NEUVIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 20 MAI 1983

SUR UNE MESURE DU CARACTERE NON-STATIONNAIRE

C. GUEGUEN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS
DEPARTEMENT SYSTEMES ET COMMUNICATIONS 46 RUE BARRAULT - 75634 - PARIS CEDEX 13

RESUME

Cet article aborde l'analyse des signaux non-stationnaires en étendant une définition de la distance au caractère stationnaire puis en analysant ses implications pour la modélisation de ces signaux. Dans un premier temps, la notion de rang de déplacement introduite par Morf, Kailath et Al est généralisée pour englober des processus composés. La non-stationnarité élémentaire n'est plus, alors, la réponse d'un système constant mis en conditions initiales (ou finales), mais comporte un gain variable. Admettant ce gain variable défini comme la réponse impulsionnelle d'un modèle autorégressif déterministe, la définition du rang de déplacement est généralisée et une caractérisation fournie. Dans un deuxième temps, on montre que les concepts d'algorithmes rapides (décomposition de Choleski et filtre de Kalman rapides) restent applicables à ce nouveau type de non stationnarité dont le rang de déplacement classique est élevé. On propose une version généralisée de l'algorithme de Schur qui produit la décomposition de Choleski en ordre (n^2) opérations. Le coût de calcul supplémentaire varie comme l'ordre du modèle autorégressif engendrant le gain.

SUMMARY

Displacement ranks have proven to be of major importance in the understanding of fast identification algorithms. The study of Toeplitz or close-to-Toeplitz systems, fast Kalman filters or fast Choleski factorization, lattice or ladder form algorithms, rely heavily on these indexes.

But traditionnal displacement ranks are too algebraic in nature (integers), they are defined a priori on the data structure, moreover they do not provide necessary conditions for a fast algorithm to exist (Brownian matrices for instance have fast inversion algorithms of the Schur-Levinson type and exhibit high displacement ranks).

This paper investigates new displacement measures for non stationnary signals. Fixed parameter systems starting from zero initial conditions, but including a time-varying gain factor, are thus preferred as generic non-stationnary devices. The time varying gain factor is moreover modelled as the impulse response of a deterministic AR system. A polynomial generalization of the classical displacement rank is then deduced.
Fast algorithms for inversion or Choleski factorization of this class of non-stationnary covariance matrices is then investigated. The standard Schur algorithm is reformulated under the form of an elementary matrix identity. This identity is the basic device for constructing the generalized fast algorithm. It is shown that the computational effort in terms of reflexion coefficients and multiplications is augmented by the order minus one of the gain AR model.

1. MOTIVATIONS

La notion de rang de déplacement a été introduite par Morf, Kailath, Friedlander et Al. / 1 / à / 3 / comme une mesure du caractère non stationnaire d'un signal (ou d'un extrait court de signal stationnaire). Il s'agit essentiellement d'une mesure de "distance" entre la matrice de covariance empirique du signal et la matrice de covariance asymptotique, cette dernière caractérisant par sa structure de Toeplitz la stationnarité du processus.

Ces rangs de déplacement ont prouvé leur rôle majeur dans la compréhension des mécanismes sous-jacents aux algorithmes de filtrage ou d'estimation dits rapides. L'étude des systèmes de Toeplitz ou proches de Toeplitz, les versions rapides du filtre de Kalman ou de la triangularisation de Choleski, les algorithmes d'estimation associés aux filtres en treillis ou en échelle reposents, en effet, sur ces indices / 4/ à / 7/.

Mais les rangs de déplacement traditionnels sont de nature purement algébrique (indices discrets), ils sont définis a priori sur la structure des données. Bien plus, il ne fournissent pas de condition nécessaire à l'existence d'algorithmes rapides du type Schur-Levinson. Par exemple, les matrices browniennes possèdent un algorithme d'inversion rapide mais leur rang de déplacement demeure élevé :
soit, en effet, la matrice B considérée par Picinbono / 8/ (matrice Brownienne) et par Carayannis / 9/ (DIM diagonal innovation matrix) ces auteurs ont noté l'existence d'un algorithme de prédiction linéaire (modèle AR) rapide, c'est-à-dire ordre (n^2), n dimension de la matrice.

$$B = \begin{bmatrix} r_o & r_o & \text{—} & r_o \\ r_o & r_1 & \text{—} & r_1 \\ | & | & \ddots & \vdots \\ r_n & r_1 & \cdots & r_n \end{bmatrix}$$

Cette matrice, associée à un processus à increments indépendants ou à l'intégration d'un bruit blanc, se révélera de structure simple au paragraphe 3 , mais pose néanmoins le problème de l'extension des algorithmes rapides à de nouvelles classes de matrices plus générales.

