

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

RECEPTION OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE APRES TRANSMISSION  
DANS UN CANAL A MODULATION D'AMPLITUDE ALEATOIRE

Hocine CHERIFI-Georges TZIRITAS-Geneviève JOURDAIN

CEPHAG (Laboratoire Associé au C.N.R.S.) BP.46, 38402 ST-MARTIN-d'HERES (FRANCE)

## RESUME

Dans cet article on s'intéresse au problème de la transmission binaire des signaux dans un milieu aléatoire. Plus précisément on utilise comme modèle du canal de transmission un opérateur modulant de façon aléatoire l'amplitude complexe du signal émis. On suppose que le processus aléatoire caractérisant le canal est gaussien, centré, stationnaire, lorentzien d'ordre 1. Les caractéristiques statistiques sont déterminées par une identification préalable. Le signal à la réception est perturbé additivement par un bruit blanc gaussien.

Le problème ainsi formulé rentre dans dans le cadre de la détection de signaux gaussiens dans un bruit blanc gaussien. Il est bien connu que le récepteur optimal réalise l'estimation du signal reçu suivi de la corrélation avec l'observable. L'estimateur est ici de type filtre de Kalman. Cet estimateur est entièrement déterminé par la résolution d'une équation différentielle de Riccati. On donne des résultats numériques sur l'erreur quadratique moyenne d'estimation (E.Q.M.E.) ainsi que sur les performances du récepteur pour divers signaux émis, ceci pour diverses valeurs du rapport signal sur bruit à la réception et différentes valeurs du paramètre de dispersion : le paramètre de dispersion est défini comme étant le produit durée du signal émis par l'élargissement fréquentiel introduit par le canal.

L'estimateur optimal est difficile à déterminer. Aussi, on propose un nouveau récepteur sous-optimal. Celui-ci possède la même structure que l'optimal ; seul le gain du filtre de Kalman est déterminé d'une façon différente qui ne nécessite pas la résolution d'une équation différentielle. On donne des résultats numériques sur l'E.Q.M.E. qui montrent que le récepteur sous-optimal est pratiquement aussi performant que l'optimal.

## SUMMARY

This paper deals with binary transmission through a fluctuating channel. More exactly the propagation channel is represented by an operator randomly modulating the complex amplitude of the emitted signal. The channel is modelled as a zero-mean, stationary gaussian process. Its scattering function is Lorentzin of order one. Its statistical properties are prealably determined. The received signal is additively corrupted by a white gaussian noise process.

This problem is a special case of the general gaussian problem. It is well-known the optimum receiver is an estimator-correlator. To estimate the process generated by the channel we use a state variable realization. So we have to solve a Riccati differential equation to determine the optimum realizable filter. We give numerical results of the mean square estimation error (MSEE) and of the optimum receiver performance. Different transmitted signals are studied and different values of the parameters (signal-to-noise ratio, dispersion parameter). The "dispersion parameter" is defined as the product of signal duration by frequential fading due to the channel.

It is difficult to determine the optimum receiver, so we propose a new sub-optimum receiver which has the same structure as the optimum one. The Kalman filter gain is determined in a different way that doesn't need the resolution of a differential equation. Numerical results on the M.M.S.E. are given showing the sub-optimum receiver performs as well as the optimum one.

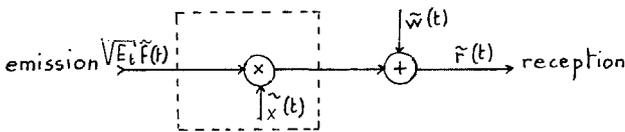


RECEPTION OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE APRES TRANSMISSION  
DANS UN CANAL A MODULATION D'AMPLITUDE ALEATOIRE

I - INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME

Dans de nombreux cas de propagation on décrit les propriétés du canal de transmission en l'assimilant à un filtre linéaire aléatoire [3-7]. Des méthodes d'identification des propriétés statistiques du milieu ont été développées [4]. Connaissant les caractéristiques du canal et du signal transmis, on peut étudier le problème de communication. Dans [8] on trouvera un développement plus complet de l'étude de la réception optimale dans les milieux dispersifs.

I-1 Modèle de la communication



Le signal déterministe émis, d'énergie  $E_t$ , est supposé à bande étroite autour de la fréquence porteuse  $\nu_0$  et nul en dehors de l'intervalle  $[0, T]$ . La représentation adoptée pour les signaux, les bruits et le canal est celle des enveloppes complexes [9].

