estimated number of significant vectors is  $K-1$ .

The smallest eigenvalue of the observed vector covariance matrix is then representative of the noise only and must be cancelled in order to obtain an infinite acuteness of analysis. So the method appears to be a generalization of the PISARENKO'S method.



1 - METHODES PARAMETRIQUES D'ANALYSE ET MODELES

Le but de l'analyse de signaux est d'obtenir une représentation aussi significative et aussi exacte que possible des phénomènes qui ont donné naissance aux signaux observés. La méthodologie moderne s'est orientée vers l'utilisation de modèles caractérisés par un nombre fini de paramètres (notamment les modèles AR, MA, de PISARENKO, ...), l'analyse consistant alors à estimer les paramètres du signal conforme au modèle qui s'approche au mieux des données expérimentales. Le choix d'un modèle adéquat est probablement la meilleure façon d'injecter dans le traitement l'information a priori dont on dispose sur la structure et le comportement moyen des mécanismes étudiés. De plus, si ce choix est bien fait, seuls les paramètres vraiment significatifs (en nombre généralement réduit) seront retenus et on y trouvera un bénéfice, tant en précision qu'en pouvoir de résolution. La revue de synthèse qu'ont donnée KAY et MARPLE [1] sur les méthodes d'analyse spectrale, qui s'appliquent également en analyse spatiale, est particulièrement instructive.

La méthode d'analyse de signaux vectoriels proposée ici s'applique à des signaux se présentant sous la forme générale :

$$(1) \quad \mathbf{x} = \sum_{p=1}^m \alpha_p \mathbf{u}_p + \mathbf{b} ,$$

les scalaires  $\alpha_p$  étant des variables aléatoires complexes supposées centrées et les vecteurs  $\mathbf{u}_p$  des vecteurs unitaires ( $\mathbf{u}_p^H \mathbf{u}_p = 1$ ) appartenant à un espace vectoriel  $E_K$  de dimension  $K$  défini sur le corps des complexes. Le premier terme est une somme de vecteurs composants en nombre fini jugés significatifs et le second terme un ensemble fini ou infini de vecteurs composants jugés non-significatifs et considérés comme du bruit.

L'analyse a pour but d'identifier les vecteurs unitaires  $\mathbf{u}_p$  et d'estimer leurs "intensités", à savoir les variances :

$$(2) \quad \mu_p = \text{var} \{ \alpha_p \} = E \{ |\alpha_p|^2 \} .$$

La connaissance a priori que l'on peut avoir sur les phénomènes étudiés permet généralement de considérer que tout vecteur unitaire  $\mathbf{u}_p$  est une fonction connue d'un paramètre  $\psi_p$  scalaire ou vectoriel inconnu :

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}(\psi_p) ,$$

Ce paramètre étant supposé appartenir à un domaine  $D_\psi$ . L'identification des vecteurs unitaires  $\mathbf{u}_p$  revient alors à l'estimation des paramètres  $\psi_p$ . L'ensemble des  $\mathbf{u}(\psi_p)$ ,  $\psi_p \in D_\psi$  constitue un sous-ensemble  $M_\psi \subset E_K$ . Ce sous-ensemble paramétré par  $\psi$  définit le modèle adopté.

Par exemple, si on dispose d'un réseau de  $K$  capteurs identiques, alignés et équidistants (espacés de  $d$ ), destinés à analyser, à la longueur d'onde  $\lambda$ , les ondes planes provenant de sources à l'infini, le vecteur-source unitaire pour la source  $p$ , située dans la direction  $\theta_p$  par rapport à la normale au réseau, s'écrit :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_p = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[ e^{jk\psi_p} \right]_{K \times 1} , & k \in [0, K-1] , \\ \psi_p = -2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_p , \end{cases}$$

et le domaine  $D_\psi$  sera défini par exemple par :

$$-2\pi \frac{d}{\lambda} \leq \psi_p \leq 2\pi \frac{d}{\lambda} .$$

En analyse spectrale de raies de fréquences  $f_p$  à partir d'un signal temporel échantillonné avec une période  $T_e$ , on a le même vecteur unitaire, la phase  $\psi_p$  étant alors définie par :

$$\psi_p = 2\pi f_p T_e .$$

Jusqu'ici le modèle proposé apparaît comme étant très général. A titre d'exemple concret, si on veut repérer des sources sonores se déplaçant sur une droite connue, au moyen d'un réseau de  $K$  capteurs de géométrie quelconque situé à courte distance, le paramètre  $\psi$  caractéristique pour une source est son abscisse sur la droite ; il sera alors possible de déterminer, soit par le calcul, soit expérimentalement, en tenant compte éventuellement de trajets de propagation multiples, le vecteur-source unitaire  $\mathbf{u}$  des signaux captés en fonction de  $\psi$ .

Nous restreindrons quelque peu la généralité du modèle en supposant que les variables  $\alpha_p$  ne sont pas corrélées entre elles, ni avec le bruit. La matrice de covariance du vecteur observable  $\mathbf{x}$  s'écrit alors :

$$(4) \quad \begin{aligned} \Gamma_x &= E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^H \} = \sum_{p=1}^m \mu_p \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H + \Gamma_b , \\ \Gamma_b &= E \{ \mathbf{b} \mathbf{b}^H \} . \end{aligned}$$

En outre, nous supposons que le domaine  $D_\psi$  des paramètres  $\psi_p$  est tel que tout ensemble de  $K$  vecteurs distincts  $\mathbf{u}(\psi_p) \in M_\psi$  constitue une base de  $E_K$ , c'est-à-dire tel que ces  $K$  vecteurs soient linéairement indépendants. Le sous-ensemble  $M_\psi$  répondant à cette condition définit alors ce que nous appellerons un modèle à vecteurs composants linéairement indépendants.

