

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

RECONSTRUCTION D'UNE CIBLE A PARTIR DE MESURES ACOUSTIQUES
ACOUSTICAL TARGET RECONSTRUCTION

Jean-Pierre SESSAREGO

C.N.R.S. Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique - B.P. 71 - 13277 MARSEILLE cedex 9 - France -

RESUME

Avec l'hypothèse d'une cible constituée de points brillants sans interaction, dont la répartition spatiale est notée : $P(x, y) = \sum_i d_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$ on assimile la réponse impulsionnelle observée dans une certaine direction : θ à la projection suivant cette même direction de la fonction de répartition des points brillants. Le problème consiste alors à reconstruire la fonction : $P(x, y)$ à partir de la connaissance de toutes les projections. C'est un problème classique connu sous le nom de problème de Radon, développé en particulier en tomographie, en rayons X où un certain nombre d'algorithmes ont été établis.

Nous avons testé un certain nombre de ces algorithmes dans le cas de la reconstruction d'une cible par des mesures acoustiques et nous discutons la qualité des images obtenues avec les différents procédés.

SUMMARY

With the assumption of a distributed bright spot target whose spatial distribution is noted : $P(x, y) = \sum_i d_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$ we show that the impulse response in a direction : θ is the projection in this same direction of the function : $P(x, y)$. The problem now is to build the function $P(x, y)$ with the knowledge of all projections.

It is a classical problem known as the Radon problem which has been studied in tomographical methods of reconstruction where a great number of algorithms have been proposed.

We have tested two algorithms in the case of the acoustical reconstruction of a target and we discuss the quality of the resulting images.



RECONSTRUCTION D'UNE CIBLE A PARTIR DE MESURES ACOUSTIQUES
ACOUSTICAL TARGET RECONSTRUCTION

I - INTRODUCTION

La méthode que nous proposons permet de remonter à la structure géométrique d'une cible à partir du champ acoustique diffracté, observé dans toutes les directions.

L'obstacle que nous cherchons à identifier sera supposé formé de points brillants isolés, sans interaction entre eux.

Contrairement à la plupart des systèmes d'échographie, on suppose une émission omnidirectionnelle de manière à pouvoir éclairer tous les points de la cible, la réception se faisant au même point que l'émission.

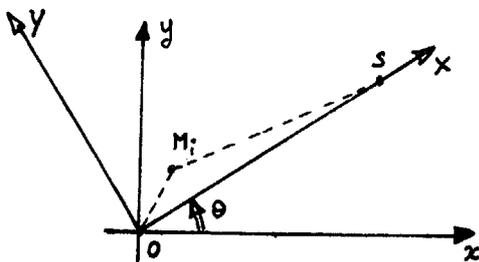
On s'est intéressé à un problème du type bi-dimensionnel pour ne pas alourdir la présentation de la méthode, mais le cas d'un obstacle de R^3 pourrait se traiter d'une manière tout à fait analogue.

Si : $P(x, y)$ désigne la fonction de répartition spatiale des points brillants, on montre que la réponse impulsionnelle observée suivant une direction : θ est la projection suivant cette même direction de la fonction $P(x, y)$ que l'on cherche à reconstruire. Il s'agit alors en supposant que toutes les projections sont connues, de remonter à la fonction cherchée $P(x, y)$.

II - CALCUL DU CHAMP ACOUSTIQUE DIFFRACTE

La source ponctuelle placée au point S crée en un point : M_i un champ incident qui s'écrit :

$$(1) \quad \psi_0(M_i) = \frac{e^{ikR_i}}{4\pi R_i} \quad R_i = |M_i S|$$



- Figure 1 -

Le point M_i se comporte alors comme une source ponctuelle et réémet une ondelette sphérique affectée d'un coefficient : α_i que l'on supposera dans un premier temps indépendant de la fréquence.