$$f(t) = \sqrt{2 E_t} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{f}(t) e^{j 2 \pi \nu_0 t} \right\}$$

où  $\tilde{f}(t)$  est l'enveloppe complexe du signal relative à  $\nu_0$ . Elle est normée en énergie

$$\int_0^T |\tilde{f}(t)|^2 dt = 1$$

Le milieu de propagation procède à une modulation d'amplitude aléatoire du signal émis. Il est alors décrit par un processus multiplicatif  $\tilde{x}(t)$ . Nous ne nous intéressons ici qu'à la partie purement aléatoire du milieu ce qui suppose la valeur moyenne nulle :

$$E \{ \tilde{x}(t) \} = 0$$

Nous faisons l'hypothèse de milieu WSSUS\* et gaussien. Il est donc entièrement caractérisé par la connaissance statistique au second ordre. Pour traduire la dispersion en temps et en fréquence de l'énergie transmise, on utilise généralement la fonction de diffusion du milieu [3-4] (transformée de Fourier de la covariance du canal). Le milieu modélisé ici n'introduit qu'une dispersion fréquentielle ; la fonction de diffusion  $S_{\tilde{x}}(\nu)$  lorentzienne du premier ordre n'existe donc que sur l'axe des fréquences :

$$E \{ \tilde{x}(t) \tilde{x}^*(u) \} = \tilde{r}_{\tilde{x}}(t-u) = q e^{-k|t-u|} \xrightarrow{T.F.} \tilde{S}_{\tilde{x}}(\nu) = \frac{2 k q}{(2 \pi \nu)^2 + k^2} \quad (1)$$

où  $q$  représente un terme d'atténuation ;  $1/k$  peut s'interpréter comme le "temps de corrélation du canal".

La connaissance du milieu et du signal à l'émission définit de façon complète le processus  $\tilde{s}(t) = \tilde{x}(t) \tilde{f}(t)$  à la sortie du canal de transmission.

Les perturbations additives sont modélisées par un bruit blanc gaussien de valeur moyenne nulle :

$$E \{ \tilde{w}(t) \} = 0$$

et de covariance  $\int \tilde{w}(t, u) = N_0 \delta(t-u)$ .

Ce bruit est statistiquement indépendant du signal  $\tilde{s}(t)$ .

I-2 Communication binaire

On s'intéresse plus spécialement au problème de la communication où l'on transmet des signaux différents sous chacune des hypothèses.

\* Milieu stationnaire à diffuseurs non corrélés

Nous testons alors l'hypothèse de présence du signal  $\tilde{f}_0(t)$  contre l'hypothèse de présence du signal  $\tilde{f}_1(t)$  à partir de l'observation :

$$H_0 : \tilde{r}(t) = \tilde{s}_0(t) + \tilde{w}(t) \quad 0 < t < T$$

$$H_1 : \tilde{r}(t) = \tilde{s}_1(t) + \tilde{w}(t)$$

où  $\tilde{s}_i(t) = \tilde{f}_i(t) \tilde{x}(t)$  ( $i=0,1$ ) est un processus gaussien non stationnaire de valeur moyenne nulle et de covariance

$$\tilde{r}_{\tilde{s}_i}(t, u) = \tilde{f}_i(t) \tilde{r}_{\tilde{x}}(t-u) \tilde{f}_i^*(u) \quad i=0,1 \quad (2)$$

Le problème ainsi formulé s'apparente à la détection de signaux aléatoires gaussiens dans un bruit blanc gaussien. On peut démontrer [9] que le récepteur optimal selon la stratégie bayésienne réalise la différence de deux statistiques qui correspondent aux deux signaux. Si les deux hypothèses sont équiprobables, le récepteur optimal réalise le test :

$$\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0 \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^{\infty} p_{0j} \frac{\lambda_{ij} + N_0}{\lambda_{0j} + N_0} \quad (3)$$

où les  $\lambda_{ij}$ ,  $\lambda_{0j}$  sont valeurs propres de  $\int \tilde{s}_i(t, u) \tilde{s}_j^*(t, u)$  respectivement. Les statistiques des signaux physiquement réalisables sont :

$$\tilde{p}_i = \int_0^T \operatorname{Re} \{ \tilde{r}^*(t) \hat{\tilde{s}}_i(t) \} - |\hat{\tilde{s}}_i(t)|^2 dt \quad i=0,1 \quad (4)$$

où  $\hat{\tilde{s}}_i(t)$  ( $i=0,1$ ) est l'estimée optimale causale engendrée à partir de l'observable. Le terme optimal est relatif à la minimisation de l'erreur quadratique d'estimation :

$$\xi(t) = E \{ |\tilde{s}_i(t) - \hat{\tilde{s}}_i(t)|^2 \} \min \quad i=0,1$$

La détermination du filtre estimateur définit donc le récepteur optimal et le problème de détection se ramène à un problème d'estimation optimale au sens des moindres carrés.

II - ESTIMATEUR OPTIMAL

Le filtre estimateur optimal réalisable  $\tilde{h}(t, u)$  est en général solution de l'équation intégrale :

$$N_0 \tilde{h}(t, u) + \int_0^t \tilde{h}(t, z) \tilde{r}_{\tilde{s}_i}(z, u) dz = \tilde{r}_{\tilde{s}_i}(t, u) \quad 0 \leq u \leq t \quad (5)$$

Néanmoins, si la fonction de diffusion du milieu est rationnelle en fréquence on peut adopter une réalisation par "modélisation d'état" du canal ou du signal. La modélisation d'état du canal est particulièrement adaptée car les constituants du modèle interne sont indépendants du temps, et de la forme du signal émis.

