NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE BARGMANN A LA CLASSIFICATION DES SIGNAUX

André BERTHON

Société AERO - 3 avenue de l'Opéra - 75001 PARIS

RESUME

La transformation de BARGMANN fournit une représentation des signaux par des fonctions entières qui est liée à la représentation de GABOR et permet une caractérisation simple des représentations temps-fréquence. On cherche ici une classification des signaux à partir de l'écriture de leur transformée comme produit infini de WEIERSTRASS. On montre que la classe des signaux gaussiens, caractérisée par l'absence de zéros de la fonction entière, est invariante par les transformations affines du plan temps-fréquence et l'on étudie l'action de ce groupe, d'abord dans ce cas puis dans le cas général. On peut alors ramener un signal quelconque à une forme canonique et on obtient une notion de complexité définie par comparaison avec les fonctions gaussiennes.

SUMMARY

The BARGMANN transform yields a representation of signals via entire functions which is related to the expansion of GABOR and leads to a simple characterization of time-frequency representations. One attempts a classification of signals starting from the writing of their transforms as WEIERSTRASS infinite products. It is shown that the class of gaussian signals, which is characterized by the absence of zeros of the entire function, is invariant under a group of transformations of the time-frequency complex plane, whose action is investigated. A general signal can be brought into a canonical form and one obtains a notion of complexity derived from the comparison with gaussian functions.

1.- INTRODUCTION

La transformation introduite par BARGMANN [1] est un isomorphisme entre l'espace de HILBERT des fonctions de carré sommable et celui des fonctions entières dont le module carré est sommable pour une certaine mesure sur le plan complexe $\mathbb{C}$. L'intérêt premier de cette représentation est de traiter les variables temps et fréquence (si l'on interprète les fonctions comme des signaux) de façon parfaitement symétrique ; de ce fait on obtient une expression très simple pour la fonction d'ambiguïté de deux signaux et une caractérisation des représentations conjointes temps-fréquence [2]. D'autre part le calcul de la transformée est équivalent à l'écriture du signal comme intégrale de signaux gaussiens, donnant un sens précis au développement proposé par GABOR [3].

On peut citer aussi des applications de l'isomorphisme de BARGMANN à l'optique quantique [4] et à la théorie quantique des champs dans le cadre des intégrales de FEYNMAN [5], [6]. On se propose ici d'examiner l'intérêt de la transformation dans l'optique de la classification des signaux. Pour cela on partira de la classification des fonctions entières selon leur croissance à l'infini, qui se traduit notamment par leur expression comme produit infini de WEIERSTRASS. Dans la deuxième section on rappelle les principaux résultats utilisés par la suite. Dans la troisième section on étudie une famille d'opérateurs, contenant notamment les changements d'échelle, qui constituent une représentation du groupe $SL(2,\mathbb{R})$ et on cherche des invariants par rapport à ces transformations. Dans la quatrième section on discute les conséquences de ces résultats pour la classification des signaux.

2.- DEFINITIONS ET RESULTATS

2.1 Généralités

Si f est une fonction de carré sommable sa transformée est :

$$F(z) = \pi^{-1/4} \int e^{-\frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}zx - \frac{1}{2}x^2} f(x)\,dx \tag{1}$$

élément de l'espace de HILBERT $\mathcal{B}$ de fonctions entières défini par le produit hermitien :

$$\langle F,G\rangle = \int \overline{F(z)}\,G(z)\,d\mu(z) \qquad d\mu = e^{-|z|^2}\frac{d^2z}{\pi}$$

Les fonctions de l'espace $\mathcal{B}$ sont de la forme :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \qquad \text{avec } \sum |a_n|^2 < \infty$$

L'isométrie fait correspondre les fonctions $\{z^n/\sqrt{n!}\}$ qui constituent une base hilbertienne orthonormée de $\mathcal{B}$, aux fonctions de HERMITE (base orthonormale de L_2 constituée de fonctions de la forme $e^{-1/2\,x^2} \times$ polynôme).

La transformation définit aussi un isomorphisme entre les familles d'opérateurs, bornés ou non, sur les deux espaces. En particulier, soit X l'opérateur de multiplication par x et Y l'opérateur de dérivation dans L_2, Z et D les mêmes opérateurs pour les fonctions complexes, on a la correspondance :

$$X \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(Z+D) \qquad Y \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(Z-D)$$

Cette symétrie entre les représentations de X et Y se traduit en particulier par le résultat suivant : si f a pour transformée $F(z)$, à la transformée de FOURIER de f correspond $F(iz)$.