Dans l'exemple concret cité précédemment, la condition d'indépendance linéaire pour tout ensemble de  $K$  vecteurs-sources se traduira par certaines contraintes sur la géométrie du réseau de capteurs et en particulier sur leurs espacements. Dans le cas du modèle caractérisé par la relation (3), on sait que cette indépendance linéaire est assurée si on a  $d \leq \lambda/2$ , c'est-à-dire si la phase  $\psi_p$  est comprise entre  $-\pi$  et  $+\pi$  (sinon, on rencontre un problème d'ambiguïté). De même, en analyse spectrale, la contrainte correspond à la condition de SHANNON pour l'échantillonnage temporel.

Sous les conditions précédentes et en l'absence de bruit ( $\Gamma_b = 0$ ), la matrice  $\Gamma_x$  a la propriété connue d'être singulière de rang  $n$ , pour  $n < K$ . Le rang de cette matrice indique donc le nombre de vecteurs composants non-corrélés linéairement indépendants, ce qui constitue une information fort utile.

2 - LA METHODE FAQI (FILTRAGE ADAPTE-QUADRATION-INTEGRATION)

L'idée de base est d'effectuer l'analyse du vecteur observable composite  $\mathbf{x}$  au moyen d'un filtrage linéaire discret adapté à un "vecteur unitaire d'analyse"  $\mathbf{u}(\psi)$ , le paramètre  $\psi$  balayant tout son domaine de variation  $D_\psi$ .

Le but du filtre adapté à  $\mathbf{u}_\psi = \mathbf{u}(\psi)$  est d'extraire au mieux toute composante de la forme  $\alpha_\psi \mathbf{u}_\psi$  existant éventuellement dans le vecteur  $\mathbf{x}$  en éliminant au mieux l'ensemble des autres composantes considérées globalement comme du bruit. Il importe de noter qu'on inclura ici dans le vecteur  $\alpha_\psi \mathbf{u}_\psi$  tout vecteur composant "significatif" ainsi que tout vecteur composant du bruit  $\mathbf{b}$  qui lui sont colinéaires. Ceci est une différence essentielle avec le concept classique du filtre adapté, dans lequel le bruit et le signal sont deux entités à part, une information a priori sur le bruit étant supposée connue (la "référence bruit-seul") sous la forme de sa matrice de covariance  $\Gamma_b$ .

Lorsque le filtre est adapté à  $\mathbf{u}_\psi$ , on considérera ici que le "bruit" est constitué par le vecteur :

$$(5) \quad \mathbf{w} = \mathbf{x} - \alpha_\psi \mathbf{u}_\psi ,$$

étant entendu que le vecteur  $\mathbf{w}$  varie lorsqu'on fait varier  $\psi$ . De cette façon de procéder, il résulte que la notion de "référence bruit-seul" perd sa signification (et n'intervient pas dans le résultat).

Compte-tenu de l'hypothèse de non-corrélation entre les diverses composantes, on pourra écrire la relation suivante entre les matrices de covariance :

$$(6) \quad \Gamma_x = \mu_y u_y u_y^T + \Gamma_w, \quad \begin{cases} \mu_y = \text{var}\{\alpha_y\}, \\ \Gamma_w = E\{w w^T\}. \end{cases}$$

Par définition, le filtre adapté à  $u_y$  réalise le produit scalaire du vecteur  $x$  par un certain vecteur  $h_y$ , soit :

$$(7) \quad y = h_y^T x, \quad (y: \text{scalaire complexe}),$$

le vecteur  $h_y$  étant choisi de manière à maximiser le rapport signal à bruit  $R$  défini par :

$$(8) \quad R = \frac{|E\{y|H_1\} - E\{y|H_0\}|^2}{\text{var}\{y|H_0\}}.$$

Pour le filtre adapté tel qu'il est conçu ici, l'hypothèse  $H_0$  correspond au cas où  $\alpha_y=0$  (donc  $x=w$ ) et l'hypothèse  $H_1$  au cas où  $x$  contient une composante  $u_y$  en plus de  $w$ . De la définition (8), on tire immédiatement pour  $R$  l'expression :

$$(9) \quad R = \frac{h_y^T u_y u_y^T h_y}{h_y^T \Gamma_w h_y}.$$

En appliquant l'inégalité de SCHWARZ, on obtient :

$$(10) \quad R \leq u_y^T \Gamma_w^{-1} u_y,$$

le maximum de  $R$  étant obtenu lorsqu'on a :

$$(11) \quad h_y = a \Gamma_w^{-1} u_y.$$

La constante arbitraire  $a$  sera choisie de manière à "normaliser" le filtre, soit  $h_y^T u_y = 1$ , ce qui donne :

$$(12) \quad h_y = \frac{\Gamma_w^{-1} u_y}{u_y^T \Gamma_w^{-1} u_y}.$$

En utilisant l'identité matricielle :

$$(13) \quad (A^{-1} + x y^T)^{-1} = A - \frac{A x y^T A}{1 + y^T A x},$$

on peut, à partir de la relation (6), exprimer la matrice de covariance  $\Gamma_w$  en fonction de celle de l'observable  $\Gamma_x$ , qui est la seule accessible à l'expérience :

$$(14) \quad \Gamma_w^{-1} = \Gamma_x^{-1} + \mu_y \frac{\Gamma_x^{-1} u_y u_y^T \Gamma_x^{-1}}{1 - \mu_y u_y^T \Gamma_x^{-1} u_y}.$$

Des relations (12) et (14), on tire finalement :

$$(15) \quad h_y = \frac{\Gamma_x^{-1} u_y}{u_y^T \Gamma_x^{-1} u_y}.$$

Le but final étant d'estimer la variance du scalaire  $\alpha_y$  on fera suivre le filtre adapté défini par  $h_y$  par un système quadrateur-intégrateur qui sera censé fournir la variance du scalaire complexe  $y$  défini par (7), soit :

$$(16) \quad \hat{\mu}_y = \text{var}\{y\} = E\{|h_y^T x|^2\};$$

la quantité  $\hat{\mu}_y$  sera considérée comme un estimateur de la variance de l'amplitude  $\alpha_y$  de la composante colinéaire à  $u_y$  du vecteur observable  $x$ . On obtient finalement l'expression suivante :

$$(17) \quad \hat{\mu}_y(\varphi) = \frac{1}{u_y^T(\varphi) \Gamma_x^{-1} u_y(\varphi)}$$

qui correspond exactement à la formule établie par CAPON [2] et par LACOSS [3] selon un critère de maximum de vraisemblance sous l'hypothèse gaussienne.