II-1 Modèle interne du canal

La connaissance que l'on a du milieu ainsi que du signal émis intervient dans l'identification du modèle d'état (ordre et conditions initiales). Le milieu ayant une fonction de diffusion lorentzienne du premier ordre (1) on adopte un modèle d'état scalaire

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -k \tilde{x}(t) + \tilde{u}(t) \quad (6)$$

où  $\tilde{u}(t)$  est un bruit blanc gaussien centré de covariance :

$$\int \tilde{u}(t-u) = 2kq \delta(t-u)$$

l'observation est :  $\tilde{s}(t) = \sqrt{E_t} \tilde{f}(t) \tilde{x}(t)$  (7)

II-2 Estimateur à modèle interne

Le filtre estimateur optimal au sens de Wiener-Hopf est alors défini par les équations suivantes [1]. L'estimée du canal est :

$$\hat{\tilde{x}}(t) = -k \hat{\tilde{x}}(t) + \tilde{z}(t) [ \tilde{r}(t) - \hat{\tilde{s}}(t) ] \quad (8)$$

où l'estimée du signal est :

$$\hat{\tilde{s}}(t) = \sqrt{E_t} \tilde{f}(t) \hat{\tilde{x}}(t)$$

RECEPTION OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE APRES TRANSMISSION  
DANS UN CANAL A MODULATION D'AMPLITUDE ALEATOIRE

Le gain du filtre de Kalman est :

$$\tilde{z}(t) = \frac{\sqrt{E_s}}{N_0} \tilde{P}(t) \tilde{F}(t)$$

$\tilde{P}(t) = E \{ | \tilde{x}(t) - \hat{\tilde{x}}(t) |^2 \}$  est l'erreur quadratique moyenne d'estimation du canal et est solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{P}}(t) = -2k \tilde{P}(t) - \frac{E_s}{N_0} | \tilde{F}(t) |^2 \tilde{P}^2(t) + 2kq & 0 < t < T \\ \tilde{P}(0) = q \end{cases} \quad (9)$$

Le filtre estimateur peut se schématiser comme suit :

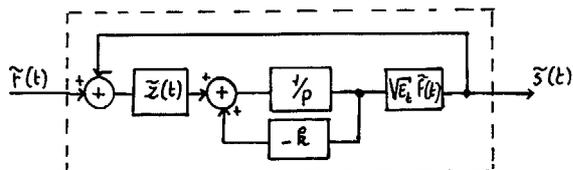


Fig. 1 - Filtre estimateur

On constate que l'estimateur, et par là le récepteur, est entièrement défini si l'on connaît le gain du filtre de Kalman  $\tilde{z}(t)$  qui nécessite la résolution d'une équation différentielle de Riccati. En général, on ne sait pas intégrer cette équation ; néanmoins de nombreux algorithmes en permettent la résolution numérique.

Si l'on opère une normalisation en temps et en amplitude de l'équation (9) l'erreur d'estimation normalisée  $\tilde{P}_n(x)$  est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{P}}_n(x) = -2kT \tilde{P}_n(x) - \frac{\bar{E}_r}{N_0} | \tilde{g}(x) |^2 \tilde{P}_n^2(x) + 2kT \\ \tilde{P}_n(0) = q \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (10)$$

où  $\bar{E}_r = \int_0^T \tilde{g}(t, t) dt$  représente l'énergie moyenne du signal à la réception et traduit l'atténuation moyenne due au milieu.  $\tilde{g}(x)$  est l'enveloppe complexe du signal émis normalisé en temps et en énergie

$$\tilde{g}(x) = \sqrt{T} \tilde{F}(xT) \quad \text{tel que} \quad \int_0^1 | \tilde{g}(x) |^2 dx = 1$$

L'erreur d'estimation dépend essentiellement de trois paramètres :

- La forme du signal émis ou plus précisément  $| \tilde{g}(x) |^2$
- On peut donc choisir des signaux réels et positifs sans perte de performance.
- Le rapport signal sur bruit moyen à la réception :  $\frac{\bar{E}_r}{N_0}$
- Le paramètre de dispersion  $kT$  qui peut s'interpréter comme la mémoire du canal vis-à-vis du signal émis. Si  $kT \ll 1$  le milieu est faiblement modulant et le modèle du canal se rapproche d'un modèle de type Rayleigh. Si  $kT \gg 1$  le milieu évolue beaucoup pendant la durée d'émission d'un message, et il n'y a pratiquement plus aucune corrélation entre des échantillons du signal distants de  $1/k$ .