Enfin l'espace $\mathcal{B}$ est à noyau reproduisant ce qu'exprime la formule suivante :

$$F(z) = \int e^{\overline{w}z} F(w)\,d\mu(w) \tag{2}$$

qui montre que les exponentielles constituent une pseudo-base continue de $\mathcal{B}$; ce sont les fonctions propres de l'opérateur (non hermitien) D, et les transformées des signaux gaussiens symétriques (ayant même écart-type en temps et en fréquence) [2].

2.2 Translation dans le plan temps-fréquence

Pour ξ et η réels les opérateurs $\exp(i\eta X)$ (décalage en fréquence) et $\exp \xi Y$ (translation de l'origine des temps) sont définis sur tout l'espace L_2. Ce sont des cas particuliers d'une famille d'opérateurs unitaires dont la définition est simple dans l'espace transformé $\mathcal{B}$. Soit ζ un nombre complexe, on pose :

$$(V_\zeta F)(z) = e^{-\frac{1}{2}|\zeta|^2 + \overline{\zeta}z} F(z-\zeta)$$

Les translations en fréquence et en temps considérées ci-dessus sont les cas particuliers $\zeta = i\eta/\sqrt{2}$ et $\zeta = -\xi/\sqrt{2}$, respectivement. Les opérateurs de translation admettent la loi de multiplication :

$$V_{\zeta_1} V_{\zeta_2} = e^{-i\,\mathrm{Im}\,\zeta_1\overline{\zeta}_2} V_{\zeta_1+\zeta_2}$$

La fonction d'ambiguïté de WOODWARD pour une fonction f s'écrit :

$$\chi_f(\xi,\eta) = \int \overline{f\left(x+\tfrac{\xi}{2}\right)} f\left(x-\tfrac{\xi}{2}\right) e^{-i\eta x}\,dx = \langle F|V_\zeta|F\rangle$$

pour $\zeta = (-\xi+i\eta)/\sqrt{2}$. Partant de cette formule [2] on retrouve facilement les propriétés classiques des représentations conjointes en temps et en fréquence [7], [8].

La version de la formule d'inversion de la fonction d'ambiguïté valable dans l'espace $\mathcal{B}$ est :

$$\overline{F(\sigma)}F(\tau)e^{-\overline{\sigma}\tau} = \int \langle F|V_\zeta|F\rangle e^{\overline{\sigma}\zeta - \tau\overline{\zeta} + \frac{1}{2}|\zeta|^2} d\mu(\zeta)$$

2.3 Remarques

Les opérateurs de translation V_ζ permettent de se ramener pour l'étude d'une fonction au cas où les valeurs moyennes des opérateurs X et Y sont nulles. Mais le développement en série de TAYLOR de $F(z)$ ou l'expression intégrale (2) utilisent des fonctions de base dont les écarts quadratiques moyens en temps et en fréquence sont égaux. Un signal "simple" (représentable par un petit nombre de paramètres, par exemple un polynôme dans l'espace $\mathcal{B}$) ne le reste donc pas après compression. Il est donc important d'étudier les transformations du type changement d'échelle ou compression d'impulsion dans l'espace $\mathcal{B}$, ce qui est l'objet de la section suivante.

3.- UNE REPRESENTATION DU GROUPE $SL(2,\mathbb{R})$

On sait que le groupe des matrices 2 x 2 réelles unimodulaires agit sur l'espace des fonctions de carré sommable d'une manière naturelle lorsqu'on considère les fonctions d'ambiguïté [9]. Soit en effet $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ une telle matrice ; pour $f \in L_2(\mathbb{R})$, de fonction d'ambiguïté χ_f, la transformée $g.f$ a pour fonction d'ambiguïté :

$$\chi_{g.f}(\xi,\eta) = \chi_f(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta)$$

ou encore, en regroupant les arguments pour former un vecteur colonne :

$$\chi_{g.f}\left[\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right] = \chi_f\left[g\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right]$$

La fonction $g.f$ doit alors vérifier :

$$\int \chi_{g.f}(x_2-x_1,y)\, e^{i\frac{(x_2+x_1)y}{2}}\, dy = 2\pi\, \overline{g.f(x_1)}\, g.f(x_2)$$

