

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

835



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL
DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

G. GIRAUDON †

UNIVERSITE DE NICE (06 . NICE) - CER IBM-FRANCE (06 . LA GAUDE)

RESUME

SUMMARY

La perturbation déterministe de l'information, causée par le canal en transmission de données sur lignes téléphoniques, est assimilable à un certain codage convolusionnel de l'information. Falconer et Magee ont proposé un récepteur de données à maximum de vraisemblance, bâti autour de l'algorithme de Viterbi.

Nous étudions les performances de ce récepteur, dans le cadre de lignes réelles, et plus particulièrement le problème du choix de la longueur de la réponse impulsionnelle du canal désiré (RID).

Notre étude montre la grande importance du paramètre d_{min} , distance minimale du pseudo code créé par la RID, en l'illustrant par des résultats de simulations numériques où l'on obtient de meilleures probabilités d'erreur avec une réponse impulsionnelle désirée de longueur deux que de longueur trois, et par une étude systématique du rapport d_{min}/ϵ_{min} où ϵ_{min} est l'erreur quadratique moyenne minimale, qui corrobore ce résultat. Puis nous démontrons par une analyse théorique que la distance minimale du pseudo code créé par une réponse impulsionnelle de longueur quelconque, est au maximum égale à la distance minimale de la constellation utilisée à l'émission, et que de plus elle est toujours maximale pour une réponse de longueur deux.

De ces divers résultats, nous concluons qu'une réponse impulsionnelle désirée de longueur deux représente le meilleur rapport Performance/Complexité pour le récepteur RMVA en vue d'une utilisation pratique et standardisée sur lignes téléphoniques du réseau commuté ou loué.

The intersymbol interference, of data transmission over telephone channels is analogous to some information convolutional code. Falconer and Magee proposed a maximum likelihood sequence estimator built about the Viterbi algorithm.

This receptor performances are study over real channels and more specially the desired impulse response length problem choice.

Our study shows the importance of d_{min} , the code minimum distance by means of numerical simulations where the desired impulse response of length two probability error may be better than the one of length three, and by means of rate d_{min}/ϵ_{min} study where ϵ_{min} is the minimum mean square error which confirms this result. Afterward, a theoretical analysis proves the desired impulse response minimum distance of any length is, at most, equal to the useful constellation minimum distance. And more, it is already maximum for a response of length two.

In summary, we conclude a desired impulse response of length two represents the best rate performance/Complexity for the MLSE detector.

† Actuellement chez SINTRA-ALCATEL (92 . ASNIERES)



SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL
DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

INTRODUCTION

L'interférence entre symbole est l'une des principales perturbations qui limite la vitesse de transmission des données sur lignes téléphoniques.

Après que Chang et Hancock /1/ eurent montré que l'interférence entre symbole pouvait être assimilée à un codage convolutionnel de l'information, Forney /3/ proposa un récepteur optimal basé sur l'algorithme de Viterbi /2/.

Malheureusement pour des vitesses de transmission élevées et/ou sur des lignes à forte dispersion, la complexité de l'algorithme de Viterbi rend tout essai de réalisation pratique impossible. D'un autre côté, le récepteur linéaire ne permet plus d'obtenir la fiabilité de transmission requise, essentiellement à cause de la trop grande amplification du bruit.

Falconer et Magee /4/ proposèrent alors un récepteur à maximum de vraisemblance adaptatif (RMVA), dont l'idée de base est de réduire l'interférence entre symbole du canal à une longueur variable, c'est à dire faire une égalisation partielle du canal à l'aide d'un filtre numérique, de façon à présenter à l'algorithme de Viterbi un canal fictif de réponse impulsionnelle de longueur désirée (RID).

Le critère choisi par Falconer et Magee pour optimiser à la fois le filtre numérique et la réponse impulsionnelle désiré est l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM).

Il a été mis en évidence /5/, l'importance sur les probabilités d'erreur du récepteur RMVA de deux autres paramètres non optimisés par la méthode, qui sont la distance minimale, d_{min} , du pseudo code créé par la RID, et la coloration du bruit qui détruit l'optimalité de l'algorithme de Viterbi.

Nous présentons ici une partie de ces travaux et plus particulièrement les performances du récepteur RMVA, comparées à celles de l'égaliseur classique, dans le cadre de lignes réelles et d'une modulation MAQ, et l'influence du paramètre d_{min} sur ces performances, par des résultats de simulation numérique et par une analyse théorique en fonction de la longueur de la réponse impulsionnelle d'un canal.

I. LE RECEPTEUR RMVA.

Nous allons d'abord décrire rapidement le récepteur proposé par Falconer et Magee dans le cadre d'une modulation MAQ, en bande de base équivalente (fig. 1)

Soit $\{a_k\}$, $k \in [0, K]$, la suite des symboles émis. Les a_k appartiennent à une constellation dite à valeurs complexes (MAQ).