Cet article aborde l'analyse des signaux non stationnaires en proposant une nouvelle définition de la notion de rang de déplacement puis analyse ses implications sur l'existence d'algorithmes rapides pour des matrices échappant à la classe proche de Toeplitz.
On rappelle au paragraphe 2 la notion classique du rang de déplacement et l'on montre comment elle est associée à la covariance d'une non-stationnarité élémentaire constituée par un système constant, partant de conditions initiales nulles (ou aboutissant à des conditions finales nulles).

Ce type de non stationnarité sera généralisé au paragraphe 3 en plaçant devant (ou après) le système un gain variable multipliant le processus d'entrée (ou de sortie). Ce gain sera plus loin représenté par la réponse impulsionnelle d'un modèle AR déterministe d'ordre p pour permettre une caractérisation plus complète.

Les algorithmes rapides pour la décomposition de Choleski d'une matrice proche de Toeplitz tels que développés par Morf, Kailath, Friedander, Delosme et Al sont ensuite présentés au paragraphe 4 en utilisant l'approche de Schur. Cette approche, au lieu de travailler sur un modèle AR comme c'est le cas pour les algorithmes du type Levinson, travaille sur un modèle MA ou la réponse impulsionnelle équivalente. On donne une présentation originale de l'algorithme de Schur basée sur une identité matricielle simple. Enfin, utilisant cette même approche, le paragraphe 5 démontre la généralisation des algorithmes rapides en nouveau type de non-stationnarité. L'effet de la variation de gain revient à augmenter artificiellement le rang de déplacement classique de l'ordre (moins un) du modèle AR correspondant.

Les modèles à gain variable semblent d'un intérêt particulier. On peut y englober les signaux qui font l'objet d'une modulation d'amplitude intentionnelle ou d'un évanouissement accidentel, ou encore d'un contrôle automatique du gain. Il est intéressant dans l'analyse de tels signaux de découpler les effets des variations de gain du contenu fréquentiel et de détecter la présence de ruptures dans l'énergie du processus d'excitation.

2. LE RANG DE DEPLACEMENT CLASSIQUE

La matrice de corrélation (auto-covariance) d'un processus discret stationnaire est caractérisée par une structure, dite de Toeplitz, où les éléments sont identiques sur toutes les diagonales décalées. Ces matrices de Toeplitz, ainsi que celles de Hankel, apparaissent dans la formulation de nombreux problèmes liés aux systèmes linéaires et à l'analyse spectrale. Les propriétés de ces matrices ont été analysées en détail dans le cas asymptotique de dimension infinie.

Dans les problèmes pratiques, les données ne sont accessibles que sur une durée finie. Il peut s'agir d'un échantillon court prélevé sur un processus supposé stationnaire, donc observé de manière non-stationnaire ; ou encore, d'une zone de transition d'un phénomène fondamentalement non stationnaire. Le problème se pose alors d'effectuer une estimation raisonnable de la corrélation ou de la covariance. Le choix a priori de la structure de l'estimateur a une importance considérable et affectera de façon irréversible la qualité de l'analyse.

Une démarche naturelle consiste à se référer au cas stationnaire, qui seul est bien compris, et à faire l'hypothèse d'une fenêtre de durée suffisante où d'un phénomène lentement variable. Ces hypothèses posent le problème de la distance de la matrice de covariance empirique à la matrice de Toeplitz du cas stationnaire.