Le champ total reçu au point S s'écrit alors :

$$(2) \quad \psi_s(s, k) = \sum_i \alpha_i \frac{e^{2ikR_i}}{(4\pi R_i)^2}$$

Si l'on fait l'hypothèse du champ lointain, on a :

$$(3) \quad R_i = |SM_i| = |OS| - \frac{\vec{OS} \cdot \vec{OM}_i}{|OS|}$$

Le champ diffracté reçu au point S aura alors l'expression :

$$(4) \quad \psi_s(s, k) = \frac{e^{2ik|OS|}}{(4\pi|OS|)^2} \cdot A(k)$$

avec : $A(k) = \sum_i \alpha_i e^{-\frac{2ik \vec{OS} \cdot \vec{OM}_i}{|OS|}}$

On considère la fonction $P(x, y)$ qui décrit la répartition spatiale des points brillants :

$P(x, y)$ s'écrit :

$$(5) \quad P(x, y) = \sum_i \alpha_i \delta(x - x_i) \cdot \delta(y - y_i)$$

On peut montrer facilement que :

$$(6) \quad P(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(k_x, k_y) e^{i[k_x x + k_y y]} dk_x dk_y$$

Soit en passant dans un système de coordonnées polaires [1]

$$(7) \quad P(x, y) = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \cdot A_\theta(f) \cdot e^{2i\pi f \left[\frac{x}{c} \cos\theta + \frac{y}{c} \sin\theta \right]} df$$

$A_\theta(f)$ représente le champ diffracté observé suivant la direction : θ

III - RELATION RIGOUREUSE ENTRE LA FONCTION $P(x, y)$ ET LA REPONSE IMPULSIONNELLE DE LA CIBLE

On pose :

$$\frac{x}{c} \cos\theta + \frac{y}{c} \sin\theta - \frac{2|OS|}{c} = z$$

la relation précédente devient :

$$(8) \quad P(x, y) = 4\pi|OS|^2 \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \cdot \psi_s(f, \theta) \cdot e^{2i\pi f z} \cdot df$$

si : $h_\theta(z)$ désigne la transformée de Fourier temporelle de $\psi_s(f, \theta)$ dans la direction : θ on a :

$$(9) \quad P(x, y) = \int_0^\pi \left\{ \frac{h_\theta(z)}{2c} * \frac{1}{z} \right\} d\theta$$

C'est l'écriture formelle de la transformée de Radon qui permet de retrouver une fonction inconnue

RECONSTRUCTION D'UNE CIBLE A PARTIR DE MESURES ACOUSTIQUES
ACOUSTICAL TARGET RECONSTRUCTION

$P(x, y)$ à partir de la connaissance de ses différentes projections [2, 3, 4]. $h_0(z)$ apparait donc comme la projection de $P(x, y)$ suivant la direction : θ .

un point brillant unique centré à l'origine des coordonnées.

IV - METHODE DE SOMMATION DES IMAGES

On définit une fonction : $g(x, y)$ par la relation :

$$(10) \quad g(x, y) = \int_0^\pi h_0(z) d\theta.$$

Dans ces conditions, on montre :

$$(11) \quad g(x, y) = P(x, y) * \frac{1}{\pi r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

la fonction $g(x, y)$ permet donc d'obtenir à une convolution près la fonction de répartition spatiale des points brillants

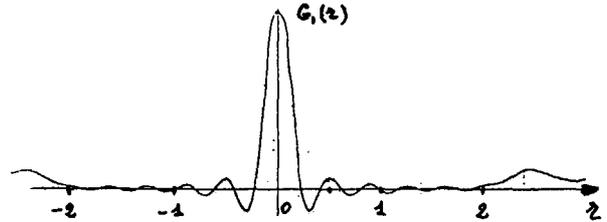


fig 2.

V - APPLICATIONS NUMERIQUES

1) - Discrétisation des relations : échantillonnage angulaire.

Si : f_m désigne la fréquence maximale du signal acoustique incident, la relation (8) s'écrit à un coefficient près :

$$(12) \quad G_1(x, y) = \sum_{i=0}^N \left\{ \int_0^{f_m} f \psi_s(f, \theta_i) \cdot e^{z i n f z_i} df \right\} \Delta \theta_i$$

N étant le nombre total de projections observées dans l'intervalle $[0, \pi]$.