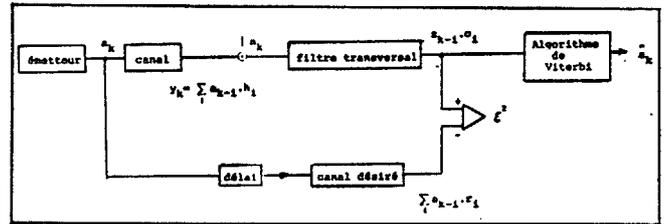


Fig. 1: Récepteur RMVA

La sortie du canal est la suite de valeurs complexes bruitées $\{z_k\}$, due à la convolution de la suite des données par la réponse impulsionnelle du canal perturbée par un bruit additif :

$$z_k = \sum_{i=0}^{L-1} a_{k-i} \cdot h_i + n_k \quad k \in [0, K]$$

où $\{h_i\}$ est la réponse impulsionnelle du canal et $\{n_k\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et gaussiennes de variance σ^2 .

$$n_k = n_{1,k} + j n_{2,k}$$

où

$$E(|n_{1,k}|^2) = E(|n_{2,k}|^2) = \sigma^2 / 2$$

$$E(n_{1,k}, n_{2,k}) = 0$$

La suite $\{z_k\}$ passe dans un filtre transversal de coefficients $\{c_k\}$ tel que :

$$\sum_{i=-N}^N z_{k-i} \cdot c_i \approx \sum_{m=0}^{V-1} a_{k-m} \cdot r_m$$

où $\{r_m\}$, $m \in [0, V-1]$ est la réponse impulsionnelle du canal désiré.

On peut alors montré /5/ que l'erreur quadratique moyenne est donnée par :

$$E^2 = {}^t C \cdot A \cdot C + {}^t R \cdot R^* - 2 \text{Re}({}^t C \cdot B \cdot R^*)$$

où A est la matrice d'autocorrélation du signal $\{z_k\}$

B est une matrice $(2N+1) \times V$ formée des coefficients de la réponse impulsionnelle du canal

C et R étant respectivement le vecteur des coefficients du filtre transversal et le vecteur des coefficients de la réponse impulsionnelle désirée.

On peut alors trouver la solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{opt} = A^{-1} \cdot B^* \cdot R_{opt} \\ R_{opt} = \text{le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice } (Id - {}^t B \cdot A^{-1} \cdot B^*) \text{ , } \lambda_{min} \\ E_{min}^2 = \lambda_{min}^2 \end{array} \right.$$

La propriété importante qui résulte de l'utilisation de cette méthode est évidemment la réduction importante de la complexité de l'algorithme de Viterbi par rapport

SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL
DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

au récepteur optimal ($V \ll L$).

Nous allons maintenant donner une expression de la probabilité d'erreur du récepteur proposé dans le cadre d'une transmission MAQ. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas idéal, où le bruit est blanc à l'entrée du décodeur Viterbi. C'est une hypothèse non réaliste mais elle a le mérite de permettre une formulation assez simple et de donner une borne aux performances auxquelles on peut s'attendre dans les cas pratiques (voir /5/ pour l'influence de la coloration du bruit).

Idéalement le récepteur RMVA reçoit à l'instant k :

$$x_k = \sum_{i=0}^{V-1} a_{k-i} r_i + b_k$$

où la suite $\{b_k\}$ représente un bruit blanc gaussien de variance \mathcal{E}_{\min}^2

On peut alors montré /5/, que la probabilité d'erreur du récepteur RMVA pour une modulation MAQ s'écrit :

$$P(e) \approx K \cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2} \cdot \mathcal{E}_{\min}}\right)$$

où $Q(\cdot)$ est la fonction d'erreur

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

d_{\min} est la distance minimale générée par la RID

\mathcal{E}_{\min}^2 est la valeur de l'EQMM

K est une constante qui indique le nombre de chemins qui ont pour distance minimale d_{\min} dans le treillis de décodage.

C'est une relation importante car elle montre que le facteur prépondérant qui fixe les performances du récepteur RMVA est le rapport $d_{\min}/\mathcal{E}_{\min}$.

Cantoni et Kwong /6/ ont montré que l'erreur quadratique moyenne minimale \mathcal{E}_{\min}^2 est une fonction monotone décroissante de la longueur V de la RID.

Le calcul de d_{\min} est quant à lui beaucoup plus difficile est les seules études se situe dans un cadre de modulation d'amplitude /7/ et /8/.

En résumé, il faut d'une part souligner l'importance du choix de la longueur V de la réponse impulsionnelle désirée; en effet, il faut choisir V grand pour avoir une EQMM petite et il faut choisir V petit pour réduire la complexité de l'algorithme de Viterbi. Un compromis judicieux est donc à trouver pour les réalisations pratiques.

Et d'autre part, il faut remarquer qu'à V constant, la minimisation de \mathcal{E}_{\min}^2 , liée au choix de la RID, ne nous renseigne pas sur les variations de d_{\min} et donc sur le rapport $d_{\min}/\mathcal{E}_{\min}$.

Il est donc nécessaire d'étudier l'influence du paramètre d_{\min} , soit par analyse, soit par simulation. C'est ce problème que nous allons aborder.

II. RESULTATS ET ANALYSE.

Pour cela, nous avons simulé l'ensemble du système de transmission utilisant le récepteur RMVA, sur deux lignes téléphoniques réelles, LN1 et LN2. LN1 est une des plus mauvaises lignes rencontrées dans la pratique en transmission de données et LN2 est une ligne à distorsion moyenne (voir /5/ pour plus de détails), par rapport au gabarit de la recommandation M1020 du CCITT. Nous nous sommes fixé une vitesse de 2400 Bauds, avec trois débits binaires, 4800 Bits/s (constellation à 4 phases PSK4), 7200 Bits/s (constellation à 8 phases PSK8), et 9600 Bits/s (constellation à 16 points V29 noté QAM16). Chaque constellation est normée à puissance unitaire. Nous avons étudié le système de transmission sur des longueurs des réponses impulsionnelles désirées inférieures ou égales à trois, et nous avons imposé $\sum_i |r_i|^2 = 1$:

- récepteur utilisant une réponse impulsionnelle désirée de longueur 1, noté RID1 : c'est l'égalisation linéaire classique.
- récepteur utilisant une réponse impulsionnelle désirée de longueur respectivement 2 et 3, noté RID2 et RID3 : ceux sont des récepteurs RMVA.