En prenant $x_1 = x_2$ on obtient donc le module $|g.f|$; s'il ne s'annule pas en x_0, en fixant $x_1 = x_0$ on définit $g.f(x)$ pour tout x et on vérifie aisément la linéarité par rapport à f. On a donc bien un opérateur linéaire pour les fonctions continues dont on vérifie facilement qu'il est unitaire ; il s'étend par continuité à tout l'espace de HILBERT. On peut vérifier les cas particuliers suivants :

pour : $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = M_\beta \qquad g.f(x) = e^{-i\frac{\beta}{2}x^2} f(x)$

pour : $g = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C_\gamma \qquad g.f(x) = \dfrac{e^{-\frac{i}{2\gamma}x^2}}{\sqrt{2\pi\gamma}} * f(x)$

(produit de convolution) ; la seconde relation s'obtient d'ailleurs en remarquant que :

$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} F$ où $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

est la matrice qui donne la transformation de FOURIER. Les opérateurs $U_g : f \longrightarrow g.f$ vérifient en effet :

$$U_g\, U_{g'} = U_{g'g}$$

Les familles $\{M_\beta\}$ et $\{C_\gamma\}$ sont deux sous-groupes isomorphes à $\mathbb{R}$, dont la réunion engendre $SL(2,\mathbb{R})$. En particulier pour l'opérateur d'homothétie on a, pour $k \neq 0$:

$$S_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} = C_{\frac{1-k}{k\alpha}}\, M_\alpha\, C_{\frac{k-1}{\alpha}}\, M_{-\frac{\alpha}{k}} \qquad \forall \alpha \neq 0$$

$$S_k.f(x) = |k|^{1/2} f(kx)$$

On peut étudier directement ces transformations dans l'espace des transformées de BARGMANN. La fonction d'ambiguïté initiale s'écrit, en appelant $F(z)$ la transformée de BARGMANN de f,
$\chi_f(\xi,\eta) = \langle F | V_\zeta | F \rangle$ avec $\zeta = (-\xi + i\eta)/\sqrt{2}$.
On a donc :

$$\chi_{g.f}(\xi,\eta) = \langle g.F | V_\zeta | g.F \rangle = \langle F | V_{g.\zeta} | F \rangle$$

où $g.\zeta$ est le nombre complexe défini par :

$$g.\zeta = \tfrac{1}{2}\left[(\sigma+\bar\tau)\zeta + (\bar\sigma-\tau)\bar\zeta\right] \qquad \sigma = \alpha+i\beta \qquad \tau = \delta+i\gamma$$

La formule d'inversion permet alors d'écrire :

$$\overline{g.F(z_2)}\, g.F(z_1) = \int \langle F | V_{g.\zeta} | F \rangle\, e^{\zeta\bar z_2 - \bar\zeta z_1 + \frac{1}{2}|\zeta|^2} d\mu(\zeta)\, e^{\bar z_2 z_1} \qquad (3)$$

Appliquons-là à la fonction de base $F(z) = e^{\bar w z - \frac{1}{2}|w|^2}$, pour laquelle on a :

$$\langle F | V_{g.\zeta} | F \rangle = e^{-\frac{1}{2}|g.\zeta|^2 + \overline{g.\zeta}\, w - (g.\zeta)\bar w}$$

En posant $\kappa = (\sigma+\bar\tau)/2$, $\lambda = (\bar\sigma-\tau)/2$, $h = \bar\lambda w - \kappa \bar w$
on a :

$$|g.\zeta|^2 + |\zeta|^2 = (\xi\ \eta)\, A \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \qquad A = (1+g^T g)/2$$

g^T désignant la transposée de g. Les matrices unimodulaires symétriques positives sont caractérisées par un nombre complexe ; en l'occurrence :

$$g^T g = \frac{1}{Re\, a}\begin{pmatrix} |a^2| & Im\, a \\ Im\, a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1+2i\, Im\, \kappa\bar\lambda}{|\kappa-\lambda|^2}$$

$$g^T g + (g^T g)^{-1} = \frac{|a|^2+1}{Re\, a} I = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) I$$

I désignant la matrice unité. Il en résulte :

$$Det\, A = \frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2+\delta^2+\gamma^2+2) = |\kappa|^2, \quad A^{-1} = \frac{1}{2|\kappa|^2}(1+g^{-1}g^{-1T})$$