On montre dans ces conditions que [5] :

$$(13) \quad G_1(x, y) = P(x, y) * \left\{ \frac{j_1(4\pi f_m \frac{z}{c})}{4\pi f_m \frac{z}{c}} + \int_0^{f_m} f \sum_n^n j_n(4\pi f \frac{z}{c}) \cdot e^{i n \theta} df \right\}$$

En utilisant les propriétés des fonctions de Bessel, on peut remarquer que l'influence des fonctions

J_{2N} est négligeable pour les valeurs de : r telles que :

$$4\pi f_m \frac{z}{c} \leq 2N$$

soit,

$$(14) \quad z_m \leq \frac{Nc}{2\pi f_m}$$

Cette relation fixe la résolution spatiale que l'on peut atteindre en fonction du nombre de projections et de la fréquence maximale du signal acoustique incident. On a représenté, figure 2, la fonction $G_1(x, y)$ dans le cas où l'objet à tester se réduit à

De même, à partir de la méthode de sommation des images, on obtient une fonction : $G_2(x, y)$ telle que [5] :

$$(15) \quad G_2(x, y) = P(x, y) * \left\{ \int_0^{f_m} j_0(4\pi f \frac{z}{c}) df + \int_0^{f_m} \sum_n^n j_n(4\pi f \frac{z}{c}) \cdot e^{i n \theta} df \right\}$$

$$n = \pm 2N, \pm 4N, \dots$$

La figure 3 donne l'allure de la fonction $G_2(x, y)$ toujours dans le cas où l'objet à tester se réduit à un point brillant centré à l'origine.

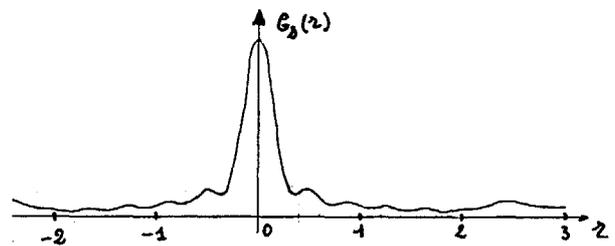


fig 3.

Les courbes des figures 2 et 3 font apparaitre des lobes secondaires dûs à l'effet de l'échantillonnage angulaire.

Ces derniers permettent de fixer une limite de résolution spatiale en fonction de la fréquence maximale du signal incident et du nombre de projections.



RECONSTRUCTION D'UNE CIBLE A PARTIR DE MESURES ACOUSTIQUES
ACOUSTICAL TAGRET RECONSTRUCTION

Les photos 1 et 2 donnent une représentation des fonctions $G_1(x, y)$ et $G_2(x, y)$ dans tout le plan, ce qui permet de voir l'influence de l'angle : θ sur l'allure des courbes.

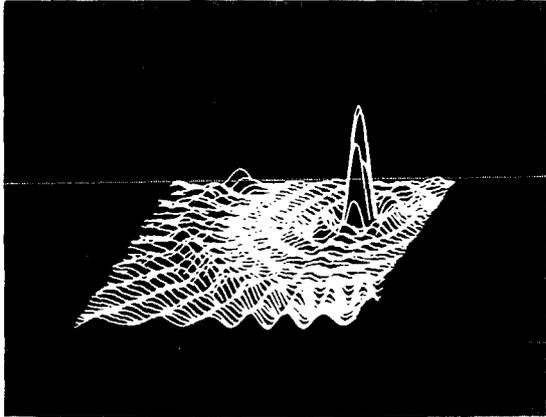


Photo 1. fonction $G_1(x, y)$

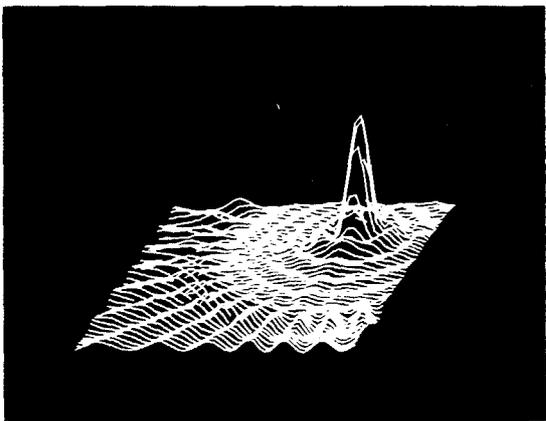


Photo 2. fonction $G_2(x, y)$

2) - Simulations numériques :

On s'est donné une cible constituée de 3 points brillants, l'un d'entre eux étant choisi comme origine du repère de coordonnées : xoy .