Nous donnons dans le tableau 1-a et 1-b respectivement les erreurs quadratiques moyennes minimales pour chacun des trois récepteurs et pour les deux lignes respectivement LN1 et LN2.

Nous donnons ensuite les résultats des probabilités d'évènements d'erreur obtenues par simulation numérique pour les lignes LN1 (fig.2) et LN2 (fig.3) et pour les différentes constellation utilisées et ce pour les trois systèmes RID1, RID2 et RID3.

Commentaires des résultats.

Nous pouvons constater plusieurs phénomènes intéressants, à la vue de ces résultats que nous allons décrire en fonction de la ligne utilisée.

Ligne LN1

La ligne LN1 est une ligne à très forte distorsion. Le récepteur RID1 ne parvient que difficilement à l'égaliser malgré le nombre important de coefficients du filtre transversal (45). La perte de 5 à 6 dB par rapport au canal parfait est en accord avec les valeurs trouvées de l'EQMM.



SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL
DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

S/B (dB)	RID1 (dB)	RID2 (dB)	RID3 (dB)
10	-7.08	-9.73	-11.35
11	-7.76	-10.52	-12.28
12	-8.46	-11.31	-13.08
13	-9.19	-12.12	-13.96
14	-9.94	-12.94	-14.85
15	-10.70	-13.77	-15.74
17	-12.23	-15.43	-17.55
19	-13.74	-17.12	-19.36
20	-14.47	-17.96	-20.26
21	-15.17	-18.8	-21.15
22	-15.84	-19.65	-22.06
30	-19.40	-25.63	-28.49
∞	-20.65	-29.91	-33.62

tableau -a-

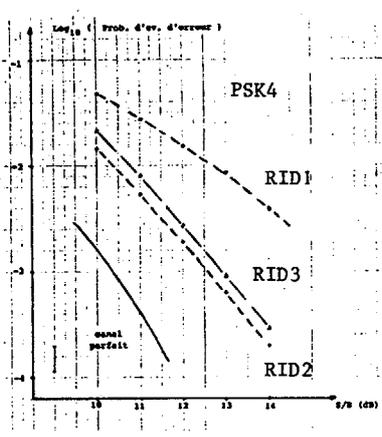
LN1

S/B (dB)	RID1 (dB)	RID2 (dB)	RID3 (dB)
10	-9.28	-10.97	-11.11
11	-10.15	-11.37	-12.01
12	-11.05	-12.29	-12.93
13	-11.90	-13.22	-13.87
15	-13.85	-15.11	-15.77
17	-15.73	-17.03	-17.69
19	-17.70	-18.96	-19.62
20	-18.68	-19.93	-20.59
22	-20.65	-21.86	-22.51
25	-23.63	-24.71	-25.37
28	-25.62	-27.45	-28.18
29	-27.61	-28.34	-29.11
30	-28.60	-29.19	-30.04
∞	-58.25	-51.24	-55.32

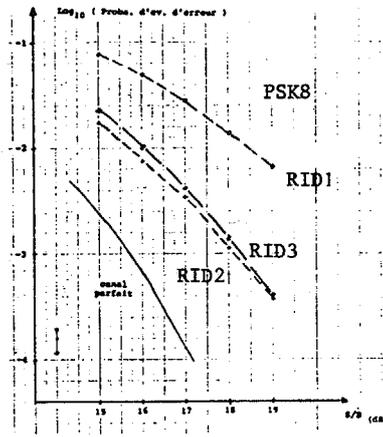
tableau -b-

LN2

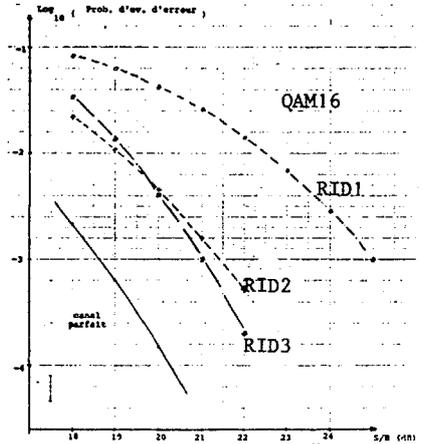
Tableau 1 : Erreurs quadratiques moyennes minimales