On notera que la méthode consistant à incorporer au vecteur-signal à estimer tout vecteur-bruit qui lui serait colinéaire est en fait celle employée par CAPON, ce qui explique l'identité des résultats. Il en résultera évidemment un biais d'estimation de la variance, dû à la présence (éventuelle) de la composante de bruit.

En pratique, plutôt que de réaliser un système FAQI matériellement, on aura généralement intérêt à opérer une estimation de la matrice de covariance  $\Gamma_x$  du vecteur observable et à appliquer ensuite la formule (17), dans laquelle le vecteur variable d'analyse  $u_y(\varphi)$  sera choisi conforme au modèle préalablement reconnu et vérifié. Le premier intérêt apparent de cette formule est son extrême souplesse, puisqu'elle s'adapte à une classe étendue de modèles, contrairement à une méthode telle que celle de PISARENKO [4].

### 3 - L'ESTIMATEUR FAQI EN PRESENCE DE BRUIT REPARTI SYSTEME A FINESSE D'ANALYSE INFINIE

On sait que l'application de la formule de CAPON à un signal contenant un petit nombre de vecteurs composants significatifs superposés à un "bruit réparti" présente une finesse d'analyse plutôt médiocre (dépendant du niveau de bruit). On conviendra d'appeler "bruit réparti" la composition d'un grand nombre (tendant vers l'infini) de vecteurs  $x_p$  distincts non corrélés. Si la non-corrélation reste vérifiée pour tout couple  $x_p, x_q$  de vecteurs infiniment voisins, mais non-confondus, on a un bruit "à corrélation microscopique". Pour un tel bruit, la matrice de covariance  $\Gamma_w$  est évidemment non-singulière, puisqu'elle est la somme d'un grand nombre de matrices élémentaires de rang 1 de la forme  $\mu_p u_p u_p^T$  dont au moins  $K$  correspondent à des vecteurs linéairement indépendants. Un cas particulier bien connu est celui du "bruit blanc" dont la matrice de covariance est de la forme  $\sigma^2 I_n$ .

Afin de caractériser la finesse d'analyse de l'estimateur FAQI, on considérera le cas d'un observable  $x$  de dimension  $K$  contenant un seul vecteur signal  $\alpha_0 u_0$  superposé à un "bruit blanc" de variance  $\sigma^2$ . Sa matrice de covariance s'écrit :

$$(18) \quad \Gamma_x = \Gamma_0 + \Gamma_w = \mu_0 u_0 u_0^T + \sigma^2 I, \quad \mu_0 = \text{var}\{\alpha_0\}.$$

Le rapport signal à bruit peut être défini par :

$$(19) \quad R = \frac{\text{Tr}(\Gamma_0)}{\text{Tr}(\Gamma_w)} = \frac{\mu_0}{K \sigma^2}.$$

En utilisant la formule de résolution (17) et la formule d'inversion (13), on calcule aisément la réponse  $\hat{\mu}_y(\varphi)$  de l'estimateur FAQI. Celle-ci passe par un maximum  $\hat{\mu}_{\max}$  pour  $u_y(\varphi) = u_0$ . Le rapport  $\hat{\mu}_y(\varphi) / \hat{\mu}_{\max}$  définit la réponse normée  $r_{\text{FAQI}}(\varphi)$  à un vecteur composant unique en présence de bruit blanc, qui caractérise la finesse d'analyse de l'estimateur. Cette réponse a pour expression :

$$(20) \quad r_{\text{FAQI}}(\varphi) = \frac{1}{1 + R(1 - |u_y^T(\varphi) u_0|^2)},$$

qui montre que l'acuité de la réponse du système FAQI est d'autant meilleure que le niveau de bruit est plus faible. A titre de comparaison, un analyseur classique (par exemple, une préformation de voie pour l'analyse spatiale ou un corrélateur à retard nul pour l'analyse de signaux temporels, suivis d'un système quadrateur-intégrateur) effectuerait le carré du module du produit scalaire entre le vecteur observable et le vecteur d'analyse [5]. En l'absence de bruit, sa réponse normée serait :

$$(21) \quad r_0(\varphi) = |u_y^T(\varphi) u_0|^2.$$

On a donc :

$$(22) \quad r_{\text{FAQI}}(\varphi) = \frac{1}{1 + R(1 - r_0(\varphi))}.$$

En particulier, pour  $r_0(\varphi) = 1/2$ , la réponse du système FAQI vaut  $1/(1+R/2)$ , d'où il ressort que l'acuité de celle-ci est meilleure que celle de l'analyseur classique dès que l'on a  $R > 2$ .



L'ANALYSE DE SIGNAUX VECTORIELS PAR  
FILTRAGE ADAPTE-QUADRATION-INTEGRATION

D'autre part, il est connu [1][3] que la finesse d'analyse de l'estimateur FAQI (formule de CAPON) est moins bonne, à rapport signal à bruit égal, que celle d'un estimateur à maximum d'entropie. Ceci apparaît sur la figure 1, qui représente les réponses angulaires normées de ces deux estimateurs, pour un réseau rectiligne de 12 capteurs équidistants, comparées à celle de la voie préformée classique (celle-ci, en l'absence de bruit). On remarquera que la réponse FAQI ne présente pas de maximums secondaires, contrairement aux deux autres réponses ; d'autre part, le palier à -16,8 dB correspond au niveau relatif de bruit, soit  $\sigma^2/\mu_0$ , c'est-à-dire à  $(KR)^{-1}$ .