On a simulé sur ordinateur, le champ diffracté par un tel obstacle suivant $N = 35$ directions régulièrement espacées de $\Delta\theta = 5^\circ$, de façon à échantillonner angulairement le domaine $[0, \pi]$. Pour chaque direction, on a calculé une approximation de la réponse impulsionnelle du système en prenant différentes

largeurs de bande pour le signal acoustique émis.

Ces réponses impulsionnelles ont été ensuite échantillonnées sur 400 pts et stockées dans une mémoire de masse (voir figure 4).

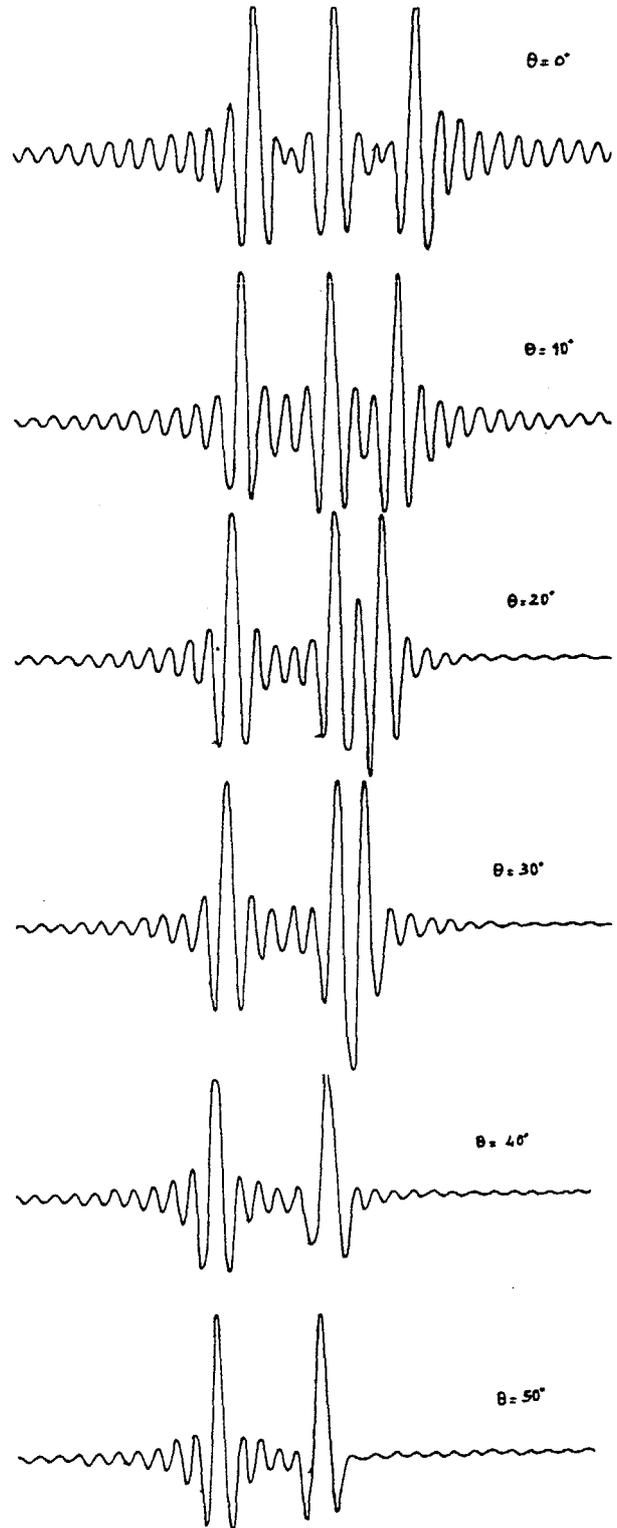
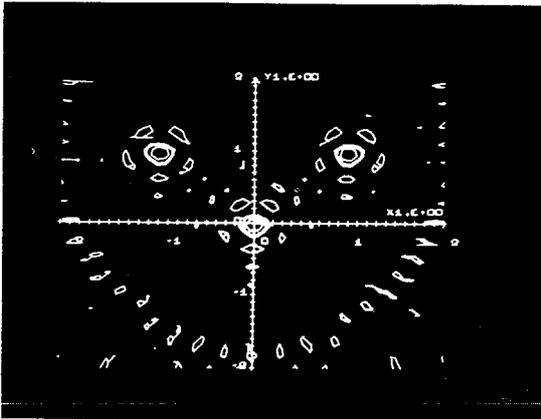