-a-

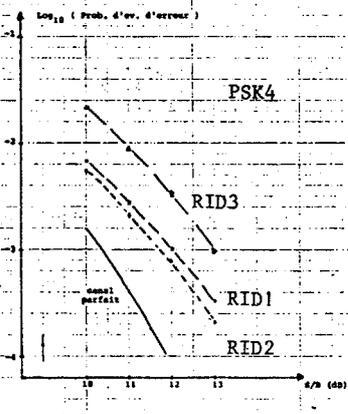


-b-

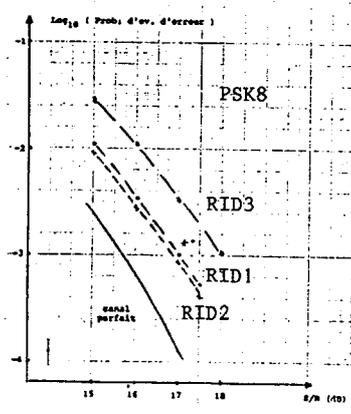


-c-

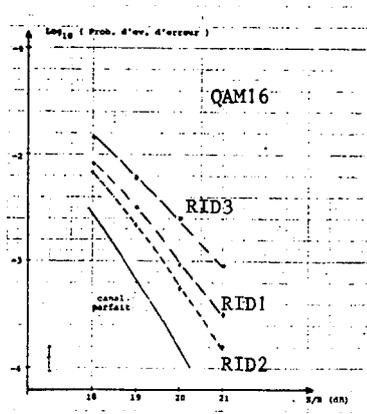
Fig. 2 : Probabilités d'évènements d'erreur , ligne LN1



-a-



-b-



-c-

Fig 3 : Probabilités d'évènements d'erreur , ligne LN2

SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL
DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

La surprise, sur cette ligne, vient du fait que le récepteur RID2 obtient des performances tout à fait comparables, sur les rapports S/B étudiés, à celles obtenues par le récepteur RID3, et ceci avec une complexité nettement plus réduite.

Magee dans /9/ avait observé un phénomène similaire. Ce résultat n'était pas du tout prévisible en étudiant simplement les variations de ξ_{\min}^2 puisque on obtenait $\xi_{\min}^2(\text{RID3}) < \xi_{\min}^2(\text{RID2})$. Non prévisible aussi la perte de 2 à 3 dB par rapport au canal parfait.

Ligne LN2.

La ligne LN2 est une ligne à distorsion moyenne. Les résultats sont ici encore plus surprenants. Sur les rapports S/B étudiés, le récepteur RID3 s'avère être le moins performant des trois, alors qu'on obtenait pour celui-ci, toujours la meilleure EQMM. Le récepteur RID2 donne ici aussi les meilleures performances malgré une perte de 1 à 1.5 dB par rapport au canal parfait, perte non prévisible sur l'étude de l'EQMM.

Les premières conclusions que l'on peut tirer de ces résultats surprenants sont :

- le récepteur utilisant une réponse impulsionnelle désirée de longueur deux, semble à première vue le plus performant sur les deux types de distorsions utilisées, pour le rapport Taux d'erreur/Complexité.
- seules les valeurs de l'EQMM du récepteur RID1 donnent directement accès aux taux d'erreur auxquels on peut s'attendre.

L'étude du paramètre d_{\min} est donc nécessaire pour essayer d'expliquer le comportement des récepteurs RID2 et RID3.

III. ETUDE DU RAPPORT $d_{\min}/\sqrt{2}\xi_{\min}$

La recherche de bons codes convolutionnels est faite sous le critère : maximisation de la distance minimale du code. C'est ce paramètre, en effet, qui caractérise la tenue au bruit du codage, i.e. la probabilité d'apparition de l'évènement d'erreur le plus vraisemblable.

Nous avons vu que l'action du canal pouvait être considérée comme un certain codage de l'information. C'est grâce à cette propriété que l'on a pu utiliser comme décodeur l'algorithme de Viterbi.

Pour le récepteur de Falconer et Magee, le codage de l'information est effectué par la réponse impulsionnelle désirée et non pas par le canal. Le rapport S/B

est optimisé à l'entrée du décodeur, mais pas la distance minimale du code.

Il est donc naturel d'étudier le comportement du rapport $d_{\min}/\sqrt{2}\xi_{\min}$, d'autant plus que personne à notre connaissance, n'a établi de comparaison entre les performances mesurées d'un récepteur RMVA et les valeurs de ce rapport.

La distance minimale pour le récepteur RID1 étant la distance minimale de la constellation utilisée, donc obtenue de façon immédiate, le problème était de pouvoir calculer d_{\min} pour de très grands treillis générés par les systèmes RID2 et RID3, calcul beaucoup trop complexe pour être exécuté à la main.

Le problème a été résolu grâce à un programme général chargé de calculer de façon systématique la distance minimale pour un treillis donné. Le calcul a été effectué /5/ sur les deux lignes LN1 et LN2 et pour les trois constellations utilisées, ainsi que sur les rapports S/B qui nous ont paru les plus significatifs.

Nous pouvons faire à la suite de ce calcul deux constatations importantes :

- la première est que, quelles que soient les valeurs de la RID de longueur deux, on obtient toujours une distance minimale égale à celle de la constellation utilisée.
- la deuxième est que le pseudo code créé par RID3, dégrade nettement la valeur de d_{\min} par rapport à celle de la constellation, sur les exemples que nous avons traités. Cette dégradation est fonction de la ligne et du rapport S/B. Elle est donc fonction des valeurs que peuvent prendre les échantillons de la réponse impulsionnelle désirée de longueur trois.

Il était alors simple, à l'aide du tableau 1, de calculer le rapport $d_{\min}/\sqrt{2}\xi_{\min}$. Ces résultats sont regroupés dans le tableau 2-A et 2-B pour les lignes LN1 et LN2.

Ligne LN1.

Les résultats obtenus sur cette ligne sont tout à fait conformes à ceux observés en simulation, à savoir que les valeurs de l'EQMM pour les récepteurs RMVA ne donnent pas accès directement aux probabilités d'erreur. On trouve aussi la confirmation de l'existence d'une zone, aux alentours de 20 dB, où les récepteurs RID2 et RID3 donnent des taux d'erreurs comparables, de la supériorité de RID2 sur les rapports S/B plus petits et de la supériorité de RID3 sur les rapports S/B plus grands et ceci indépendamment de la constellation.



SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL
DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

S/B (db)	can. parf	RID1	RID2	RID3
10	3.16	2.25	3.06	3.02
11	3.54	2.44	3.35	3.32
12	3.98	2.64	3.67	3.62
13	4.46	2.88	4.03	3.95
14	5.01	3.14	4.43	4.35
19	8.91	4.86	7.17	7.16
20	10	5.29	7.90	7.89
21	11.22	5.73	8.70	8.74
22	12.58	6.19	9.60	9.69
30	31.62	9.33	19.25	20.56
∞	∞	10.77	31.29	39.26

tableau -a-

RAPPORTS de $d_{min}/\sqrt{2} \cdot \epsilon$ CONSTELLATION PSK4

S/B (db)	can. parf	RID1	RID2	RID3
10	1.71	1.22	1.66	1.63
15	3.04	1.85	2.65	2.59
17	3.83	2.21	3.20	3.15
19	4.82	2.63	3.89	3.88
20	5.41	2.86	4.29	4.28
21	6.07	3.10	4.73	4.73
22	6.81	3.25	5.21	5.22
30	17.11	5.05	10.45	11.10
∞	∞	5.83	17.00	21.18

tableau -b-

RAPPORTS de $d_{min}/\sqrt{2} \cdot \epsilon$ CONSTELLATION PSK8

S/B (db)	can. parf	RID1	RID2	RID3
15	2.16	1.31	1.87	1.83
19	3.42	1.87	2.76	2.75
20	3.84	2.03	3.04	3.03
21	4.31	2.20	3.35	3.37
22	4.84	2.38	3.69	3.73
30	12.16	3.59	7.40	7.89
∞	∞	4.14	12.04	14.27

tableau -c-

RAPPORTS de $d_{min}/\sqrt{2} \cdot \epsilon$ CONSTELLATION QAM16

S/B (db)	can. parf	RID1	RID2	RID3
10	3.16	2.91	3.33	2.89
11	3.54	3.21	3.70	3.21
12	3.98	3.56	4.11	3.58
13	4.46	3.98	4.58	3.99
19	8.91	7.67	8.87	7.79
20	10.00	8.59	9.91	9.01
25	17.78	15.18	17.19	16.02
28	25.11	21.42	23.60	22.67
29	28.18	24.01	26.12	25.60
30	31.62	26.91	28.80	29.20
∞	∞	817	363	545

tableau -a-

RAPPORTS de $d_{min}/\sqrt{2} \cdot \epsilon$ CONSTELLATION PSK4

S/B (db)	can. parf	RID1	RID2	RID3
10	1.71	1.57	1.80	1.54
15	3.04	2.66	3.08	2.67
17	3.83	3.31	3.84	3.34
19	4.82	4.15	4.80	4.17
20	5.41	4.64	5.36	4.72
25	9.62	8.22	9.30	8.70
28	13.60	11.59	12.77	12.18
29	15.25	13.00	14.13	13.83
30	17.11	14.56	15.59	15.72
∞	∞	442	197	288

tableau -b-

RAPPORTS de $d_{min}/\sqrt{2} \cdot \epsilon$ CONSTELLATION PSK8

S/B (db)	can. parf	RID1	RID2	RID3
15	2.16	1.89	2.19	1.96
19	3.42	2.95	3.41	3.06
20	3.84	3.30	3.81	3.46
25	6.84	5.84	6.61	6.42
29	10.84	9.24	10.05	9.88
30	12.16	10.35	11.08	11.23
∞	∞	314	140	206

tableau -c-

RAPPORTS de $d_{min}/\sqrt{2} \cdot \epsilon$ CONSTELLATION QAM16

Ligne LN1 , (A)

Ligne LN2 , (B)

Tableau 2 : Rapports $d_{min}/\sqrt{2} \cdot \epsilon_{min}$

Ligne LN2.

La première constatation intéressante sur cette ligne est l'existence d'une zone, ici aussi indépendante de la constellation, aux alentours de 30 dB, où les récepteurs RID2 et RID3 ont des taux d'erreurs comparables, avec une supériorité de RID2 pour les rapports S/B plus petits (phénomène observé en simulation) et une supériorité de RID3 pour les rapports S/B plus grands. Autre constatation, c'est l'existence d'une zone, aux alentours de 14 dB, entre les récepteurs RID1 et RID3, où les phénomènes sont comparables à ceux décrits entre RID2 et RID3. Or ce résultat n'est pas observé en simulation. L'explication tient à la coloration du bruit qui affecte le récepteur RID3, mais pas le récepteur RID1. L'explication est la même entre RID2 et le canal parfait.

Conclusion de ces résultats.

Les résultats de simulation et l'étude du rapport $d_{min}/\sqrt{2} \cdot \epsilon_{min}$ semblent être en accord quant aux conclusions qui s'en déduisent. La zone où les probabilités d'erreur entre les récepteurs RID2 et RID3 sont équivalentes, dépend essentiellement de la ligne et non de la constellation utilisée : plus on prendra une

ligne à faible distorsion et plus cette zone se déplacera vers de grands rapports S/B et inversement.