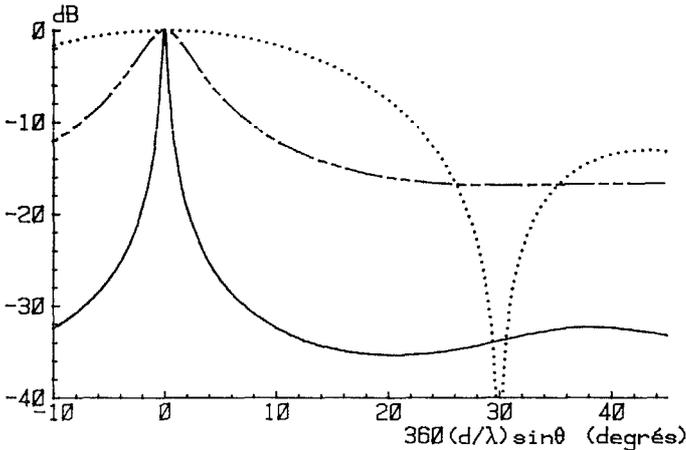


FIG.1 Réponses angulaires, 1 source, 12 capteurs  
..... Voie préformée, pondérations égales  
———— FAQI ——— MEM (rapport S/B : 6 dB)

Cette figure montre en particulier que l'estimateur FAQI ne peut éliminer du bruit réparti, lequel est, en fait, estimé au même titre que le signal utile. Cependant, le filtre adapté est un système à produit scalaire ; en tant que tel, il peut éliminer strictement K-1 composantes vectorielles linéairement indépendantes : il suffit, en effet, que le vecteur  $\mathbf{h}_p$  caractérisant le filtrage soit orthogonal au sous-espace de dimension K-1 engendré par lesdits vecteurs (appelé "espace-sources" dans le cas spatial). Cette propriété, qui fut utilisée de longue date [6], n'était pas évidente en ce qui concerne l'analyseur à maximum de vraisemblance de CAPON. Or, elle permet justement de donner à cet estimateur un caractère paramétrique, au même titre que les estimateurs AR et de PISARENKO, en lui conférant une finesse d'analyse infinie.

En effet, si on s'arrange pour que la dimension K du vecteur observable soit supérieure d'une unité au nombre de vecteurs composants "significatifs", alors la plus petite valeur propre de la matrice  $\Gamma_x$  est imputable au bruit seul et, en annulant cette valeur propre comme le fait PISARENKO, on rend la matrice  $\Gamma_x$  singulière. Ceci fait, pour tout vecteur d'analyse  $\mathbf{u}_p$  linéairement indépendant des vecteurs composants  $\mathbf{u}_r$ , le vecteur  $\mathbf{h}_p$  caractérisant le filtre adapté est orthogonal au sous-espace engendré par les  $\mathbf{u}_r$  et, par suite, la réponse du système est strictement nulle. En outre, par hypothèse le modèle choisi est tel que le sous-espace des  $\mathbf{u}_r$  ne contient pas de vecteur autre que les  $\mathbf{u}_r$  eux-mêmes. Donc, la réponse du système est nulle partout, sauf pour  $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_r, \forall r$ .

Evidemment, le résultat de l'analyse n'est parfait que si le bruit réel est conforme au modèle  $\Gamma_b = \sigma^2 \mathbf{I}$ . L'intérêt d'une analyse préalable des valeurs propres de la matrice de covariance  $\Gamma_x$  du vecteur observable  $\mathbf{x}$ , choisi de dimension K suffisante, apparaît indiscutable, si l'on veut pouvoir évaluer le nombre de vecteurs composants significatifs et ajuster en conséquence la dimension K.

La matrice  $\Gamma_x$ , étant maintenant supposée rendue singulière de rang  $n=K-1$ , ne peut être inversée. La formule (17) pourra alors être mise sous la forme :

$$(23) \quad \hat{\mu}(\varphi) = \frac{\det[\Gamma_x]}{\mathbf{u}^t(\varphi) \text{Adj}[\Gamma_x] \mathbf{u}(\varphi)}$$

L'adjointe de  $\Gamma_x$ , qui est de rang 1, est de la forme :

$$(24) \quad \text{Adj}[\Gamma_x] = \mathbf{v} \mathbf{v}^t,$$

et on a :

$$(25) \quad \Gamma_x \text{Adj}[\Gamma_x] = \text{Adj}[\Gamma_x] \Gamma_x = \mathbf{0}.$$

Ce produit de matrices a pour expression :

$$(26) \quad \Gamma_x \text{Adj}[\Gamma_x] = \sum_{r=1}^{K-1} \mu_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^t \mathbf{v} \mathbf{v}^t, \quad \mu_r \neq 0 \quad \forall r.$$

Il est identique à une matrice nulle si l'on a :

$$(27) \quad \mathbf{u}_r^t \mathbf{v} = 0, \quad \forall r \in [1, K-1].$$

Le vecteur  $\mathbf{v}$ , vecteur propre de  $\text{Adj}[\Gamma_x]$  associé à sa seule valeur propre non-nulle, est donc orthogonal au sous-espace engendré par les  $\mathbf{u}_r$ . C'est donc aussi le vecteur propre de  $\Gamma_x$  associé à la seule valeur propre nulle de cette matrice.