fig 4-

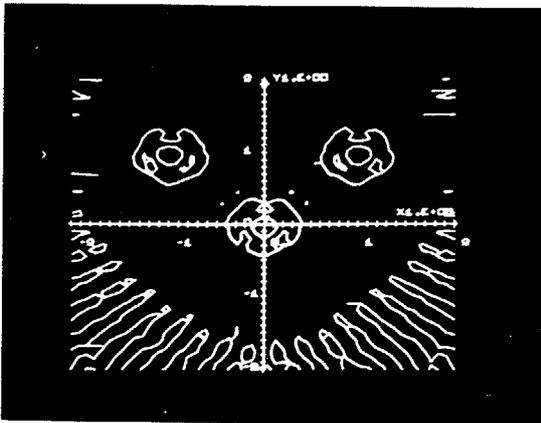
RECONSTRUCTION D'UNE CIBLE A PARTIR DE MESURES ACOUSTIQUES

ACOUSTICAL TARGET RECONSTRUCTION

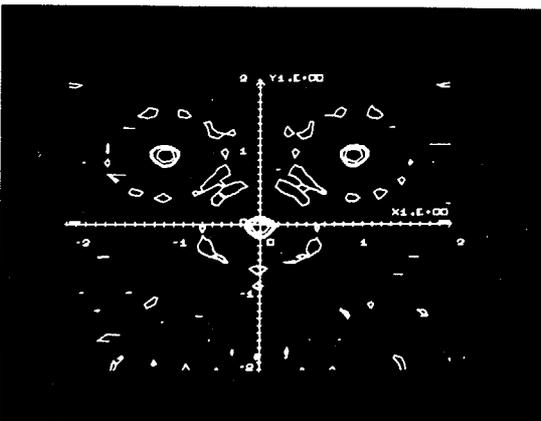
Deux algorithmes de reconstruction ont été utilisés pour retrouver une image de l'objet initial, l'un issu de la méthode directe décrite précédemment, l'autre obtenu par le procédé classique en tomographie dit de sommation des images. Les photos 3, 4, 5 et 6 donnent des exemples de reconstruction obtenus avec les deux algorithmes pour différentes largeurs de bande du signal acoustique incident.



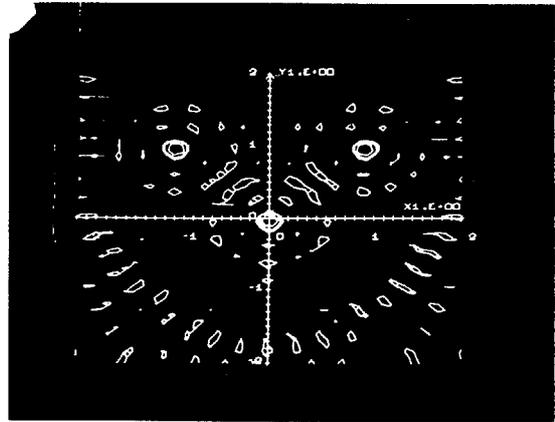
$0 < f < 300 \text{ KHz}$
Photo 3. méthode directe



$0 < f < 300 \text{ KHz}$
Photo 4. Sommation des images



$f_1 = 100 \text{ KHz}$ $f_2 = 300 \text{ KHz}$
Photo 5. Sommation des images



$f_1 = 100 \text{ KHz}$ $f_2 = 300 \text{ KHz}$
Photo 6. méthode directe.