L'utilisation d'une réponse impulsionnelle de longueur trois n'est justifiable que sur des lignes extrêmement distordues (cas d'école), et s'avère nuisible en taux d'erreurs et bien sur en complexité par rapport à l'utilisation d'une longueur deux pour les réalisations pratiques. L'égaliseur linéaire n'est intéressant par un bon rapport Performance/Complexité, que sur les lignes faiblement distordues. Il s'avère nettement inefficace face à une distorsion élevée.

On voit donc que, pour les systèmes réels, le récepteur utilisant une réponse impulsionnelle de longueur deux représente le meilleur compromis Performance/Complexité pour une utilisation standardisée et diversifiée à la fois sur réseau commuté et sur ligne louée.

A la suite de ce travail, il nous a semblé intéressant de pouvoir justifier théoriquement les résultats de d_{min} trouvés par simulation. C'est cette étude que nous allons maintenant présenter.



SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL
DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMLANCE

IV. ETUDE THEORIQUE DE DMIN.

1°- Rappels.

Soit A une constellation à valeurs complexes :

$$A = \{ a_i \in \mathbb{C}, i=0, \dots, N-1 \}$$

Soit U l'ensemble des messages possibles de longueur K:

$$U = \{ X \in \mathbb{C}^K / X = \{ x_i \} i=0, \dots, K-1 \text{ et } x_i \in A \}$$

Soit H le vecteur des échantillons de la réponse impulsionnelle :

$$H = \{ h_i \in \mathbb{C}, i=0, \dots, L-1 \text{ et } \sum_{i=0}^{L-1} |h_i|^2 = 1 \}$$

relation notée (4.1)

Soit Q l'ensemble des messages reçus :

$$Q = \{ Z \in \mathbb{C}^K / Z = H \otimes X, X \in U, Z = \{ z_i \} \}$$

$$\text{où } z_i = \sum_{j=0}^{L-1} h_j \cdot x_{i-j}, \quad 0 \leq i \leq K-1$$

et \otimes représente le produit de convolution

Définition 1.

On définit la distance entre deux vecteurs de Q

comme :

$$\forall (Z, Z') \in Q^2, \text{dist}(Z, Z') = |H \otimes X - H \otimes X'|$$

ou encore :

$$\text{dist}(Z, Z') = \left(\sum_{i=0}^{K-1} \left(\sum_{j=0}^{L-1} |h_j|^2 \cdot |x_{i-j} - x'_{i-j}|^2 \right) \right)^{1/2}$$

Définition 2.

On définit E = { F = (X - X'), $\forall X, X' \in U$ et $X \neq X'$ }

E est l'ensemble de toutes les séquences non nulles de la forme :

$$F = (\dots, 0, 0, f_0, f_1, \dots, f_m, 0, 0, \dots)$$

Définition 3.

On définit la distance minimale sur Q comme :

$$d_{\min}^2 = \min_Q \{ \text{dist}^2(Z, Z') \}$$

$$d_{\min}^2 = \min_E \{ |H \otimes F|^2 \}$$

L'algorithme de Viterbi repose sur le fait que tout vecteur appartenant à Q peut être décrit de façon biunivoque par un chemin à travers un treillis d'états à N^{L-1} états, chaque état possédant N transitions.

A chaque transition est affectée un poids z_k correspondant à la $k^{\text{ième}}$ composante d'un vecteur Z.

On peut alors remarquer /5/ que deux transitions qui partent d'un même état s'écrivent respectivement :

$$z_k = \sum_{i=1}^{L-1} h_i \cdot x_{k-i} + h_0 \cdot x_k$$

$$z'_k = \sum_{i=1}^{L-1} h_i \cdot x_{k-i} + h_0 \cdot x'_k$$

Une remarque similaire /5/ peut être faite pour deux transitions arrivant sur un même état.

Chercher la distance minimale dans Q revient à chercher la distance minimale entre deux chemins quelconques passant par un nombre fini d'états distincts.

2°- Distance minimale pour L = 2.

Nous avons alors :

$$H = \{ h_0, h_1 \in \mathbb{C}^2 \text{ et } |h_0|^2 + |h_1|^2 = 1 \}$$

Le treillis de décodage à N états et N transitions

par état auxquelles on associe des poids de la forme :

$$h_0 \cdot a_i + h_1 \cdot a_j \quad (a_i, a_j) \in A^2$$

ce qui signifie que l'on peut aller, à partir d'un état sur tous les autres et vice-versa.

2-1. 1^{er} cas.

Dans un premier temps, nous allons calculer la distance minimale pour des chemins ne différant que par un état.

D'après la définition 3, on peut écrire :

$$\alpha_{\min}^2 = \min_Q \left\{ \sum_{i=0}^{K-1} |z_i - z'_i|^2 \right\}$$

$$\alpha_{\min}^2 = \min_A \left\{ (|h_0|^2 + |h_1|^2) \cdot |a_i - a'_i|^2 \right\}$$

Avec (4.1), on écrit :

$$\alpha_{\min}^2 = \min_A \left\{ |a_i - a'_i|^2 \right\} = d_{\min}^2$$

La distance minimale est alors exactement la distance minimale de la constellation utilisée et donc indépendante des valeurs des échantillons de la réponse impulsionnelle, sous la contrainte (4.1).

2-2. 2^{ième} cas.

