

# NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 16 au 20 MAI 1983

---

## IDENTIFICATION d'UNE CLASSE DE PROCESSUS DE POISSON FILTRÉS

Denis de BRUCQ

Université de ROUEN, Laboratoire de Traitement de l'Information, BP67 76130 MONT SAINT AIGNAN.

---

### RESUME

La formulation d'un modèle est un pas essentiel pour la compréhension d'un phénomène expérimental. Dans ce travail, une nouvelle classe de processus de Poisson, filtrés est introduite : l'amplitude aléatoire suit une loi sphériquement invariante et le filtre est réel, linéaire, causal à minimum de phase. Avec ces hypothèses, le modèle peut être identifié à partir des résultats expérimentaux.

### SUMMARY

The formulation of a model is an essential step in the experimental process of understanding a phenomenon. In this paper a new class of filtered Poisson processes is introduced : the amplitude has a law which is spherically invariant and the filter is real, linear and causal. It is shown how such a model can be identified from experimental data.



### Introduction

Le modèle introduit dans ce travail est un outil utile pour décrire par exemple le bruit acoustique marin, le bruit d'appareillages électroniques, certaines parties d'électroencéphalogrammes.

Un phénomène initial, considéré comme poissonnier dans le temps, a une amplitude aléatoire  $C$  de loi sphériquement invariante. Ce phénomène est observé au moyen d'un filtre linéaire causal de réponse impulsionnelle  $G$ . Ainsi l'observation prend la forme

$$Z(\omega, t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j(\omega) G(t - \tau_j(\omega)) \quad -\infty < t < +\infty$$

où  $\tau_j$  est l'instant de l'événement  $j$  du processus de Poisson.

Les lois sphériquement invariantes, mélanges de lois gaussiennes centrées, sont assez générales et ont été souvent utilisées pour des descriptions de bruits marins.

La caractérisation de telles lois, est fournie dans le § 1 à l'aide d'un théorème de représentation de Bernstein ([5] p 292).

Dans une seconde partie, la loi temporelle du processus observé  $Z$  est déterminée par la fonction caractéristique. A partir de celle-ci on montre dans la 3ème partie que les moments d'ordre impair sont nuls et on calcule les moments d'ordre deux et quatre.

A l'aide de ces moments, il est possible de calculer la réponse impulsionnelle  $G$  du filtre linéaire, causal à phase minimale.

La loi  $\mu$  décrivant la variable sphériquement invariante  $C$ , est approchée par une combinaison convexe de Dirac  $\mu = \sum_{k=1}^e \mu_k \sigma_k$ .

Le paramètre  $\lambda$  de la loi de Poisson ainsi que les 2 e paramètres  $\mu_k$  et  $\sigma_k$  sont identifiés dans la dernière partie. On utilise les moments  $E(Z(t)^{2p})$   $p = 1, 2, \dots, 2e$  du processus  $Z$ , stationnaire au sens strict.

Ce travail a été subventionné par deux contrats N 00014-75 -C- 0491 et N 00014-81- K -0373. Les démonstrations complètes font parties d'un article avec Gualtierotti Antonio, article à paraître en anglais

Je tiens à remercier Monsieur C. R. Baker, professeur à l'Université de Chapel Hill en Caroline du Nord pour ses nombreuses suggestions.

### 1 - Caractérisation et exemples de variables aléatoires de lois sphériquement invariantes.

On se limite ici au cas où l'espace vectoriel engendré par un processus sphériquement invariant est de dimension infinie ; en ce cas (cf [4] p21), les points extrêmes de l'ensemble de telles lois sont gaussiens, de densité

$$(1-1) \quad \frac{d\mu}{d\alpha}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{où } \alpha \text{ est la mesure de Lebesgue.}$$

De façon naturelle on se restreint à la classe de lois sphériquement invariantes, définie à l'aide d'une probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{R}_+$  au moyen de la fonction caractéristique  $\forall u \in \mathbb{R}$

$$(1-2) \quad \varphi(u) = \int_{[0, \infty[} e^{-\frac{a^2 u^2}{2}} \mu(da)$$

On peut appeler ces lois, lois sphériquement invariantes asymptotiques. Ainsi  $\varphi(0) = \mu([0, \infty[) = 1$  ; Si l'on suppose que  $C$  variable aléatoire réelle de fonction caractéristique  $\varphi$  est de carré intégrable alors

$$E(C) = 0 \quad \text{et}$$

$$(1-3) E(C^2) = \|C\|^2 = \int_{[0, \infty[} a^2 \sigma \mu(a) < \infty$$

Prenons pour probabilité  $\mu$ , une combinaison convexe de  $n$  mesures de Dirac en  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}_+$  soit

$$(1-4) \mu \overset{\Delta}{=} \mu_1 \delta_{\sigma_1} + \mu_2 \delta_{\sigma_2} + \dots + \mu_n \delta_{\sigma_n} \quad \text{où}$$

$$\mu_k \geq 0 \text{ et } \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1.$$