III-RECEPTEUR PROPOSE

III-1 Définition

Dans l'élaboration du récepteur optimal le calcul du gain  $\tilde{z}(t)$  est difficile car il requiert la résolution de l'équation de Riccati. Or des simulations ont montré que dans certains cas on pouvait l'approximer par  $\frac{\sqrt{E_s}}{N_0} | \tilde{F}(t) |$  à un coefficient de proportionnalité près.

Nous proposons donc un nouveau récepteur de même structure que l'optimal [2]. Ce récepteur est sous optimal car l'estimation ne minimisera plus l'erreur quadratique moyenne.

Récepteur optimal

$$\tilde{z}(t) = \frac{\sqrt{E_s}}{N_0} \tilde{P}(t) \tilde{F}(t)$$

Récepteur proposé

$$\tilde{z}_{so}(t) = \frac{\lambda \sqrt{E_s}}{N_0} | \tilde{F}(t) |$$

III-2 Choix de  $\lambda$  lié à la minimisation de l'erreur

Il subsiste un degré de liberté, le coefficient du nouveau gain  $\tilde{z}_{so}(t)$ . La détermination de cette valeur exige une nouvelle contrainte. Les performances du récepteur optimal sont directement liées à l'intégrale de l'erreur d'estimation du processus  $\tilde{s}(t)$  sur le temps d'observation. On propose donc d'adopter la valeur de  $\lambda$  qui minimise cette même quantité :

$$\lambda \quad \text{tel que} \quad \left\{ \int_0^T \tilde{\xi}_{so}(t) dt \right\} \min \quad (11)$$

où  $\tilde{\xi}_{so}(t)$  représente l'erreur d'estimation du processus  $\tilde{s}(t)$  pour l'estimateur proposé

$$\tilde{\xi}_{so}(t) = E \{ | \tilde{s}(t) - \hat{\tilde{s}}_{so}(t) |^2 \} = | \tilde{F}(t) |^2 \tilde{P}_{so}(t)$$

Or même dans des cas relativement simples, l'adoption de ce critère ne conduit pas à une expression analytique du coefficient. En effet, l'erreur quadratique moyenne d'estimation du modèle d'état  $\tilde{P}_{so}(t)$  est solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{P}}_{so}(t) = -2(k + \tilde{z}_{so}(t) \sqrt{E_s} | \tilde{F}(t) |) \tilde{P}_{so}(t) + 2kq + \tilde{z}_{so}^2(t) N_0 \\ \tilde{P}_{so}(0) = q \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

La détermination du coefficient nécessite donc la résolution de cette équation différentielle, l'intégration de (11), la minimisation de cette intégrale. Si l'expression sous l'intégrale est légèrement complexe le problème ne possède pas de solution analytique exacte.

III-3 Choix de  $\lambda$  lié au cas "stationnaire"

Notre démarche a consisté à s'inspirer des résultats d'un cas particulier relativement simple. Considérons le cas de l'enveloppe carrée à l'émission.  $\tilde{F}(t) = \sqrt{1/T} \quad 0 \leq t \leq T$

Alors, la solution de l'équation de Riccati (estimateur optimal) tend vers une valeur asymptotique (Steady State). La connaissance de cette propriété va nous permettre de l'intégrer analytiquement.

III-3-1 Estimateur optimal

Reprenons donc l'estimateur optimal pour ce cas là. L'erreur d'estimation du canal est solution de l'équation (10)

On obtient en intégrant :

$$\tilde{P}_n(x) = P_\infty \frac{1 + \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right) e^{-2kT\alpha x}}{1 - \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 e^{-2kT\alpha x}} \quad (12)$$

où  $P_\infty$  désigne la valeur "asymptotique" ( $x \gg 1$ )

$$P_\infty = \frac{2}{\alpha + 1} \quad \alpha \pm \sqrt{1 + \frac{2(\bar{E}_r/N_0)}{kT}} \quad (13)$$

Nota : si  $kT \gg 1$  dans (12) alors  $\tilde{P}_n(x) \approx P_\infty$  dans ce cas, la valeur la plus favorable du coefficient de gain du filtre pour l'estimateur proposé est celle qui conduit à la même valeur de l'erreur d'estimation pour l'estimateur optimal dans son régime stable.

III-3-2 Estimateur proposé

En s'inspirant des différentes remarques ci-dessus on choisit comme valeur de  $\lambda$  :

$$\lambda = y P_\infty$$



RECEPTION OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE APRES TRANSMISSION  
DANS UN CANAL A MODULATION D'AMPLITUDE ALEATOIRE

En opérant sur les équations normalisées on peut alors écrire l'erreur d'estimation de l'estimateur sous-optimal comme solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{P}_{so}(x) = -2KT \{1 + y(x-1) \} \tilde{g}(x) \frac{P_{so}(x)}{x^2} - y^2 x(x-1)^2 \tilde{g}(x) \\ P_{so}(0) = 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (14)$$

si  $\tilde{F}(t) = \sqrt{1/T}$  alors  $\tilde{g}(x) = 1 \quad x \in [0, 1]$

On peut alors mener à terme les calculs. Seule la minimisation de l'intégrale de l'erreur (11) est effectuée numériquement.

