

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

ESTIMATION CLASSIQUE D'UNE MATRICE DE DENSITE SPECTRALE : VALEURS
PROPRES PARASITES ET MODIFICATION DE LA DIRECTION DES VECTEURS PROPRES.

Bernard LUMEAU et Henri CLERGEOT.

LABORATOIRE DES SIGNAUX ET SYSTEMES - C.N.R.S./E.S.E. - Plateau du Moulon - 91190 GIF SUR YVETTE.

RESUME

Dans les techniques de localisation spatiale à partir d'un réseau de capteurs, nous sommes conduits à estimer des matrices de densité spectrale. L'estimation de ses termes s'interprète comme un moyennage en fréquence des composantes de la D.F.T. Nous envisageons dans le cas le plus simple, c'est à dire lorsque le signal de sortie peut-être obtenu par filtrage linéaire et stationnaire d'un signal d'entrée tronqué en temps, l'effet du biais et de la variance.

D'une part, nous montrons que le biais d'estimation est lié au moyennage en fréquence, à la procédure d'échantillonnage et qu'ainsi il accroît artificiellement le rang de la matrice interspectrale, donc qu'il modifie la dimension du sous-espace source.

D'autre part, nous montrons qu'à l'intérieur du sous-espace source, dans le cas limite d'une variance faible, le module des valeurs propres est altéré et que l'incertitude sur la direction des vecteurs propres s'exprime de façon simple à partir de la forme diagonale de la matrice interspectrale.

SUMMARY

In spatial localization techniques from sensors array we have to estimate the spectral matrix. The estimation of its terms may be interpreted as a frequency averaged on the D.F.T. components. In the simplest case, i.e. the relation between the output signal and the time truncated input signal may be represented by a stationary linear filter, we consider the effect of the bias and the one of the variance.

First we show that the estimation bias depends on the frequency average and the sampling procedure; this increases artificially the rank of the spectral matrix and thus, changes the dimension of the source subspace.

We show also that inside the source subspace and in the limited case of a small variance, the modulus of the eigenvalues and the uncertainty on the eigenvectors direction has a very simple expression in term of the eigenvalues.



1. INTRODUCTION

1.1. Généralités.

D'importants progrès ont été faits récemment dans le traitement d'antennes, particulièrement dans le domaine de la détection optimale et (ou) adaptative (voir les références de [1]), mais beaucoup moins dans le domaine de l'imagerie. Dans ce domaine le principal travail concerne le perfectionnement de la directivité des antennes, permettant des modèles plus simples dans le cas de propagation par ondes planes [2] et pouvant inclure les effets du bruit [3-5]. Très peu de publications concernent les problèmes de localisation spatiale en termes d'identification de filtres linéaires liés aux paramètres d'espace [6]. Dans le cas général nous devons noter que ces filtres ne peuvent pas être définis sur des temps trop longs, que le nombre de sources est une inconnue, et que les paramètres de bruit doivent être ajoutés au modèle de propagation du milieu.

Nous utilisons, dans ce travail, une approche de localisation spatiale, déjà introduite par Mermoz [7] dans le contexte de l'imagerie, tirant avantage de la décorrélation entre les signaux source à identifier. Le but est d'obtenir, d'après la matrice d'intercorrélation formée à partir de la sortie de K capteurs, le maximum d'information avant d'utiliser explicitement un modèle de propagation. Quelques applications fructueuses ont déjà été obtenues dans le domaine de la géophysique [8, 9], des sonars passifs [10] et de l'électroencéphalographie [11].

1.2. Idées directrices.

Les sorties, au temps t , de K capteurs peuvent être considérées comme un vecteur de dimension K dans le domaine temps. De la même façon la transformée de Fourier de ces signaux, pour une fréquence donnée f , nous donne un vecteur de dimension K .

Il apparaît que, s'il y a $r < K$ sources indépendantes et pas de bruit additif sur le vecteur observation, ce vecteur dans le domaine fréquence peut être ramené dans un sous-espace de dimension r qui est appelé le sous-espace source. Dans le cas stationnaire c'est le noyau de la matrice interspectrale.

Nous nous sommes principalement intéressés à quelques aspects de la caractérisation de ce sous-espace pour des signaux discrets observés pendant une durée limitée T .

1.2.1. Conditions d'application.

Mermoz [7] a obtenu des résultats mathématiques rigoureux en se plaçant dans un cadre idéal : signaux stationnaires, filtres linéaires et stationnaires pour les fonctions de transfert entre les sources et les capteurs, temps d'observation infini. Nous donnons des approximations qui sont valables pour des filtres quasi stationnaires, un temps d'observation long par rapport à la durée de la réponse du filtre t_f , mais inférieur au temps de quasistationnarité. La stationnarité du signal est introduite seulement pour modéliser plus simplement quelques propriétés principales des sources.