Ainsi la loi sphériquement invariante associée est définie par la fonction caractéristique :

$$(1-5) \varphi(u) = \mu_1 e^{-\frac{u^2 \sigma_1^2}{2}} + \mu_2 e^{-\frac{u^2 \sigma_2^2}{2}} + \dots + \mu_n e^{-\frac{u^2 \sigma_n^2}{2}}$$

Par le changement de variable  $a \rightarrow \frac{a}{\|C\|}$ , on suppose

$$(1-6) \int_{[0, \frac{a}{\|C\|}[} \sigma \mu(a) = 1$$

$$(1-7) \varphi(u) = \int_{[0, \infty[} e^{-\frac{u^2 \|C\|^2 a^2}{2}} \sigma \mu(a)$$

Les lois sphériquement invariantes asymptotiques ont une structure particulièrement simple que nous allons préciser maintenant. Rappelons le théorème de Bernstein (cf [5] p 292)

Il existe une mesure positive  $\nu$  sur  $\mathbb{R}_+$ , telle que  $\forall \nu > 0$

$$\psi(\nu) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-b\nu} \sigma \nu(b) \text{ si et seulement si}$$

$\psi$  est à valeurs réelles,  $\psi$  est  $\mathcal{C}^\infty([0, \infty[)$  et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n \frac{d^n \psi}{d\nu^n} > 0$$

On dit que  $\psi$  est complètement monotone.

En effectuant le changement de variables  $b = \frac{a^2}{2}$ , bijectif sur  $\mathbb{R}_+$  on obtient :

Théorème 1-1

Une loi de probabilité  $P$  est sphériquement invariante (asymptotique) sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  si et seulement si

- 1°)  $P$  est symétrique.

- 2°)  $\varphi$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- 3°) La fonction  $\psi$  définie par  $\psi(u^2) = \varphi(u)$  vérifie

$$(-1)^n \frac{d^n \psi}{d\nu^n}(\nu) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \nu \in ]0, \infty[$$

On vérifie que la loi de Student à  $k$  degrés de liberté, est sphériquement invariante, asymptotique.

Il en est de même pour la loi exponentielle, de densité

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{En ce cas } \varphi(u) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + u^2} \text{ et } \psi(\nu) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \nu}$$

Ainsi les combinaisons convexes de densités gaussiennes centrées conduisent à des densités présentant éventuellement un point anguleux en  $x = 0$ .

La classe des lois sphériquement invariantes asymptotiques paraît assez vaste pour décrire les variables aléatoires symétriques sur  $\mathbb{R}$ , celles provenant de bruit de fond.

Étudions maintenant l'évolution au cours du temps, précisons la modélisation du processus.

II - Fonction caractéristique d'un processus de Poisson filtré

Soit  $(\tau_j, j \in \mathbb{Z})$ , les instants aléatoires d'un processus de poisson. Ainsi pour tout intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , le nombre aléatoire  $N$  d'événements sur  $[a, b]$  vérifie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$(II-1) P(N = n) = e^{-\lambda(b-a)} \frac{[\lambda(b-a)]^n}{n!} \quad \text{où } \lambda$$

est le paramètre du processus de Poisson.

L'événement en  $\tau$  produit, sur un capteur, à l'instant  $t$ , un effet proportionnel à la fonction continue



$G(t, \tau)$ . En supposant la stationnarité  $G(t, \tau) = G(t - \tau)$  et la causalité  $G(t - \tau) = 0$  pour  $t < \tau$  :

On suppose de plus que

$$(II-2) \int_0^\infty |G(s)|^2 ds = \int_\tau^\infty |G(t-\tau)|^2 dt = 1.$$

L'effet de l'événement en  $\tau$ , sur le capteur, est d'énergie finie et on a normalisé  $G$ .

L'énergie captée est aléatoire et le modèle considère un coefficient  $C$  aléatoire dont la loi est restreinte à être sphériquement invariante, ainsi l'effet sur le capteur vaut  $C G(t - \tau)$  avec  $G$  fonction certaine et  $C$  coefficient aléatoire.