L'étude de la valeur du coefficient  $y$  en fonction du paramètre de dispersion  $KT$  conduit à des valeurs peu différentes de 1 si  $KT \ll 1$ . Ceci correspond à une durée courte du régime transitoire de l'erreur d'estimation. Ces résultats suggèrent d'adopter comme valeur du coefficient du gain du filtre :

$$\lambda = P_{so}$$

Il est à noter que cette valeur correspond à un critère de minimisation de l'erreur quadratique d'estimation à l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{so}(t) = \min$$

Nous le désignerons par "critère de minimisation de  $P_{so}(\infty)$ "

III-4-1 Performances des estimateurs pour  $f(t) = \sqrt{1/T}$

Nous avons tracé sur un même graphique l'évolution temporelle de l'erreur quadratique moyenne d'estimation de l'estimateur optimal et de l'estimateur sous-optimal pour des valeurs de la variable  $y$  correspondant aux deux critères de minimisation précédemment définis.

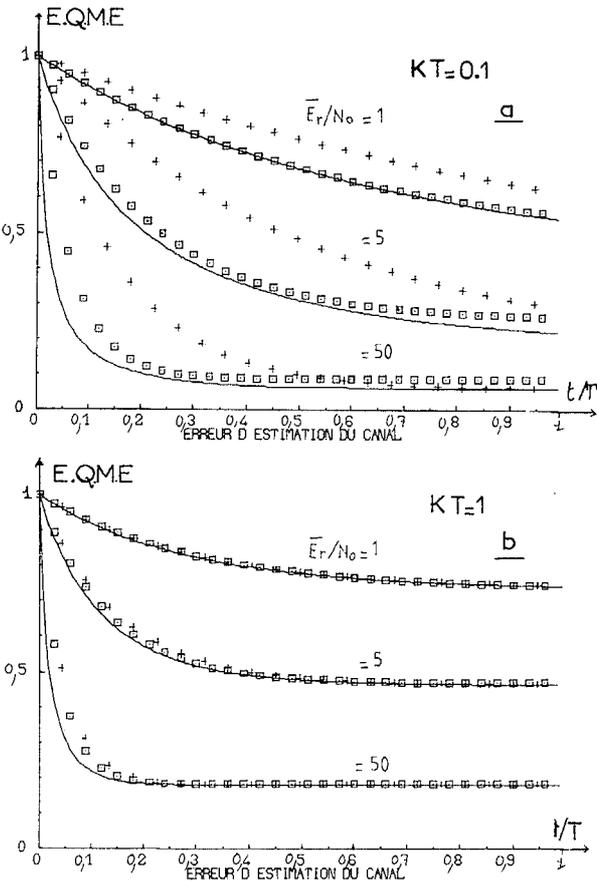


Figure 2 : Comparaison des estimateurs  
 — estimateur optimal  
 □ critère de minimisation de  $\int_0^T P_{so}(t) dt$   
 + critère de minimisation de  $P_{so}(\infty)$

La première valeur du paramètre  $KT$  (cas a) correspond à un canal faiblement dispersif vis-à-vis du signal émis. L'estimateur déduit du critère de minimisation de l'intégrale de l'erreur présente un meilleur comportement surtout au début de l'intervalle d'observation. Il "suit" mieux le régime transitoire. La différence constatée entre les deux critères a tendance à diminuer à mesure que le temps augmente.

Lorsque la dispersion du canal augmente (cas b) on constate que les courbes sont pratiquement confondues. Donc quelque soit le critère adopté, l'estimateur proposé est aussi performant que l'estimateur optimal.

III-4-2 Performance des estimateurs pour d'autres formes de signaux

Dans ce cas, on ne peut intégrer l'équation différentielle régissant l'erreur d'estimation. Nous fixons donc arbitrairement le coefficient de gain du filtre estimateur à la valeur déterminée précédemment en adoptant le critère de minimisation de l'erreur

asymptotique :  $\tilde{z}_{so}(t) = \frac{P_{so}}{N_0} \sqrt{E_r} |\tilde{F}(t)|$

Nous avons étudié diverses formes de l'enveloppe complexe du signal émis.