Finalement, on a donc :

$$(28) \quad \mathbf{u}^t(\varphi) \text{Adj}[\Gamma_x] \mathbf{u}(\varphi) \begin{cases} = 0 & \text{pour } \varphi = \varphi_r, \forall r, \\ \neq 0 & \text{pour } \varphi \neq \varphi_r. \end{cases}$$

D'où la règle :

-lorsque la matrice de covariance  $\Gamma_x$  d'ordre K de l'observable est de rang K-1, les K-1 vecteurs composants unitaires de cet observable sont les K-1 vecteurs unitaires appartenant au "modèle à vecteurs linéairement indépendants" adopté et au sous-espace orthogonal au vecteur propre de la matrice  $\Gamma_x$  associé à sa valeur propre nulle.

Quant à l'évaluation des variances  $\mu_r$ , elle peut se faire en appliquant la formule (23), dans laquelle l'indétermination devra être levée par les méthodes classiques.  $\mu_r = 0/0$

La solution de PISARENKO est un cas particulier de cette solution générale, correspondant au modèle défini par la formule (3).

La mise en oeuvre pratique de la méthode dans le cas le plus général peut consister simplement à appliquer la formule de CAPON (17), la plus petite valeur propre de  $\Gamma_x$  étant réduite artificiellement de manière que cette matrice s'approche de la singularité tout en demeurant inversible avec une précision de calcul acceptable. Cette procédure évite d'avoir à chercher les racines  $\varphi_r$  de la forme quadratique hermitienne (28).

La figure 2 donne un exemple d'analyse angulaire de deux sources au moyen de trois groupements de capteurs, opérée en application de ce principe à partir de données recueillies en acoustique sous-marine.

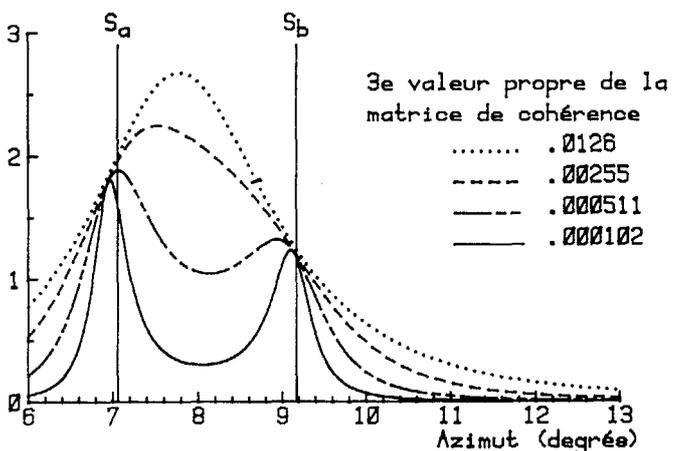


FIG.2 Analyse angulaire, acoust. sous-marine 5 kHz  
3 capteurs espacés de 2,253 longueurs d'onde ;  
durée 1 sec ; bande passante 200 Hz

L'ANALYSE DE SIGNAUX VECTORIELS PAR  
FILTRAGE ADAPTE-QUADRATION-INTEGRATION

4 - RESOLUTION DE DEUX SOURCES PAR TROIS CAPTEURS  
ALIGNÉS EQUIDISTANTS. POUVOIR SEPARATEUR ANGULAIRE

Un problème typique d'analyse est celui que pose la résolution de deux vecteurs composants très proches l'un de l'autre, que des méthodes classiques d'analyse ne permettent pas de séparer. On peut supposer qu'un préfiltrage linéaire préalable a permis d'isoler ces deux vecteurs, sans toutefois éliminer du champ d'observation des composantes parasites de moindre importance.

Un vecteur observable de dimension 3 convient pour résoudre ce problème selon la méthode exposée plus haut. On considérera le cas de la résolution angulaire de deux sources situées à grande distance à partir de deux sources recueillies, à une fréquence  $f$ , par trois capteurs alignés et équidistants ; en fait, il s'agira plutôt de groupements de capteurs, dont la directivité assurera le préfiltrage spatial permettant d'isoler les deux sources.

Un problème formellement analogue se pose dans le cas de l'analyse spectrale, pour deux raies à séparer à partir de trois échantillons équidistants de la fonction d'autocorrélation ; dans ce cas, on aura généralement intérêt à opérer sur les échantillons complexes définis au moyen des composantes en quadrature du signal, lesquelles seront obtenues par démodulation complexe à une certaine fréquence connue choisie voisine des fréquences à estimer.

Considérons deux sources (a) et (b) dans les directions  $\theta_a$  et  $\theta_b$  (par rapport à la normale au réseau de capteurs). Pour la source (a), le déphasage des signaux reçus, à la longueur d'onde  $\lambda$ , par deux capteurs successifs espacés de  $d$  est :

$$(29) \quad \varphi_a = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_a,$$

et le vecteur-source unitaire est défini par :

$$(30) \quad \mathbf{u}_a = \frac{1}{\sqrt{3}} [1, e^{-j\varphi_a}, e^{-j2\varphi_a}]^T.$$

Pour la source (b), on a des expressions similaires. Les vecteurs-sources  $\mathbf{u}_{aet} \mathbf{u}_b$ , conformes au modèle défini par (3) avec  $K=3$ , correspondent au modèle classique "ondes planes, capteurs alignés et équidistants", pour lequel la matrice de covariance  $\mathbf{T}_x$  est de type TOEPLITZ ; ce modèle est aussi celui qu'utilise PISARENKO pour l'analyse spectrale. En analyse spatiale, on a généralement intérêt à utiliser, à la place de  $\mathbf{T}_x$ , la matrice  $\mathbf{C}$  de cohérence complexe formée au moyen des densités interspectrales normées (évaluées à la fréquence  $f$  de travail), soit :

$$(31) \quad C_{kl} = \frac{y_{kl}}{\sqrt{y_{kk} y_{ll}}}$$

La normalisation a pour effet d'éliminer l'influence des modules des gains complexes des capteurs, qu'il est souvent difficile de rendre égaux. Théoriquement, la matrice est de la forme :

$$(32) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & C_1 & C_2 \\ C_1^* & 1 & C_1 \\ C_2^* & C_1^* & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$(33) \quad \begin{cases} C_1 = \lambda_a e^{j\varphi_a} + \lambda_b e^{j\varphi_b} = x_1 + jy_1, \\ C_2 = \lambda_a e^{j2\varphi_a} + \lambda_b e^{j2\varphi_b} = x_2 + jy_2, \\ \lambda_a + \lambda_b = 1, \end{cases}$$

$\lambda_a$  et  $\lambda_b$  étant les intensités relatives des sources, observées à la sortie des capteurs.