La notion de rang de déplacement a été introduite pour vérifier la constance des éléments le long des diagonales décalées et en déduire une distance à la matrice de Toeplitz.
Soit donc la matrice symétrique quelconque R convenablement partionnée et la matrice Z associée à un décalage :

$$R = \begin{bmatrix} r_o & r^T \\ & \\ r & R_1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_o & s \\ & \\ s^T & s_o \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

on construit les quantités :

$$R - Z R Z^T = M \quad (2) \quad \text{et} \quad R - Z^T R Z = N \qquad (2')$$

avec

$$r = \begin{bmatrix} r_o & r^T \\ & \\ r & P \end{bmatrix}, \quad P = R_1 - R_o, \quad N = \begin{bmatrix} -P & s \\ & \\ s^T & s_o \end{bmatrix} \qquad (3)$$

on note qu'au cas où R est Toeplitz, P = 0 et l'étude de P pourrait permettre de définir la distance cherchée. Dans la pratique, on définit les rangs de déplacement inférieur et supérieur par :

$$\rho_- = \text{Rang } |M| \qquad \rho_+ = \text{Rang } |N| \qquad (4)$$

On constate alors que ces rangs sont égaux à 2 dans le cas Toeplitz. Diverses propriétés ont été démontrées pour ces indices / 1/, comme, par exemple :

$$|\rho_+(R) - \rho_-(R)| < 2 \qquad \rho_+(R) = \rho_-(R^{-1}) \qquad (5)$$

mais la propriété principale est un théorème de représentation d'une matrice R quelconque. Dans la suite, on analysera principalement les propriétés du rang de déplacement inférieur (2) qui sera noté ρ, des résultats analogues peuvent être établis pour le déplacement supérieur (2').

Soit ρ le rang de M, ce rang peut être explicité en écrivant M comme une somme algébrique de matrices génératrices de rang 1 (anti-scalaires, uni-modulaires), on a :

$$M = \sum_{i=1}^{\rho} \pm g_i g_i^T \quad \text{avec} \quad g_i^T = | h_o \; h_1 \; \ldots \; h_n |_i \qquad (6)$$

Il se déduit de (2) une représentation de R en multipliant par les puissances croissantes de Z et en notant que $Z^n = 0$:

$$R = \sum_{i=1}^{\rho} \pm G_i G_i^T \qquad G_i G_i^T = \sum_{j=o}^{n} Z^j (g_i g_i^T) Z^{jT} \qquad (7)$$

avec

$$G_i = \begin{bmatrix} h_o & & \\ h_1 & h_o & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ h_n \cdots & h_1 & h_o \end{bmatrix}_i \qquad (8)$$

On reconnaît alors que toute matrice R s'écrit comme une somme (algébrique) de produit de matrices triangulaires de Toeplitz (inférieure x supérieure) en nombre égal à ρ, rang de déplacement.

Le rang ρ est donc un indice de complexité de R. Une matrice de Toeplitz (ρ=2) comporte deux éléments dans la somme (7). Chaque terme de la somme est associé à une non-stationnarité élémentaire. Considérant un système constant causal, de réponse impulsionnelle h_t ($h_t = 0 \; t < 0$) partant de conditions initiales nulles et soumis à t = 0 à un bruit d'excitation u_t blanc de variance unité, alors, la covariance de sortie s'écrit (figure 1) :

$$R = G \, G^T$$

avec

$$\begin{bmatrix} y_o \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_o & & \\ h_1 & h_o & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ h_n \cdots & h_1 & h_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} h_o & & \\ h_1 & h_o & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ h_n \cdots & h_1 & h_o \end{bmatrix}$$

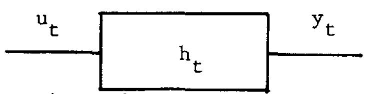

Figure 1

La formule (7) laisse alors place à diverses interprétations. Une corrélation stationnaire peut s'expliquer par la composition (ρ=2) de deux nonstationnarités élémentaires (du type (9)). La considération du déplacement supérieur associé à N aurait permis une représentation triangulaire (supérieure x inférieure) associée à des conditions finales nulles. Une représentation mixte est aussi possible /11/.

A partir du concept de rang de déplacement de nombreuses généralisations sont possibles : (2) est une formule de Lyapunov discrète ou Z peut être remplacée par une matrice de système dynamique quelconque , la considération au lieu de Z d'une matrice circulante permet de représenter R par une somme de produits (circulante x anti-circulante) ... etc.