Montrons que la distance minimale pour des chemins différant par deux états est supérieure ou égale à α_{\min}

$$\beta_{\min}^2 = \min_Q \left\{ \sum_{i=0}^{K-1} |z_i - z'_i|^2 \right\}$$

$$\beta_{\min}^2 = \min_A \left\{ |h_0|^2 \cdot |a_i - a'_i|^2 + |h_1|^2 \cdot |a_j - a'_j|^2 + |h_0(a_i - a'_i) + h_1(a_j - a'_j)|^2 \right\}$$

Or $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$|x + y| \geq |x| - |y| \Rightarrow |x + y|^2 \geq (|x| - |y|)^2$$

Et en tenant compte de (4.1), on écrit :

$$(4.2) \beta_{\min}^2 > \min_A \left\{ |a_i - a'_i|^2 + |a_j - a'_j|^2 - 2|h_0||h_1| \cdot |a_i - a'_i| \cdot |a_j - a'_j| \right\}$$

On peut alors démontrer /5/ que :

$$(x, y) \in \mathbb{C}^2, \text{ si } |x|^2 + |y|^2 = 1 \Rightarrow \text{Max}\{|x||y|\} = 1/2$$

Alors (4.2) devient :

$$\beta_{\min}^2 > \min_A \left\{ |a_i - a'_i|^2 + |a_j - a'_j|^2 \right\} \geq \alpha_{\min}^2$$

2-3. Cas général.

En procédant de la même façon, on peut écrire /5/, pour deux chemins différant sur M états ($M \geq 3$) :

en posant $|x_k| = |a_i - a'_i|$, $k \in [1, M]$, $\forall (a_i, a'_i) \in A^2$



SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL
DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

$$\lambda_{\min}^2 \geq \min_A \left\{ \sum_{i=1}^M |x_i|^2 - \sum_{i=2}^M |x_{i-1}|^2 \cdot |x_i|^2 \right\}$$

$$\lambda_{\min}^2 \geq \min_A \left\{ \sum_{i=1}^M |x_i|^2 - \sum_{i=2}^M \max_A \{ |x_{i-1}|^2, |x_i|^2 \} \right\}$$

d'où

$$\lambda_{\min}^2 \geq \min_A \{ |x_i|^2 \} \geq \alpha_{\min}^2$$

2-4. Conclusion.

En conclusion, nous venons de démontrer que la distance minimale pour une réponse impulsionnelle de longueur deux, sous la contrainte (4.1) est donnée par la distance minimale entre deux points de la constellation utilisée.

Elle est donc tout à fait indépendante des valeurs des échantillons de cette réponse, ce qui démontre complètement les suppositions qui avaient été faites par Magee et Proakis dans /10/.

3°- Distance minimale pour L = 3.

Nous nous plaçons dans le cas :

$$H = \{ h_0, h_1, h_2 \in \mathbb{C} / |h_0|^2 + |h_1|^2 + |h_2|^2 = 1 \}$$

Le treillis de décodage à N^2 états et N transitions par état.

3-1. 1^{er} cas.

Calcul de la distance minimale de deux chemins différant par deux états seulement.

$$\mu_{\min}^2 = \min_Q \left\{ \sum_{i=0}^{K-1} |z_i - z_i'|^2 \right\}$$

$$\mu_{\min}^2 = \min_A \left\{ (|h_0|^2 + |h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot |a_i - a_i'|^2 \right\}$$

En tenant compte de (4.1) :

$$\mu_{\min}^2 = \min_A \{ |a_i - a_i'|^2 \}$$

$$\mu_{\min}^2 = d_{\min}^2$$

3-2. 2^{ième} cas.

Calcul de la distance minimale de deux chemins qui diffèrent par trois états.

$$\Delta_{\min}^2 = \min_Q \left\{ \sum_{i=k}^{k+3} |z_i - z_i'|^2 \right\}$$

En utilisant la relation (4.1) et le fait que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad |x|^2 = x \cdot x^*$$

on obtient :

$$\Delta_{\min}^2 = \min_A \left\{ |a_i - a_i'|^2 + |a_j - a_j'|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re} \left(h_1^* (h_0 + h_2) \cdot (a_i - a_i')^* \cdot (a_j - a_j') \right) \right\}$$

Il est facile de voir que Δ_{\min} dépend des valeurs de la réponse impulsionnelle.

Par exemple si :

$$|a_i - a_i'| = |a_j - a_j'|$$

il suffit que :

$$\operatorname{Re} (h_1^* \cdot (h_0 + h_2)) \leq -1/2$$

pour avoir :

$$\Delta_{\min}^2 \leq \mu_{\min}^2$$

Il se peut que la distance minimale pour des chemins qui diffèrent sur au moins quatre états soit plus petite ou plus grande que μ_{\min}^2 , mais de toute façon pour le cas L = 3, la distance minimale sera au maximum égale à μ_{\min}^2 .

3-3. Conclusion.

Nous venons de montrer que pour une réponse impulsionnelle de longueur trois, la distance minimale du pseudo code est fonction des valeurs de cette réponse et que cette distance minimale est toujours plus petite ou égale à celle de la constellation.

4°- Autres cas.

Nous considérons une réponse impulsionnelle de longueur W. deux chemins différents divergent au minimum sur W-1 états. La distance minimale est dans ce cas :

$$\omega_{\min}^2 = \min_Q \left\{ \sum_{i=0}^{K-1} |z_i - z_i'|^2 \right\}$$

$$\omega_{\min}^2 = \min_A \left\{ \sum_{i=0}^{W-1} |h_i|^2 \cdot |a_j - a_j'|^2 \right\}$$

$$\omega_{\min}^2 = \min_A \{ |a_j - a_j'|^2 \} = d_{\min}^2$$

Il se peut que pour des chemins qui diffèrent sur plus de W-1 états, la distance minimale soit plus grande ou plus petite que ω_{\min}^2 , mais de toute façon pour L = W la distance minimale sera au maximum égale à d_{\min}^2 .