Finalement on suppose la linéarité des effets des divers événements sur le capteur et l'observation  $Z$  s'écrit  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$Z(t, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} C_j(\omega) G(t - \tau_j(\omega)).$$

Les amplitudes aléatoires  $(C_j, j \in \mathbb{Z})$  sont indépendantes deux à deux et indépendantes du processus de Poisson  $(\tau_j; j \in \mathbb{N})$ . On montre assez facilement que si

$E(|C|) < \infty$  et si  $\int_0^\infty |G(s)| ds < \infty$  alors  $Z(t)$  est intégrable et

$$E(|Z(t)|) \leq \lambda E(|C|) \int_0^\infty |G(s)| ds$$

Ce sont plutôt des propriétés énergétiques qui sont intéressantes et en raison de la modélisation de l'observation  $Z$ , il est possible de définir entièrement la loi temporelle du processus  $(Z(t); t \in \mathbb{R})$ .

Enonçons le résultat fondamental.

Théorème II-1

Si  $Z$  est le processus de Poisson filtré  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$(II-3) Z(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} C_j G(t - \tau_j) \text{ si}$$

$$(II-4) \int_{\mathbb{R}} |G(s)|^2 ds < \infty \text{ et si}$$

$$(II-5) \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a) < \infty \text{ alors}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{R}$$

$$\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$(II-6) \varphi(u) = E(\exp i \langle u, Z \rangle) =$$

$$\exp - \lambda \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} ds d\mu(a)$$

$$\left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{a}{2} \left( \sum u_k G(t_k + s) \right)^2 \right\} \right]$$

$$\text{où } \langle u, Z \rangle \triangleq u_1 Z(t_1) + u_2 Z(t_2) + \dots + u_m Z(t_m)$$

L'extension de ces résultats au cas vectoriel ne pose aucun problème théorique : l'observation peut être vectorielle et provenir de  $q$  capteurs. En ce cas, la fonction  $G$  est vectorielle à  $q$ -composantes.

III- Calcul des moments de  $Z$

La donnée de la fonction caractéristique  $\varphi$  permet le calcul des divers moments sous réserve d'existence de ceux-ci. D'ailleurs  $\varphi$  étant une fonction de  $u^2$ , les moments d'ordre impair, sont nuls.

L'expression de la seconde fonction caractéristique  $\psi$  est particulièrement simple :

$$(III-1) \psi(u) = \log \varphi(u) = - \lambda \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} ds d\mu(a)$$

$$\left[ 1 - \exp - \frac{a^2}{2} \langle u, G \rangle^2(s) \right]$$

où l'on a posé

$$(III-2) \langle u, G \rangle^2(s) \triangleq u_1 G(t_1 + s) + \dots + u_m G(t_m + s).$$

Les développements en série de la fonction  $\varphi$  en fonction des moments puis de l'exponentielle dans la seconde fonction caractéristique conduisent, en égalant les puissances de  $u_1^2$  et de  $u_1 u_2$ , à :

Proposition III-1

$$(III-3) E(Z(t)^2) = \lambda \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} G(s)^2 ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(III-4) E(Z(t_1)Z(t_2)) = \lambda \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} G(t_1 + s)G(t_2 + s) ds$$

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$



# IDENTIFICATION d'UNE CLASSE DE PROCESSUS DE POISSON FILTRES

On rappelle que l'on a posé  $\int_{\mathbb{R}} G(s)^2 ds = 1$  et que  $G(s) = G(s)1(s)$ . On voit que pour tout  $t_1 = t_2$  la formule (4) donne (3).

En effectuant les développements limités jusqu'à l'ordre 4, nous écrivons l'égalité de  $u_1^4$  et de  $u_1^2 u_2^2$

### Proposition III-2

$$E(Z(t)^4) = 3 \lambda \int_{\mathbb{R}_+} a^4 d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} ds G^4(s) +$$

$$3 \lambda^2 \left[ \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} ds G^2(s) \right]^2$$

$$E(Z(t_1)^2 Z(t_2)^2) =$$

$$3 \lambda \int_{\mathbb{R}_+} a^4 d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} ds G^2(t_1+s) G^2(t_2+s) +$$

$$+ \lambda^2 \left[ \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} ds G^2(s) \right]^2 +$$

$$+ 2 \lambda^2 \left[ \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} ds G(t_1+s) G(t_2+s) \right]^2$$

## IV. Identification de la fonction de Green G

La covariance  $\Gamma$  de  $Z(t)$ , est stationnaire et vaut  $\forall \tau \in \mathbb{R}$  :

$$(IV-1) \Gamma(\tau) = E(Z(t)Z(t-\tau)) =$$

$$\lambda \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} G(s)G(s+\tau) ds$$

Ainsi  $\lambda \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a)$  est un facteur de normalisation où

$\lambda$  est le paramètre de la loi de Poisson et où

$\int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a)$  est le moment d'ordre 2 de l'amplitude

aléatoire  $C$ , sphériquement invariante. Comme l'on

a supposé  $\int_{\mathbb{R}_+} |G(s)|^2 ds = 1$ , on a

$$\Gamma(0) = \lambda \int_{\mathbb{R}_+} a^2 d\mu(a).$$

La fonction  $G$  à identifier vérifie donc l'égalité

$$(IV-2) \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} = \int_{\mathbb{R}} G(s)G(s+\tau) ds.$$

La transformée de Fourier va nous donner un moyen de calculer  $G$  sous réserve d'hypothèses complémentaires.