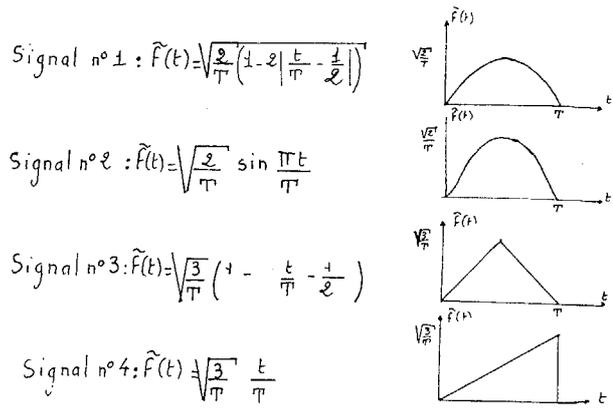
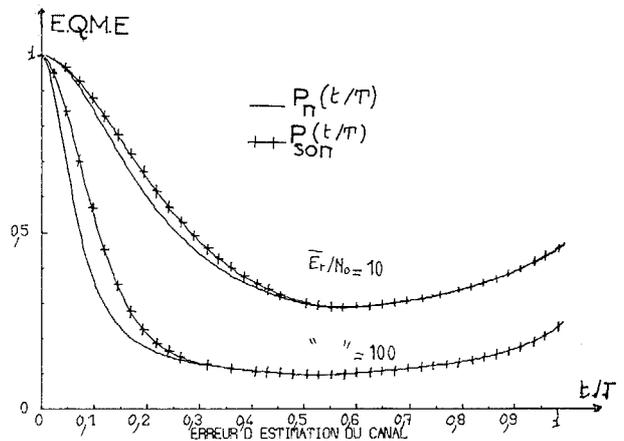


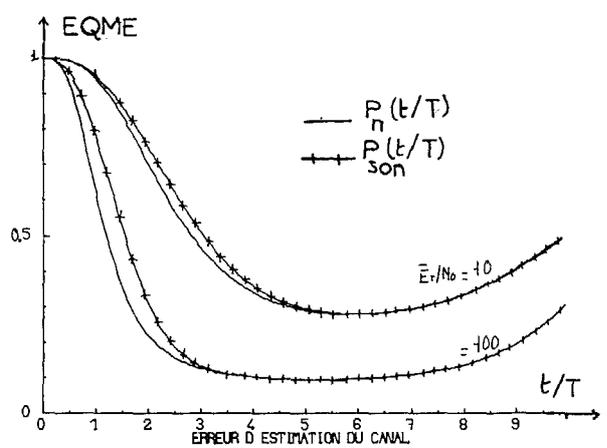
Figure 3

Nous présentons l'erreur d'estimation de l'estimateur optimal et de l'estimateur proposé pour une valeur de paramètre  $KT = 1$

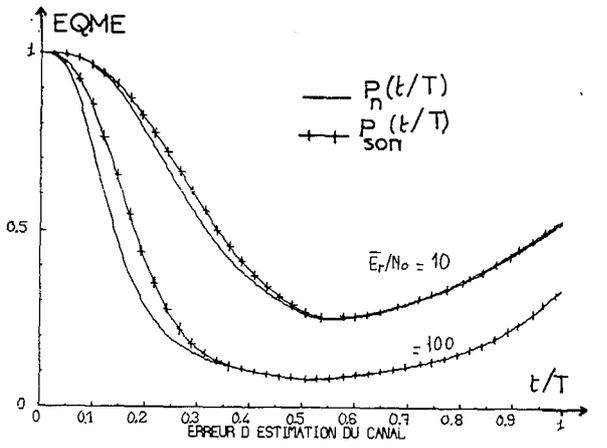


Signal n°1

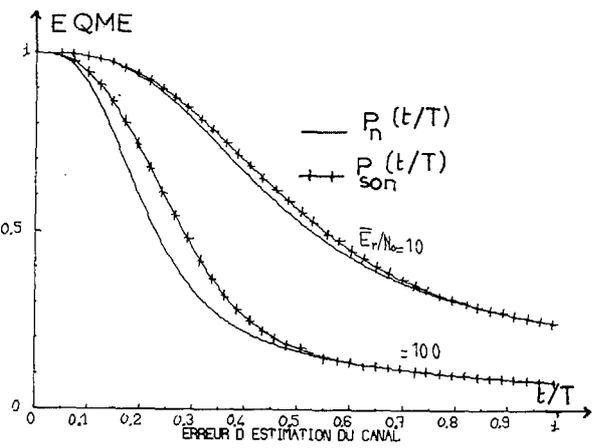
RECEPTION OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE APRES TRANSMISSION  
DANS UN CANAL A MODULATION D'AMPLITUDE ALEATOIRE



Signal n°2



Signal n°3



Signal n°4

Figure 4

Indépendamment de la forme du signal, on remarque le même comportement ensemble que pour le signal carré : à savoir ; un phénomène transitoire où l'estimateur proposé "s'éloigne" de l'estimateur optimal lequel est d'autant plus court que  $kT$  augmente, et un régime permanent où l'estimateur converge. De plus pour des valeurs de  $kT$  1 les courbes se confondent. Ceci nous permet de conclure que dans un milieu "suffisamment" modulant vis-à-vis de la durée du signal émis, l'estimateur proposé est aussi performant que l'estimateur optimal.