3) - Interprétations :

Les photos 3 et 4 donnent une représentation sous forme de courbes de niveau de la fonction $P(x, y)$ que l'on cherche à reconstruire. On a supposé dans ces deux exemples que le signal acoustique incident avait une bande passante comprise dans l'intervalle : $[0, 300 \text{ kHz}]$.

Comme indiqué précédemment, les photographies mettent en évidence, la présence de lobes secondaires parasites pour les valeurs r_m telles que :

$$r_m \leq \frac{NC}{2\pi f_m}$$

La photo n° 4 obtenue par l'algorithme de sommation des images montre un certain niveau de bruit dû à la présence d'une sorte de fond continu (voir Fig.3)

D'autre part, les pics qui correspondent aux points brillants sont beaucoup moins étroits que dans le cas de la photo n° 3 obtenue par un traitement, issu de la méthode directe.

Les photos 5 et 6 ont été obtenues dans le cas plus réaliste où la fréquence du signal incident varie entre les bornes $f_1 = 100 \text{ kHz}$ et $f_2 = 300 \text{ kHz}$.

On constate dans ces conditions que les deux algorithmes fournissent des images sensiblement identiques.

VI - CONCLUSION

La méthode que nous avons développée quoique appliquée à une cible constituée de points brillants est suffisamment générale pour s'adapter à d'autres configurations géométriques. Le principal intérêt est qu'elle permet de reconstruire correctement un obstacle sans faire appel à des systèmes complexes et sophistiqués d'émission-réception (systèmes focalisants, matrices de capteurs...). Nous avons exploité un avantage offert par l'acoustique par rapport aux



RECONSTRUCTION D'UNE CIBLE A PARTIR DE MESURES ACOUSTIQUES

ACOUSTICAL TARGET RECONSTRUCTION

systèmes optiques ou de tomographie qui consiste à travailler directement sur des signaux temporels et d'accéder ainsi à la notion de réponse impulsionnelle des cibles. Cette propriété nous a permis d'exploiter des algorithmes relativement rapides à mettre en oeuvre et ne nécessitant pas énormément de temps de calcul. Il faut souligner cependant que la méthode est sensible aux erreurs de mesure et au bruit, l'image étant d'autant meilleure que l'on dispose d'un grand nombre de projections.

- 7 R.N. BRACEWELL and A.C. RIDDLE, Inversion of fan-beam scans in radio astronomy, *The Astrophysics*, 5, vol. 150, pp 427-434, (1967).
- 8 D.J. DEROSIER and A.KLUG, Reconstruction of three-dimensional structures from electron micrographs, *Nature*, vol. 217, pp 130-134, (1968).

BIBLIOGRAPHIE

- 1 POUIT , Imagerie radar à grande bande passante, Colloque International sur le radar, Paris, 4-8 décembre 1978.
- 2 H. HARRISON BARRETT and William SWINDELL, Analog reconstruction methods for transaxial tomography, *Proc. I.E.E.E.*, vol. 65, n° 1, (1977).
- 3 J.P. SESSAREGO, Etude du problème inverse en acoustique. Reconstruction d'une cible à partir des réponses impulsionnelles observées suivant plusieurs directions, *Revue du CETHEDC*, 2ème trimestre 1980.
- 4 R.A. CROWTHER, D.J. DEROSIER and A. KLUG, The reconstruction of a three-dimensional structure from projections and its application to electron microscopy, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 317, pp 319-340, (1970).
- 5 P.F.C. GILBERT, The reconstruction of a three-dimensional structure from projections and its application to electron microscopy. II direct methods, *Proc. Roy. Soc. London, B*, Vol. 182, pp 89-102, (1972).
- 6 R.M. MERSEREAU, The digital reconstruction of multi-dimensional signals from their projections, *SC.D. Dissertation M.I.T., Dept. of Elec. Eng.*, (1973).