### Proposition IV-1

Soit  $g(f) = \mathcal{F}(G)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isf} G(s) ds$ . Alors

$$(IV-3) \Gamma(\tau) = \Gamma(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\tau} |g(f)|^2 \frac{df}{2\pi}$$

Ainsi dans le langage des automaticiens, le filtre causal de réponse impulsionnelle  $G$ , est de gain  $|g|$  connu : il suffit d'effectuer la transformée de Fourier inverse sur  $\Gamma$ . La donnée du gain  $|g|$  ne détermine cependant pas la réponse impulsionnelle  $G$ .

### Définition IV-2

Un filtre causal  $G$  est à phase minimale si  $1/g$  est également la réponse fréquentielle d'un filtre causal.

En ce cas le gain  $|g|$  détermine le filtre causal à phase minimale (cf [3] p 36)

Pour  $g$  réponse fréquentielle d'un filtre causal à phase minimale une extension analytique dans  $\mathbb{R}_+$  est possible et on définit  $\forall b > 0$

$$G^b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ift} g(f+ib) df.$$

Or cette fonction  $G^b$  s'exprime uniquement en fonction du gain  $|g|$  par l'expression

$$(IV-4) G^b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} df e^{-ift} \exp \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma(f+ib)+1}{\gamma-(f+ib)} \frac{\log|g(\gamma)|}{\gamma^2+1} d\gamma$$

Pour  $b$  assez petit, nous avons ainsi une approximation  $G^b$  de  $G$ , réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire, causal à phase minimale, en effet  $G^b$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{R}, dt)$  vers  $G$  lorsque  $b$  tend vers 0.



Avec  $\lambda$  et  $\sigma_k$  connus, le système (V-7) est linéaire en  $\mu_k$  avec redondance des équations. On le résoud ou bien l'on utilise les égalités (cf [1] p 22).

$$\frac{1}{2} \mu_k = \frac{1}{2 e^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left| P_j(\sigma_k) \right|^2} \quad k = 1, 2, \dots, e$$

En conclusion, la modélisation introduite dans ce travail, sous réserve d'hypothèses assez naturelles, permet de définir entièrement la loi temporelle d'un processus observation  $Z$  (vectorielle ou non). Les transformations non linéaires sur  $Z$  peuvent donc être étudiées. Nous sortons du cadre des processus du second ordre et des seules densités spectrales de puissance. L'hypothèse gaussienne peut être abandonnée.

Le modèle antérieur permet d'ajuster toute covariance

$\Gamma(\tau) = E(Z(t) Z(t-\tau)) \quad \tau \in \mathbb{R}$  et tout moment

$E(Z(t))^{2p} \quad p = 1, 2, \dots, 2e$ , les moments impairs

$E(Z(t))^{2k+1}$ ;  $k \in \mathbb{N}$  étant supposés nuls.

#### Bibliographie

- [1] N. I. AKHIEZER, The classical Moment Problem  
University Mathematical Monographs, Oliver & Boyd,  
London, 1965.
- [2] D. DUGUE, Traité de Statistique Théorique et  
appliquée, Masson et Cie, Paris, 1958.
- [3] H. DYM, H. P. KEAN, Gaussian Processes, Func-  
tion Theory and the Inverse Spectral Problem, Aca-  
demic Press, N. Y., San Francisco, London, 1976.
- [4] G. FOLLIOT, Sur des applications des structures  
convexes, processus sphériquement invariants, Con-  
vention DRME. Cethedec 78-613 rapport final

[5] P. A. MEYER, Probabilités et Potentiel,  
Hermann, 1966

[6] B. PICINBON, Spherically invariant and compound  
gaussian stochastic processes, IEE transactions  
on Information Theory, vol 1, T. 6, 1970, p. 77-79.

[7] G. RUCKEBUSH, Sur le problème de la Syn-  
thèse des Filtres, Colloque CNRS, Aussois 21-25  
sept. 1981, Vol 2, p. A1-1, A 1. 21, INRIA, BP105  
78153, Le Chesnay, France.