IV PERFORMANCE DU RECEPTEUR EN DETECTION  
-PROBABILITE D'ERREUR

IV-1 Récepteur optimal

Les performances de l'estimateur optimal de  $s(t)$  sont liées à une erreur quadratique moyenne. Celles du récepteur en communication binaire sont liées à la probabilité d'erreur :

$$Pr(\epsilon) = \frac{1}{2} \text{Prob}(H_1 \text{ Choisi} / H_0 \text{ Vrai}) + \text{Prob}(H_0 \text{ Choisi} / H_1 \text{ Vrai})$$

Elle s'obtient à partir de la densité de probabilité de la statistique de décision sous chacune des hypothèses

$$Pr(\epsilon) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} P_{\ell/H_0}(\ell) d\ell + \int_{-\infty}^{\infty} P_{\ell/H_1}(\ell) d\ell \right\} \quad (15)$$

Dans le type de problème étudié, le récepteur réalise une opération non linéaire sur le processus observé  $r(t)$ . La densité de probabilité de la statistique de décision est alors inconnue. En utilisant certaines particularités propres à la réception optimale selon la stratégie bayésienne, Collins a développé des expressions approchées de la probabilité d'erreur [6-9]. L'emploi de ces expressions n'est aisé que dans le cas de la communication binaire symétrique (problème de classification entre deux signaux de mêmes valeurs propres et de fonctions propres orthogonales). Nous nous restreignons à ce cas.

Pierce a borné la probabilité d'erreur :

$$Pr(\epsilon) \leq \frac{1}{2} \exp \left[ \mathcal{N}(1/2) \cdot \frac{\bar{E}_r}{N_0} \right] \quad (16)$$

où  $\mathcal{N}(1/2)$  est un indice de performance relié directement à l'erreur quadratique moyenne d'estimation de  $s(t)$  par l'expression :

$$\mathcal{N}(1/2) = \frac{1}{\bar{E}_r} \int_0^T \left\{ \xi(t/\xi(\cdot), N_0) - \xi(t/\xi(\cdot), 2N_0) \right\} dt \quad (17)$$

Dans [1] on trouvera une étude détaillée des performances du récepteur optimal.

A titre d'exemple nous présentons une courbe de l'indice de performance en fonction du rapport signal sur bruit pour un signal carré à l'émission pour diverses valeurs du paramètre de dispersion.

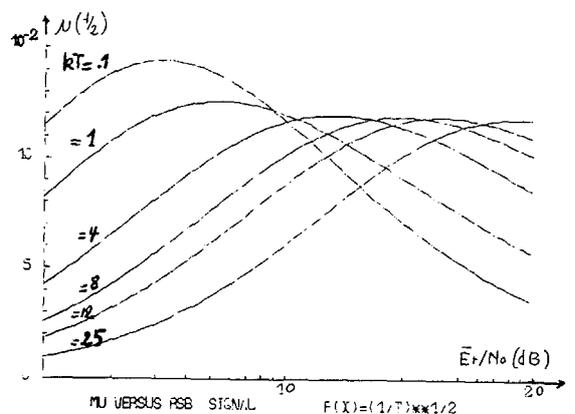


Figure 6

Conformément aux résultats de Kennedy [6], on remarque qu'il existe une valeur du couple de paramètre  $(kT, \bar{E}_r/N_0)$  qui optimise les performances :

$$\frac{\bar{E}_r/N_0}{1 + kT_u} \approx 3.4 \quad T_u \triangleq \int_0^T |\hat{f}(t)|^2 dt \quad (18)$$

Ce rapport peut s'interpréter comme le rapport signal sur bruit par chemin de diversité implicite [5].



RECEPTION OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE APRES TRANSMISSION  
DANS UN CANAL A MODULATION D'AMPLITUDE ALEATOIRE

#### IV-2 Récepteur sous-optimal

Pour le récepteur proposé ces expressions ne sont plus valables. On peut néanmoins tirer quelques conclusions.

##### IV-2-1 Processus "stationnaire" temps d'observation long (SPLOT)

Si le processus  $\tilde{s}(t)$  à la sortie du canal est stationnaire ( $f(t)=\text{constante}$ ) et la durée de transmission  $T$  est longue devant la mémoire du canal  $1/k$  on peut approximer le filtre estimateur par un filtre invariant en temps. Pour ce faire on néglige le phénomène transitoire et on ne s'intéresse qu'au régime permanent.

On montre aisément que dans ce cas le récepteur optimal et le récepteur sous-optimal sont équivalents. En effet, les deux estimateurs conduisent alors à la même erreur d'estimation ; ils sont donc identiques en détection.