Il faut cependant remarquer que l'abandon des considérations sur $P \simeq 0$ pour le rang de M et N, rend cette distance algébrique et purement structurelle. Dans la pratique une matrice estimée naïvement se révélera de rang complet (ρ=n). L'extension proposée ici compensera seulement en partie ce caractère du rang de déplacement.

3. EXTENSION DU RANG DE DEPLACEMENT

Dans de nombreux cas pratiques, la non-stationnarité d'un signal pourra résulter d'une variation indépendante du gain en un point d'une chaîne essentiellement stationnaire. Il peut s'agir de variations ou de modulations de l'énergie d'entrée, ou de variations de l'observation par une fenêtre de pondération ou un contrôle automatique du gain. On définit ainsi un processus composé dont la non-stationnarité n'est pas essentielle et qui a déjà fait l'objet d'études /12/.

On supposera ici que la non-stationnarité élémentaire est constitué selon la figure 2 d'un gain variable indépendant de l'entrée précédent un système constant. Pour caractériser la variation du gain par un nombre limité de paramètres, on admettra qu'il est engendré par la réponse impulsionnelle d'un modèle AR déterministe $1/\alpha(z)$.

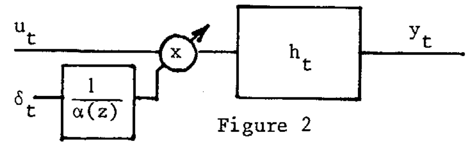

Figure 2

La covariance de la sortie dans les mêmes conditions que précédemment s'écrit :

$$R = G\,\Sigma\,G^T \tag{10}$$

avec

$$G = \begin{bmatrix} h_o & & \\ h_1 & h_o & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ h_n \cdots & h_1 & h_o \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_o & & & \\ & \sigma_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

et

$$1/\alpha(z) = \sigma_o + \sigma_1\, z^{-1} + \ldots + \sigma_n\, z^{-n} + \ldots \tag{12}$$

Note : on aurait pu proposer d'autres dispositions comme par exemple un gain postérieur au système anti-causal, un modèle ARMA de la variation de gain. Le cas ici présenté est considéré comme "générique". Par ailleurs, le problème du caractère positif de la séquence σ_t est ici quelque peu négligé.

Cette non-stationnarité peut-être caractérisée par une généralisation du rang de déplacement. On a, par construction, le développement de R :

$$R = \sum_{i=o}^{n} \sigma_i\; Z^i\, g\, g^T\, Z^{iT} \tag{13}$$

Multipliant les deux membres de (13) par les puissances de Z et Z^T, on en déduit que R vérifie une équation de récurrence à coefficients α_i telle que :

$$\sum_{i=o}^{n} \alpha_i\; Z^i\; R\; Z^{iT} = gg^T \tag{14}$$

L'identification des deux développements (13) et (14) précédents donne la formule liant les α_i et σ_i :

$$(i=1,\,n)\quad \sum_{k=o}^{i} \sigma_{i-k}\;\alpha_k = 0 \qquad \sigma_o\;\alpha_o = 1 \tag{15}$$

ce qui montre que les α_i sont précisémment les coefficients du polynôme $\alpha(z)$, modèle AR générateur du gain σ_t.

La non-stationnarité ainsi définie englobe celle de la mise en conditions initiales de la figure 1. Celle-ci correspond, en effet, à une réponse impulsionnelle :

$$\sigma_t = 0 \quad t < 0 \quad , \quad \sigma_t = 1 \quad t > 0$$

qui est engendrée par $\alpha(z) = 1 - z^{-1}$, d'où par (14) :

$$R - Z\,R\,Z^T = gg^T$$

De même, il est facile de voir que la matrice de Brown B vérifie la factorisation :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ 1 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_o & & \\ & r_1 - r_o & \\ & & r_n - r_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots & 1 \\ & 1 \quad \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

qui correspond bien à l'intégration (h_t = 1) d'un bruit blanc de variance $\sigma_t = (r_t - r_{t-1})$.

Conformément à la note précédente diverses généralisations peuvent être envisagées et, en particulier, une imbrication des déplacements inférieurs et supérieurs dans (14), mais la propriété essentielle est l'existence d'algorithmes rapides.