En fait, la matrice  $\mathbf{C}$  mesurée expérimentalement sur une épreuve n'est qu'approximativement de type TOEPLITZ (elle ne l'est qu'en moyenne statistique évaluée sur un grand nombre d'épreuves). Ceci implique que les vecteurs-sources unitaires expérimentaux ne sont pas strictement conformes au modèle théorique. Pour assurer cette conformité, il est nécessaire, en premier lieu, de rendre artificiellement la matrice  $\mathbf{C}$  de type TOEPLITZ.

En second lieu, cette matrice n'est pas de rang 2, mais de rang 3, égal à son ordre, en raison de la présence de bruit parasite, de composantes vectorielles en surnombre ou d'incertitudes de mesure. Sa valeur propre la plus faible se calcule par les formules suivantes :

$$(34) \quad \begin{cases} \rho = \frac{1}{3} [2(x_1^2 + y_1^2) + x_2^2 + y_2^2] = \frac{1}{3} [2|C_1|^2 + |C_2|^2], \\ q = (x_1^2 - y_1^2)x_2 + 2x_1y_1y_2 = \text{Re}(C_1^* C_2), \\ \cos \psi = q / (\rho \sqrt{3}), \\ \lambda_3 = 1 - 2\sqrt{\rho} \cos \frac{\pi - \psi}{3}, \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \end{cases}$$

le déterminant de la matrice  $\mathbf{C}$  ayant pour expression :

$$(35) \quad \det \mathbf{C} = 1 - 3\rho + 2q.$$

Si l'on veut réduire progressivement cette troisième valeur propre pour améliorer la finesse d'analyse, il suffit de multiplier les termes extradiagonaux de la matrice par un facteur  $k$  croissant, légèrement supérieur à l'unité. Si on veut l'annuler, on prendra :

$$(36) \quad k = \frac{1}{1 - \lambda_3}.$$

La forme quadratique hermitienne intervenant dans la formule (23) de l'estimateur angulaire a pour expression développée :

$$(37) \quad \begin{cases} Q = \mathbf{u}^T(\varphi) \text{Adj}[\mathbf{C}] \mathbf{u}(\varphi) \\ = 1 - \rho + a \cos \varphi + b \sin \varphi + c \cos 2\varphi + d \sin 2\varphi, \\ a = \frac{4}{3} (x_1 x_2 + y_1 y_2 - x_1), \\ b = \frac{4}{3} (x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_1), \\ c = \frac{2}{3} (x_1^2 - y_1^2 - x_2), \\ d = \frac{2}{3} (y_2 - 2x_1 y_1). \end{cases}$$

Lorsque la matrice  $\mathbf{C}$  n'a pas été rendue singulière, les formules ci-dessus permettent de calculer la réponse  $\hat{\mu}(\varphi)$  du système FAQI en appliquant la formule (23), d'où la réponse angulaire  $\hat{\mu}(\theta)$ .

Si la matrice  $\mathbf{C}$  est rendue singulière, alors les paramètres  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  des sources sont racines du polynôme trigonométrique  $Q$ , ou encore racines du système d'équations (33). Si on pose :

$$(38) \quad \alpha = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{2},$$

ce système s'écrit :

$$(39) \quad \begin{cases} C_1 = x_1 + jy_1 = e^{j\alpha} [\cos \beta + j(2\lambda_a - 1) \sin \beta], \\ C_2 = x_2 + jy_2 = e^{j2\alpha} [\cos 2\beta + j(2\lambda_a - 1) \sin 2\beta], \end{cases}$$

d'où on tire :

$$(40) \quad \begin{cases} \cos^2 \beta = \frac{1}{4} \frac{1 - |C_2|^2}{1 - |C_1|^2} = \frac{1}{4} \frac{1 - x_2^2 - y_2^2}{1 - x_1^2 - y_1^2}, \\ e^{j2\alpha} = \frac{C_1^* - C_2}{1 - |C_1|^2} = \frac{x_1^2 - y_1^2 - x_2 + j(2x_1 y_1 - y_2)}{1 - x_1^2 - y_1^2}. \end{cases}$$

On remarque : 1° que les modules  $|C_1|$  et  $|C_2|$  ne dépendent pas du déphasage  $\alpha$  qui caractérise la direction moyenne des deux sources ; 2° que le déphasage  $\beta$  caractérisant l'écart angulaire entre les deux sources ne dépend que de ces modules. On peut donc dire que le pouvoir séparateur angulaire, que l'on peut caractériser par la variance de l'estimateur de  $\beta$ , ne dépend que de la précision d'estimation des modules des coefficients de cohérence complexe et non de leurs arguments. Ceux-ci n'interviennent que dans l'estimation de la direction moyenne.