Dans la formule (3) l'intégrale à calculer s'écrit finalement :

$$\int e^{-\frac{1}{2}(\xi\eta)A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + B^T\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}} \frac{d\xi\, d\eta}{2\pi} = e^{\frac{1}{2}B^T A^{-1} B} \qquad (4)$$

où le vecteur colonne B a pour composantes $(z_1 - \bar z_2 - 2i\, Im\, h)$ et $i(z_1+\bar z_2+2\, Re\, h)$. Après multiplication par $exp(z_1 \bar z_2)$ on vérifie la factorisation attendue et on obtient, tous calculs faits :

$$g_w(z) = \frac{1}{|\kappa|^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\bar\lambda}{\bar\kappa}z^2 + \frac{\bar w z}{\bar\kappa} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\bar\kappa}\bar w^2 - \frac{1}{2}|w|^2}$$

en appelant g_w la fonction obtenue en appliquant l'opérateur U_g à la fonction $exp(\bar w z - \frac{1}{2}|w|^2)$ qui est, rappelons-le, la transformée de BARGMANN d'un signal gaussien symétrique. Compte tenu de la formule de décomposition (2) U_g peut s'écrire comme opérateur intégral sous la forme :

$$g.F(z) = \frac{1}{|\kappa|^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\bar\lambda}{\bar\kappa}z^2} \int F(w)\, e^{+z\frac{\bar w}{\bar\kappa} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda \bar w^2}{\bar\kappa}\right)} d\mu(w)$$

La formule (3) laisse une phase arbitraire qui est fixée par la condition que $(g_w(z)e^{1/2|w|^2})$ soit une fonction analytique de $\bar{w}$.

On remarque que le cas où l'opérateur consiste en un simple changement de variables $(\lambda=0)$ est celui des rotations autour de l'origine [2] parmi lesquelles la transformation de FOURIER.

Lorsqu'on interprète les opérateurs X et Y comme opérateurs de position et d'impulsion de l'oscillateur harmonique quantique, les transformations U_g correspondent aux changements de variables canoniques admis par le hamiltonien [1].

4.- APPLICATION A LA CLASSIFICATION DES SIGNAUX

Utiliser la transformation de BARGMANN pour une classification des signaux revient à interpréter dans l'espace de départ $L_2(\mathbb{R})$ les propriétés caractéristiques des fonctions entières de l'espace B qui leur sont associées. Une fonction entière est complètement déterminée par ses propriétés de croissance à l'infini et par la position de ses zéros, les deux points de vue étant d'ailleurs liés [10]. Par exemple on montre facilement [2] qu'un signal de durée finie (respectivement limité en fréquence) correspond à une fonction entière qui est le produit d'une fonction entière d'ordre 1 par $\exp(-\frac{1}{2}z^2)$, ou $\exp(\frac{1}{2}z^2)$ respectivement. Ces fonctions ont nécessairement une infinité de zéros.

En effet dans le cas contraire elles pourraient s'écrire :

$$F(z) = e^{\pm\frac{1}{2}z^2+\alpha z}\, P(z)$$

P étant un polynôme en z. Une telle fonction n'est pas de carré sommable pour la norme $d\mu(z)$; c'est en fait la transformée de BARGMANN d'une distribution à support compact, ou dont la transformée de FOURIER est à support compact.

Pour des fonctions admettant des moments du second ordre, et de norme unité, on posera :

$$\sigma_X^2 = \langle F|X^2|F\rangle \ , \quad \sigma_{XY} = \mathrm{Im}\langle F|XY|F\rangle \ , \quad \sigma_Y^2 = -\langle F|Y^2|F\rangle$$

en supposant nulles les valeurs moyennes de X et Y car on peut toujours se ramener à ce cas par une translation dans le plan temps-fréquence. La matrice $H=\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \sigma_{XY}\\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2\end{pmatrix}$ a pour coefficients les dérivées secondes à l'origine de la fonction d'ambiguïté du signal considéré. Dans les transformations U_g étudiées au paragraphe précédent elle devient donc simplement $g^T H g$. En particulier on peut la diagonaliser par une transformation de matrice g orthogonale, c'est-à-dire une rotation dans le plan z, et la rendre multiple de l'unité par une transformation de matrice g diagonale, c'est-à-dire un changement d'échelle. Le déterminant de H est invariant par ces transformations. On peut considérer qu'il mesure le carré du produit durée-bande passante du signal (BT).