4. ALGORITHMES RAPIDES CLASSIQUES

La notion d'algorithme rapide est habituellement associée à la prédiction linéaire et à la détermination d'un modèle auto-régressif (AR). La formulation du problème conduit en effet à inverser une matrice de Toeplitz par l'algorithme de Levinson. Ce type de méthodes a connu un développement rapide et a fait l'objet de diverses généralisations (multidimensionnel, deux indices, covariance ...). Il s'est alors révélé que la complexité des calculs était lié aux conditions initiales et finales et à une perturbation de R par des triangles de Toeplitz /13/. Ces algorithmes récursifs en ordre réalisent une décomposition de Choleski de R^{-1}.

Mais ces algorithmes rapides ne permettent pas de borner les quantités intervenant dans le calcul (paramètres auto-régressifs). D'où l'introduction d'algorithmes travaillant sur la réponse impulsionnelle qui permettent une implantation en virgule fixe maintenant courramment utilisée /14/. Ces algorithmes effectuent la factorisation de R et entrent dans une classe plus générale d'algorithmes du type Schur /15/ à /18/.

L'algorithme de Schur peut être interprété comme une façon efficace de passer de la représentation (7) en une somme de produits de matrices de Toeplitz triangulaires, pour aboutir à un produit unique, abandonnant le caractère Toeplitz des facteurs. Sous l'angle système, il s'agit de remplacer un banc de générateurs causaux constants du type (9) en parallèle par un seul générateur causal variable dans le temps produisant la même covariance. Sur le plan algorithmique, ceci est réalisé en combinant les facteurs triangulaires G_i, dans R (7). En fait, on combinera les générateurs g_i mettant en jeu la définition du rang de déplacement (2).

On propose ici de réaliser cette manipulation en utilisant les deux identités matricielles suivantes. Soient A B C D des matrices quelconques de dimensions cohérentes, et k un scalaire, on a :

$$(1-k^2)\ (AB-CD) = (A+kC)(B+kD) - (kA+C)(kB+D) \qquad (17)$$

$$(1+k^2)\ (AB+CD) = (A-kC)(B-kD) + (kA+C)(kB+D) \qquad (18)$$

les relations peuvent être interprétées comme des rotations multidimensionnelles généralisées. Le facteur k joue le rôle du coefficient de réflexion et peut être interprété comme un cosinus naturel ou hyperbolique suivant le cas.

Considérant le rang de déplacement de R, on a :

$$R-Z\,R\,Z^T = g_1\,g_1^T \pm \dots \pm g_\rho\,g_\rho^T \qquad (19)$$

L'algorithme de Schur peut être alors réalisé en deux opérations :

(i) par une suite d'opérations du type (17) ou (18) suivant le signe, appliquées aux g_i, amener à zéro la première coordonnée de tous les vecteurs générateurs sauf un, soit g_1.

(ii) faire passer la matrice unimodulaire $g_1 g_1^T$ dans le membre de gauche en faisant le changement :

$$\tilde{R} = R - l_1\,l_1^T \quad , \qquad l_1 = g_1$$

et replacer les termes résiduels obtenus dans le membre de droite.

Tous les termes à droite sont ainsi de dimension inférieure et la procédure peut être réitérée.

On obtient ainsi, après n pas, avec des vecteurs colonnes l_i différents :

$$\tilde{R} = \sum_{i=0}^{n} Z^i\,l_i\,l_i^T\,Z^{iT} \qquad \text{ou encore}$$

$$\tilde{R} = L\,L^T \quad \text{avec} \quad L = |l_1,\ Zl_2,\ \dots,\ Z^n\,l_n| \qquad (20)$$

qui constitue la décomposition de Choleski cherchée. Le nombre de multiplications est ainsi de l'ordre de (n ρ) pour (i) répétée n fois pour annuler $\tilde{R}$ en (ii), d'où (ρn^2).

Ce résultat classique justifie le qualificatif d'algorithme rapide par rapport aux algorithmes standards en n^3. L'indice $\rho < n$ mesure donc bien la complexité représentée par une plus grande distance à Toeplitz ; c'est, par ailleurs, le nombre de coefficients de réflexions introduit à chaque dimension (ordre). Une remarque intéressante est la disposition dans l'algorithme de Schur des notions de modèles direct et rétrograde combinés que l'on aurait pu croire plus fondamentales.