Il reste à déterminer le domaine de validité d'une telle approximation. Pour ce faire, nous avons étudié l'erreur relative de l'indice de performance donné en (17) et de ces mêmes indices en faisant l'approximation "SPLOT" :

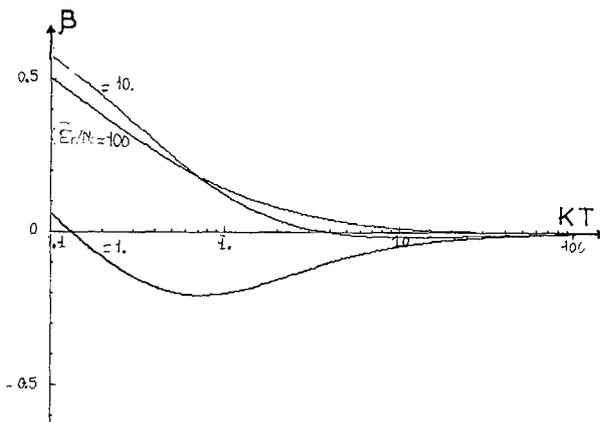


Figure 7

La courbe ci-dessus montre l'évolution de l'erreur relative sur l'indice de performance en fonction du paramètre de dispersion  $kT$  pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit à la réception :

$$\beta(kT) = \frac{\mu(\frac{1}{2}, kT, \bar{E}_r/N_0) - \mu_\infty(\frac{1}{2}, kT, \bar{E}_r/N_0)}{\mu(\frac{1}{2}, kT, \bar{E}_r/N_0)}$$

On remarque que pour  $kT \gg 10$  indépendamment du rapport signal sur bruit l'erreur est pratiquement nulle.

Si nous étudions l'erreur relative  $\beta$  en fonction du rapport signal sur bruit par chemin de diversité implicite, on remarque que celle-ci est pratiquement nulle si la condition (18) est vérifiée, moyennant  $kT > 1$ . On peut donc conclure que si l'on se place dans des conditions optimales de détection, le récepteur proposé possède les mêmes performances que le récepteur optimal.

##### IV-2-2 Processus non stationnaire

On ne peut dans ce cas faire l'approximation précédente. Nous avons conclu en [1] que les performances étaient faiblement influencées par la forme du signal émis. De plus si l'on néglige le phénomène transitoire et si  $kT > 1$ , les performances des estimateurs sont pratiquement identiques. Donc, si l'estimateur proposé est quasi-optimal, le récepteur au niveau probabilité d'erreur l'est aussi.

#### V CONCLUSION

On s'est intéressé à la modulation aléatoire d'un signal. Le récepteur optimal comprend un estimateur optimal (Kalman) et un opérateur non linéaire. Nous avons proposé de simplifier le calcul du gain de Kalman.

L'estimateur proposé est très adapté pour l'estimation du processus  $\tilde{s}(t)$  lorsque le milieu est déjà assez fluctuant vis-à-vis de la durée du signal émis ( $kT > 1$ ). Dans ce cas cet estimateur est pratiquement aussi performant que l'estimateur qui minimise l'erreur quadratique moyenne. Afin de chiffrer les performances du récepteur, nous avons considéré le cas de la communication binaire symétrique pour des raisons de commodité. Les conclusions peuvent être étendues au cas de la détection binaire générale.

Considérant le cas du processus "stationnaire", on montre que si la modélisation du milieu est particulièrement adaptée ( $kT > 1$ ), le récepteur converge assez rapidement vers l'optimal au niveau de la probabilité d'erreur. L'erreur introduite est alors minimale si l'on se place dans des conditions optimales de réception (rapport signal sur bruit par chemin de diversité implicite de l'ordre de 3,4). Lorsque  $s(t)$  est non stationnaire, les résultats restent valables. Néanmoins, il serait intéressant de déterminer la loi de probabilité de la statistique de décision pour comparer ce récepteur à ses concurrents. De plus on doit pouvoir généraliser aisément l'étude pour un milieu à trajets multiples avec élargissement fréquentiel.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHERIFI H. "Etude des performances du récepteur optimal pour la communication binaire symétrique dans un canal aléatoire et dispersif en fréquence". Rapport DEA, Juin 1981.
- [2] CHERIFI H. "Récepteur sous-optimal pour la communication dans un canal à modulation d'amplitude aléatoire" Rapport CEPHAG 1982
- [3] JOURDAIN G. "Filtres linéaires aléatoires et non stationnaires, modèles, simulation et application" Thèse Doctorat d'Etat ès-Sciences Grenoble 1976
- [4] JOURDAIN G, JOURDAIN JY. "Characterization of submarine acoustics transmission channel". NATO, Copenhague, Août 1980
- [5] JOURDAIN G, TZIRITAS G. "Communication in a fluctuating channel. Models and use of implicit diversity". ICASSP 82 p-113-116
- [6] KENNEDY R. "Fading dispersive communication channels" J. WILEY London 1969
- [7] LARCHER J. "Etude de la propagation aléatoire des ondes sonores en milieu aérien naturel". Thèse de Docteur Ingénieur INPG Juin 1976
- [8] TZIRITAS G. "Communications dans un canal aléatoire dispersif". Thèse de Docteur Ingénieur INPG Février 1981.
- [9] VAN-TREES H. "Détection estimation and modulation theory". Part III J. Wiley New York 1971.