De même, les deux premières valeurs propres de la matrice  $\mathbf{C}$ , supposée de rang 2, ne dépendent que des modules  $|C_1|$  et  $|C_2|$ ; elles s'expriment en fonction de l'écart angulaire des deux sources et de leurs intensités relatives. Elles sont en effet solution de l'équation :

$$(41) \quad \begin{cases} \lambda^2 - 3\lambda + 3(1-\tau) = 0, \\ \tau = 1 - \frac{8}{3} \Delta_a (1 - \Delta_a) (1 + 2 \cos^2 \beta) \sin^2 \beta. \end{cases}$$

Pour deux sources de même intensité ( $\Delta_a = \Delta_b = \frac{1}{2}$ ), on a :

$$(42) \quad \lambda_1 = 2 + \cos 2\beta, \quad \lambda_2 = 1 - \cos 2\beta.$$

Lorsque les deux sources tendent à se confondre ( $\beta \rightarrow 0$ ), la deuxième valeur propre tend vers zéro et la matrice  $\mathbf{C}$  vers une matrice de rang 1. Cette remarque permet de donner une définition du pouvoir séparateur angulaire  $\delta_\theta$ , en fixant un seuil  $S_\lambda$  au dessous duquel la seconde valeur propre est jugée non-significative. Sachant que la somme des valeurs propres de  $\mathbf{C}$  vaut 3, une évaluation de la précision d'estimation des coefficients de la matrice  $\mathbf{C}$ , et, par suite, de ses valeurs propres, permet de choisir pour ce seuil une valeur réaliste, soit par exemple  $S_\lambda = 0,01$  pour des mesures de bonne qualité. Ce seuil dépend évidemment des conditions expérimentales : fluctuations de propagation, niveau de bruit parasite, .... Dans l'approximation des petits angles, on a, pour deux sources de même intensité :

$$(43) \quad \begin{cases} \lambda_2 \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 2\beta^2, \\ \beta \approx \pi \frac{d}{\lambda} \Delta \theta, \quad \Delta \theta = \theta_a - \theta_b, \end{cases}$$

ce qui donne, pour un seuil  $S_\lambda$ , un pouvoir séparateur angulaire :

$$(44) \quad \delta_\theta \approx \frac{\lambda}{\pi d} \sqrt{\frac{S_\lambda}{2}} \quad (\text{rad}).$$

Par exemple, pour  $d = 2\lambda$  et  $S_\lambda = 0,01$ , on a  $\delta_\theta = 0,64$  degrés.

D'autre part, il est intéressant d'examiner les propriétés du vecteur propre de la matrice  $\mathbf{C}$  associé à la valeur propre nulle, qui est, d'après la théorie générale, orthogonal au sous-espace sources. Ce vecteur est défini, à un facteur scalaire près par :

$$(45) \quad \mathbf{v}_3 = [1, 2 \cos \beta e^{-j(k+\pi)}, e^{-j2k}]^T.$$

On vérifie aisément qu'il est effectivement orthogonal aux deux vecteurs-sources. De plus, on remarque : 1°) qu'il ne dépend pas des intensités relatives des sources ; 2°) que, seul, le module de la deuxième composante dépend de  $\beta$  ; 3°) que les arguments ne dépendent que de  $\alpha$ .

Quant au rapport des intensités relatives, soit  $\Delta_a / \Delta_b$ , il peut être calculé à partir du système d'équations (33), en utilisant les valeurs estimées de  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$ . On obtient :

$$(46) \quad \frac{\Delta_a}{\Delta_b} = \frac{\alpha_1 - \cos \varphi_b}{\cos \varphi_a - \alpha_1} = \frac{\gamma_1 - \sin \varphi_b}{\sin \varphi_a - \gamma_1}.$$

5 - PREFILTRAGE ET ERREURS D'ESTIMATION DUES AU BRUIT

D'après la théorie précédente, lorsqu'on dispose d'un vecteur observable de dimension  $K$ , il est possible d'identifier  $K-1$  vecteurs composants comme étant les vecteurs appartenant au "modèle à vecteurs linéairement indépendants" et au sous-espace orthogonal au vecteur propre associé à la valeur propre nulle de la matrice  $\mathbf{T}_x$  de covariance de l'observable (de rang  $K-1$ ). Mais on sait que le fait d'ajouter à  $\mathbf{T}_x$  une matrice de "bruit blanc" du type  $\sigma^2 \mathbf{I}$  (dont les  $K$  valeurs propres valent  $\sigma^2$ ) ne modifie pas les vecteurs propres. Donc, un tel bruit blanc ne perturbe pas l'estimation des vecteurs composants, mais provoque seulement un biais sur l'estimation de leurs variances.

Par contre, si la matrice de bruit est quelconque, elle peut perturber fortement le sous-espace des vecteurs-signal et provoquer des erreurs d'estimation importantes. Pour illustrer ce phénomène, on a représenté sur la figure 3 les directions vraies et les directions estimées de deux sources principales fixes de directions voisines en présence d'un brouilleur mobile d'intensité sensiblement plus faible (auquel correspond une matrice de bruit de rang 1). L'analyse angulaire par trois capteurs alignés équidistants est faite, après avoir rendu singulière de rang 2 la matrice  $\mathbf{T}_x$ , par soustraction d'une matrice  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , comme s'il y avait du bruit blanc (en supposant qu'on ignore la présence du brouilleur).

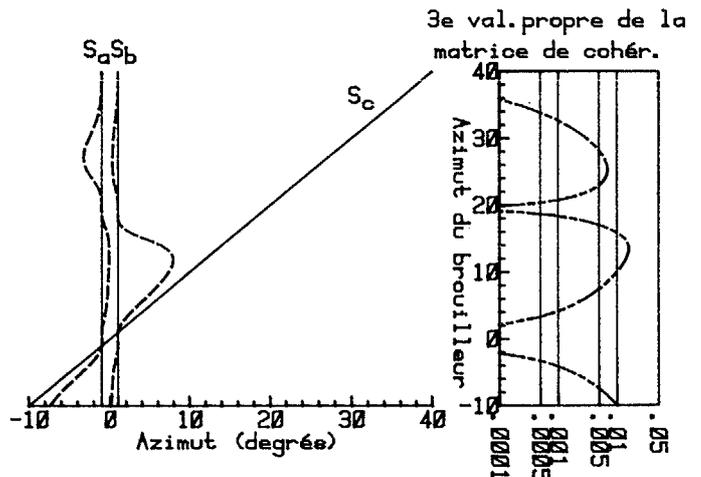


FIG. 3 Repérage angulaire, 2 sources en présence d'un brouilleur mobile d'intensité relative 20% Réseau de 12 capteurs (3 groupements de 6)