5. EXTENSION DES ALGORITHMES RAPIDES

On considère la matrice de covariance R d'un processus non-stationnaire comportant un gain variable du type (11). Alors, le rang de déplacement classique est en général égal à la dimension et les algorithmes rapides correspondants n'apportent aucune accélération du calcul. Cependant, en utilisant la formulation précédente, ces algorithmes peuvent être étendus à une matrice R dont le rang de déplacemant généralisé est caractérisé par :

$$R + \alpha_1 Z R Z^T + \ldots + \alpha_p Z^p R Z^{pT} = \sum_{i=1}^{\rho} g_i g_i^T \quad (21)$$

Il s'agit là d'une non-stationnarité classique de rang de déplacement ρ, précédée d'un gain variable engendré par un AR d'ordre p.

Un premier exemple simple est le cas d'un modèle d'ordre p = 1. Le facteur de gain est alors une exponentielle croissante ou décroissante démarrant de 1 à l'instant initial (la réponse impulsionnelle demeure causale). On a, alors :

$$R - \alpha Z R Z^T = \sum_{i=1}^{\rho} g_i g_i^T \quad (22)$$

avec $\alpha > 0$, dont un cas particulier évident est $\alpha = 1$. L'algorithme classique se généralise avec peu de modifications, ce qui revient à rentrer $\sqrt{\alpha}$ dans Z. Ce fait semble avoir été noté par Kailath.

Un autre cas simple est celui d'un modèle AR(p) associé à un rang de déplacement $\rho = 1$. Ce cas correspond à celui de la matrice de brown B quand la suite des $(r_t - r_{t-1})$ est convenable. Ce cas est cependant d'un intérêt limité car la factorisation est achevée dès que la structure est reconnue. En effet, l'équation :

$$R + \alpha_1 Z R Z^T + \ldots + \alpha_p Z^p R Z^{pT} = g g^T \quad (23)$$

entraîne :

$$R = G \; \Sigma \; G^T$$

Dans le cas général, la démarche introduite plus haut demeure applicable à l'équation (21). La différence essentielle est que l'étape (ii) ramène dans le membre de droite (p-1) matrices uni-modulaires. Le nombre de coefficients de réflexion requis par l'opération (1) s'en trouve en général augmenté de (p-1). La dernière itération donne :

$$\sum_{i=o}^{p} \alpha_i \; Z^i \; \tilde{R} \; Z^{iT} = 0 \qquad \text{soit } \tilde{R} = 0$$

avec

$$\tilde{R} = (R - L L^T) \qquad \text{d'où } R = L L^T$$

Le coût de calcul global est de l'ordre de $(p-1+\rho)n^2$ ce qui montre l'intérêt de modèles AR courts pour engendrer le gain.

6. CONCLUSION

On a démontré dans cet article l'existence d'algorithmes rapides pour réaliser la décomposition de Choleski d'une covariance non-stationnaire complexe, dont le rang de déplacement classique est élevé. Cette décomposition est la clef à l'établissement de modèles AR, MA et d'algorithmes de filtre de Kalman rapide pour cette forme de covariance.

Le type de non-stationnarité introduit, sans prétendre à la généralité, paraît assez naturel. Les systèmes à gain variable constituent une classe assez générale pour servir de modèle à divers signaux physiques mais demeurent appréhendables. L'ajustement des paramètres α_i dans (21), compense partiellement le caractère algébrique des rangs de déplacement.

Au-delà des diverses généralisations évoquées dans le texte (mélange des déplacements inférieurs et supérieurs, gains en aval du système ...), un certain nombre de questions restent à approfondir :

. Classe des signaux physiques modélisables par cette approche. Etant donné R, est-il possible de choisir les α_i pour obtenir un rang ρ minimal ?

. Formulation directe sur les échantillons du signal et analyse des treillis adaptatifs correspondants.

. Relations entre les décompositions inférieurs et supérieures, rôle des modèles directs et rétrogrades.

Mais il semble aussi que diverses études puissent être dévolues à l'évolution des mineurs principaux de R en relation avec les α_i. Des distances moins algébriques ou cas stationnaire pourraient en être déduites ainsi que divers résultats sur la stabilité des modèles AR résultant des méthodes dites de covariance.