V. CONCLUSION.

Après avoir décrit la méthode de Falconer et Magee, nous avons établi, sur quelques exemples, les probabilités d'erreur de cette méthode par simulation.

Nous avons ensuite étudié le comportement de ces dernières par l'étude du paramètre $d_{\min}/\sqrt{2} \cdot \mathcal{E}_{\min}$. Nous avons alors montré son importance, pour ce type de récepteur, par le fait qu'il permet d'expliquer parfaitement les résultats obtenus en simulation.

Dans un contexte général, nous avons alors démontré que la distance minimale du pseudo code est une fonction non croissante de la longueur de la réponse impulsionnelle du canal.

Le code convolusionnel ainsi créé ne peut donc pas, en aucun cas fournir une distance minimale plus grande



SUR LE CHOIX DE LA LONGUEUR DE TRONCATURE DU CANAL

DESIRE POUR UN RECEPTEUR DE DONNEES A MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

que celle de la constellation utilisée.

Nous avons démontré que la distance minimale pour une réponse impulsionnelle de longueur deux est égale à d_{\min} , quelles que soient les valeurs des échantillons de cette réponse. Il n'y a donc pas de dégradation de la distance minimale lors d'une utilisation d'un récepteur tel que RID2.

Puis nous avons montré que pour une réponse impulsionnelle de longueur trois, la distance minimale est fonction des valeurs des échantillons de cette réponse. Ce qui peut donner une distance minimale plus petite que d_{\min} .

La méthode de Falconer et Magee, possédant un organe de décision basé sur le critère du maximum de vraisemblance, optimise le filtre transversal et la RID selon le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale. En négligeant les phénomènes de coloration du bruit, nous venons de démontrer que lors de l'utilisation d'une réponse impulsionnelle désirée de longueur deux, le rapport $d_{\min}/\sqrt{2} \cdot \xi_{\min}$ est maximal. Dans ce cas le critère de l'EQMM est optimal vis à vis du critère des probabilités d'erreur minimales. Mais pour l'utilisation d'une réponse impulsionnelle de longueur supérieure ou égale à trois, le critère de l'EQMM n'optimise plus le rapport $d_{\min}/\sqrt{2} \cdot \xi_{\min}$ et par conséquent n'optimise plus le critère des probabilités d'erreur minimales. Il n'est donc plus optimal dans ce sens. Vouloir augmenter la longueur de la RID au delà de deux n'est donc pas judicieux d'un point de vue performance et d'un point de vue complexité. L'illustration qui en a été faite sur quelques exemples est très caractéristiques.

La conclusion est que l'utilisation de la méthode de Falconer et Magee avec une réponse impulsionnelle désirée de longueur deux représente le compromis idéal entre Performances et Complexité, en vue d'une réalisation pratique de cette méthode, et compte tenu des critères choisis.

Références .

- /1/ CHANG R.W. et HANCOCK J.C., 'On Receiver Structures for Channels Having Memory', I.E.E.E. Trans. Inform. Theory, Vol IT-12, pp 463-468, Octobre 1967.
- /2/ VITERBI A.J., 'Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm', I.E.E.E. Trans. Inform. Theory, Vol IT-13, pp 260-269, Avril 1967.
- /3/ FORNEY G.D., 'Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference', I.E.E.E. Trans. Inform. Theory, Vol IT-18, pp 363-378, Mai 1972.
- /4/ FALCONER D.D. et MAGEE F.R., 'Adaptive Channel Memory Truncation for Maximum-Likelihood Sequence Estimation', B.S.T.J. Vol-52, n° 9, pp 1541-1562, Novembre 1973.
- /5/ GIRAUDON G., 'Etude d'un Récepteur de Données à Maximum de Vraisemblance en Présence de Bruit et d'Interférence Entre Symbole', Thèse de Doctorat de Spécialité. Université de Nice. Novembre 1979.
- /6/ CANTONI A. et KWONG K., 'Further Results on the Viterbi Algorithm Equalizer', I.E.E.E. Trans. Inform. Theory, Corresp. pp 764-767. Novembre 1974.
- /7/ FOSCHINI G. et ANDERSON R., 'The Minimum Distance for MLSE Digital Data Systems of Limited Complexity', I.E.E.E. Trans. Inform. Theory, Vol IT-21; pp 544-551, Septembre 1975.
- /8/ FREDRICSSON S.A., 'Optimum Transmitting Filter in PAM Systems with a Viterbi Detector', I.E.E.E. Trans. Inform. Theory, Vol IT-20, pp 479-489, Juillet 1974.
- /9/ MAGEE F.R., 'A Comparaison of Compromise Viterbi Algorithm and Standard Equalization Techniques over Band-Limited Channels', I.E.E.E. Trans. Communication, Vol 23, pp 361-367, Mars 1975.
- /10/ MAGEE F.R. et PROAKIS J.G., 'Adaptive Maximum-Likelihood Sequence Estimation for Digital Signaling in the Presence of ISI', I.E.E.E. Trans. Inform. Theory, Corresp., pp 120-124, Janvier 1973.