On constate que la perturbation due au brouilleur, auquel correspond un vecteur composant en surnombre qui met en défaut les hypothèses de départ, est d'importance très variable selon sa direction. On remarque notamment que la perturbation est négligeable lorsque cette direction est voisine de celle des sources ; on peut dire alors que la présence du brouilleur ne "déséquilibre" pas de manière sensible la matrice de covariance des signaux des sources principales. Plus généralement, pour deux sources d'intensités comparables, on constate que les erreurs d'estimation sont négligeables si la répartition spatiale du bruit est symétrique par rapport aux deux sources.

En présence d'un bruit spatial inégalement réparti, on a donc intérêt, pour séparer avec le minimum d'erreurs d'estimation deux sources très voisines, à effectuer un préfiltrage spatial centré sur les deux sources, de manière à équilibrer autant que possible la répartition de bruit. Ce préfiltrage se réalise simplement en utilisant des groupements de capteurs au lieu de capteurs ponctuels. Le même préfiltrage a pour avantage supplémentaire d'éliminer les ambiguïtés angulaires apparaissant lorsque l'espacement entre capteurs excède la demi-longueur d'onde.

Les remarques précédentes s'appliquent aussi à l'analyse spectrale de raies superposées à un fond continu. Dans ce cas, deux raies spectrales très voisines peuvent être identifiées par la méthode FAQI, après un filtrage à bande étroite, à partir de trois échantillons de la fonction d'autocorrélation temporelle du signal analysé, une estimation de la densité spectrale du fond continu au voisinage des raies étant fournie par la troisième valeur propre de la matrice d'autocorrélation.

L'ANALYSE DE SIGNAUX VECTORIELS PAR  
FILTRAGE ADAPTE-QUADRATION-INTEGRATION

CONCLUSION

Considéré en tant que système à produit scalaire suivi d'un estimateur de variance, l'estimateur de CAPON apparaît comme étant un excellent outil d'analyse, à la condition impérative que la dimension du vecteur observable soit supérieure d'une unité au nombre de vecteurs composants "significatifs" du signal analysé. Cette condition est celle qui permet d'avoir une réponse nulle pour tout vecteur d'analyse distinct des vecteurs composants, donc une finesse d'analyse infinie ; en d'autres termes, c'est la condition pour que la méthode soit de type paramétrique, comme celle de PISARENKO qui en est un cas particulier.

Ce système à produit scalaire est un filtre adapté discret particulier, à savoir sans référence bruit seul, aucune distinction n'étant faite, au départ, entre vecteurs "significatifs" et vecteurs "non-significatifs" (ou vecteurs-bruit). Le bruit n'est identifié qu'ensuite, comme étant formé de l'ensemble des composantes de moindre importance qui font que la dernière valeur propre de la matrice de covariance de l'observable n'est pas strictement nulle. Lorsque celle-ci a été artificiellement annulée, alors se trouve isolé le sous-espace des vecteurs composants significatifs (appelé "sous-espace source" en analyse spatiale), défini comme étant le sous-espace orthogonal au vecteur propre associé à la valeur propre nulle.

A ce niveau, le choix du modèle de signal vectoriel adopté, défini comme étant un certain sous-ensemble paramétré de l'espace vectoriel auquel appartient l'observable, joue un rôle fondamental : il importe, en effet, que les vecteurs-sources appartenant au modèle et au sous-espace source ci-dessus défini constituent une base de ce dernier. Cette contrainte, qui est vérifiée par le modèle particulier utilisé par PISARENKO (en raison du théorème de CARATHEODORY), implique que le problème d'analyse, posé en termes paramétriques, possède une solution unique. Dans le cas général, il est certainement peu aisé de vérifier si le modèle satisfait la dite contrainte.

Un autre problème délicat provient du fait que la matrice de covariance déterminée expérimentalement n'est, en pratique, qu'approximativement conforme au modèle choisi (par exemple, une matrice TOEPLITZ pour le modèle PISARENKO). La question reste ouverte de savoir quel critère de distance entre matrices il y a lieu d'utiliser pour déterminer la matrice conforme au modèle qui soit la plus proche de la matrice expérimentale (au paragraphe 4, on s'est contenté de procéder par moyennage sur les diagonales pour obtenir une matrice TOEPLITZ).

BIBLIOGRAPHIE

- [1].S.M.KAY,S.L.MARPLE. Spectrum analysis. A modern perspective. Proc.IEEE, 69, Nov.1981, 1380-1419.
- [2].J.CAPON. High-resolution frequency wavenumber spectrum analysis. Proc. IEEE, 57, Aug. 1969, 1408-1418.
- [3].R.T.LACOSS. Data adaptive spectral analysis methods. Geophysics, 36, Aug. 1971, 661-675.
- [4].V.F.PISARENKO. The retrieval of harmonics from a covariance function. Geophysical J.Royal Astronomical Soc., 33, 1973, 347-366
- [5].H.COX.Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors. J. Acoust. Soc. Am., 54, Sept. 1973, 771-785.
- [6].H.MERMOZ. Elimination de brouilleurs par traitement optimal d'antennes. Ann.Télecomm., 28, Juil.Août 1969, 282-293.
- [7].J. MUNIER,G.Y.DELISLE,B.FAURE,J.A.CUMMINS. Direction-finding using a discrete space matched filter. IEEE/AP.S Intern. Symp., LOS ANGELES, June 1981, 36-39.