Une première classe de signaux qui apparaît est donc celle des fonctions dont le logarithme est un polynôme complexe du second degré en x. La formule (4) montre immédiatement que pour ces fonctions le produit BT a sa valeur minimum $1/2$; la réciproque est vraie. Par la transformation de BARGMANN ces fonctions correspondent aux fonctions entières dont le logarithme est également un polynôme en z.

Lorsqu'on se ramène par translation à des valeurs moyennes nulles pour les opérateurs temps et fréquence, la correspondance est la suivante :

$$(5)\quad \left(\frac{\mathrm{Re}\, a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}ax^2} \longleftrightarrow \left(\frac{2}{1+a}\right)^{1/2} (\mathrm{Re}\, a)^{1/4}\, e^{\frac{1}{2}\frac{1-a}{1+a}z^2}$$

a étant un nombre complexe de partie réelle positive. Ces signaux sont également caractérisés par le fait que leur fonction d'ambiguïté est l'exponentielle d'une forme quadratique de déterminant 1/4. On peut d'ailleurs vérifier qu'une fonction d'ambiguïté ne peut être de cette forme que si le déterminant de la forme quadratique est 1/4.

Proposition : les fonctions de la classe considérée ci-dessus sont les seules dont la transformée de BARGMANN n'ait pas de zéros. Cela résulte de la décomposition en facteurs de WEIERSTRASS pour les fonctions entières d'ordre fini. Les fonctions de l'espace B sont d'ordre au plus égal à 2. En vertu du théorème d'HADAMARD une telle fonction s'écrit, si $\{a_n\}$ est la suite de ses zéros en dehors de l'origine compté chacun avec son ordre de multiplicité [11] :

$$(6)\quad F(z) = e^{az^2+bz+c}\, z^m \prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + \frac{1}{2} z^2/a_n^2}$$

Les seules qui n'ont pas de zéros sont donc les exponentielles de polynômes du second degré.

Considérons maintenant les fonctions obtenues en multipliant une expression de la forme (5) par un polynôme en x. Ceci revient à faire opérer sur la transformée de BARGMANN un polynôme en Z et D. Le résultat est donc le produit d'une exponentielle par un polynôme z. De plus par une transformation de $SL(2,\mathbb{R})$ on peut se ramener au cas $a = 1$. Ainsi les fonctions dont la transformée de BARGMANN a un nombre fini de zéros sont les combinaisons linéaires finies des fonctions de HERMITE et leurs transformées par l'action du groupe $SL(2,\mathbb{R})$. Pour la fonction de HERMITE d'indice n le produit BT tel qu'on l'a défini est $n+1/2$.

Les zéros de la transformée de BARGMANN sont les seuls points où son module $|F(z)|$ est minimum. Ils correspondent à des régions du plan temps-fréquence où le signal considéré est en quelque sorte peu présent. Cependant le nombre et l'emplacement de ces points caractérisent le signal, un peu à la manière de raies d'absorption. Pour aller au-delà des premiers résultats indiqués ci-dessus il faudrait étudier la manière dont les zéros sont transformés par les opérateurs U_g associés au groupe $SL(2,\mathbb{R})$ ou par des filtres quelconques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] BARGMANN (V.). On a Hilbert Space of Analytic Functions and an associated Integral Transform. Commun. Pure and Appl. Math. 14 (1967), pp. 187-214.

[2] BERTHON (A.). Représentation des signaux par des fonctions entières. huitième colloque GRETSI, pp. 75-81.

[3] GABOR (D.). Theory of Communication. J. Inst. Electr. Eng., part III, (1946), pp. 429-457.

[4] GLAUBER (R.). Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. Phys. Rev. vol. 131, n° 6 (1963), pp. 2 766-2 788.

[5] SCHWEBER (S.). On Feynman Quantization. J. Math. Physics, vol. 3, (1962) pp. 831-842.

[6] ITZYKSON (C.), ZUBER (J.B.). Quantum Field Theory. Mc Graw Hill, (1980).

[7] ESCUDIE (B.), GREA (J.). Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie. C.R.Ad.Sc. Paris, t. 283 (1976), pp. 1 049-1 051.

[8] ESCUDIE (B.). Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie. Ann. Télécom., n° 3-4, (1979), pp. 101-111.

[9] PAPOULIS (A.). Signal Analysis. Mc Graw Hill, (1977).

[10] LEVIN (B.). Distribution of Zeros of Entire Function. American Math. Soc. (1964).

[11] VALIRON (G.). Théorie des fonctions. Masson et Cie, (1955).