REFERENCES

/1/ T. KAILATH, S.Y. KUNG, M. MORF : Displacement ranks of matrix. Bull Am. Math soc, vol 1, N° 5, Sept. 79.

/2/ B. FRIEDLANDER, M. MORF, T. KAILATH, L. LJUNG : New inversion formulas for matrices classified in terms of their distance from Toëplitz matrices Linear algebra and its applications N° 27, pp 31-60, 1979.

/3/ M. MORF, Fast Algorithms for Multivariable Systems , Ph. D. Dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, Calif., 1974.

/4/ J.M. DELOSME and M. MORF, A Tree Classification of Algorithms for Toeplitz and Related Equations Including Generalized Levinson and Doubling Type Algorithms , Proc. 19th IEEE Conf. on Decision and Control, Albuquerque, pp. 42-46, Dec. 1980.

/5/ D.T.L. LEE : Canonical Ladder Form Realizations and Fast Estimation Algorithms , Ph. D. Dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford, Calif., Aug. 1980.

/6/ LEV-ARI, H. and T. KAILATH : Schur and Levinson Algorithms for Nonstationary Processes , Proc. 1981 Int '1 Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Atlanta, pp. 860-864, Mar-Apr. 1981.

/7/ M. MORF, D.T.L. LEE, J.R. NICKOLLS and A. VIEIRA: A Classification of Algorithms for ARMA Models and Ladder Realizations", Proc. 1977 Int '1 Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Hartford, Conn., pp. 13-19, Apr. 1977.
Modern Spectrum Analysis, D.G. Childers, ED., IEEE Press Series, Modern Spectrum Analysis, N.Y., pp. 262-268, 1978.

/8/ B. PICINBONO : Properties and applications of stochastic processes with stationnary increments, journal of Appl Prob. n° 6, pp 512-523, 1974.

/9/ G. CARAYANNIS, N. KALOUPTSIDIS, D. MANOLAKIS : Classes of matrices leading to fast algorithms for signal processing. 14th Conf. on Information Science and Systems, Princeton, March 1980.

/10/ D. MANOLAKIS, G. CARAYANNIS, N. KALOUPTSIDIS : Fast inversion of vector generated matrices for signal processing. 1sr EUSIPCO, Lausanne, Sept. 80.

/11/ J.M. DELOSME and M. MORF : Mixed and Minimal Representations for Toeplitz and Related Systems, "Proc. 14th Asilomar Conf. on Circuits, Systems and Computers, Monterey, Calif., pp. 19-24, Nov. 1980.

/12/ H. EL AYADI, B. PICINBONO : NAR-AGC Adaptive detection of non-overlopping signals in noise with fluctuation power, IEEE trans on ASSP, vol 29, pp 952-963, 1981.

/13/ C.T. MULLIS, R.A. ROBERTS : The use of second order information in the approximation of discrete time linear systems. IEEE Trans on ASSP, Vol 24, pp. 226-238, June 76.

/14/ J. LE ROUX, C. GUEGUEN : Fixed point computation of partial correlation coefficients, IEEE trans on ASSP, Vol 25 , pp. 257-259, June 1977.

/15/ H. LEV-ARI and T. KAILATH : Schur and Levinson Algorithms for Nonstationary Processes , Proc. 1981 Int '1 Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Atlanta, Ga., pp. 860-864, Mar-Apr. 1981.

/16/ H. LEV-ARI and T. KAILATH : On Generalized Schur and Levinson-Szegö Algorithms for Quasistationary Processes , Proc. 20th IEEE. Conf. on Decision and Control, San Diego, CA., pp. 1077-1080, Dec. 16-18, 1981.

/17/ P. DELSARTE, Y. GENIN and Y. KAMP : Schur Parametrization of Positive Definite Block-Toeplitz System , SIAM J. on Appl. Math., pp. 34-46, Feb. 1979.

/18/ J.M. DELOSME : Algorithms for finite shift rank processes. Ph D dissertation, department of Electrical Engineering Stanford University, Stanford, Ca 1982.

/19/ T. KAILATH : Time variant and time-invariant lattice filters for non-stationary processes. Algorithmes rapides pour le traitement des systèmes dynamiques linéaires. Colloque CNRS. Aussois, Sept. 81.