1.2.2. Précision de la caractérisation du sous-espace source.

La précision de l'estimation de la matrice interspectrale est habituellement vue sous l'aspect variance seulement [12, 13].

Nous démontrons en fait que la procédure d'estimation introduit une modification du sous-espace source (introduction de valeurs propres parasites non nulles)

liée au biais seulement. Dans la détermination du biais nous avons considéré l'effet de la troncature, de l'échantillonnage et de la fenêtre de pondération. Par contre, la variance de la matrice interspectrale estimée n'a aucun effet sur la dimension du sous-espace source. Elle est interprétée non seulement en terme de variance du module des valeurs propres [12], mais aussi en terme de variance de la direction des vecteurs propres à l'intérieur du sous-espace source.

2. VECTEURS SOURCE, SOUS-ESPACE ET MATRICE INTERSPECTRALE ASSOCIEE A DES SIGNAUX TRONQUES EN TEMPS.

2.1. Approximation appropriée aux signaux observés pendant une durée finie.

Nous pouvons noter que toutes les expressions dans ce paragraphe sont exactes pour des signaux aléatoires, périodiques, de période T , les composantes de Fourier étant des variables aléatoires indépendantes. Cela devient une bonne approximation tant que les fonctions de transfert entre sources et capteurs peuvent être considérées comme linéaires et stationnaires sur le temps T et que l'horizon t_f du filtre est faible par rapport à T [15].

Avec de telles hypothèses, si nous considérons la relation entre les signaux sources $\{u_i(m)\}$ (transformées de Fourier discrètes ($m = ft$) des signaux continus tronqués (troncature T) relatifs à la source i) et les signaux de sortie non bruités sur les capteurs $\{y_j^i(m)\}$ (transformées de Fourier discrètes des signaux de sortie non bruités reçus sur le capteur j et provenant de la source i), il vient :

$$y_j^i(m) = u_i(m) G_{ij}^i(m), \quad (1)$$

où $G_{ij}^i(m)$ caractérise la fonction de transfert entre la source i et le capteur j .

En présence de r sources indépendantes cette expression peut se mettre sous la forme :

$$\underline{Y}(m) = \sum_{i=1}^r \underline{Y}_i(m) = \sum_{i=1}^r u_i(m) \underline{G}_i(m), \quad \underline{G}_i(m) = \begin{pmatrix} G_{i1}^i(m) \\ G_{i2}^i(m) \\ \vdots \\ G_{iK}^i(m) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Le vecteur $\underline{Y}(m)$ défini par (2) appartient au sous-espace engendré par les vecteurs $\{\underline{G}_i(m)\}$. Si les vecteurs $\{\underline{G}_i(m)\}$ sont linéairement indépendants, la dimension de ce sous-espace est r .

Ainsi, pour un ensemble arbitraire de signaux sources $\{u_i(m)\}$, le vecteur $\underline{Y}(m)$ peut prendre une position quelconque dans le sous-espace source, c'est à dire le sous-espace engendré par les r vecteurs $\{\underline{G}_i(m)\}$. Le premier but de la localisation spatiale est de déterminer ce sous-espace source.

2.2. Matrice spectrale et vecteur source.

Dans toute la suite nous supposons que les signaux sources sont des fonctions aléatoires stationnaires, avec un temps de corrélation t_c court par rapport au temps d'observation $T(T=N\tau, \tau$: période d'échantillonnage). Dans ces conditions nous pouvons montrer [15] que les $\{u_i(m)\}$ sont des variables aléatoires complexes circulaires non corrélées :

ESTIMATION CLASSIQUE D'UNE MATRICE DE DENSITE SPECTRALE : VALEURS PROPRES PARASITES ET MODIFICATION DE LA DIRECTION DES VECTEURS PROPRES.

$$\begin{cases} E|u_i(m)|^2 = N \gamma_{u_i}(m), \\ E[u_i(m) u_i^*(m')] = 0 \text{ si } m \neq m', \\ E[u_i(m) u_i(m')] = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Ainsi, d'après l'hypothèse d'indépendance des signaux émis par les sources, la matrice interspectrale est liée à la matrice d'intercorrélation des $\underline{Y}(m)$ par la relation :

$$[\gamma_y(m)] \stackrel{\Delta}{=} \sum_i \gamma_{u_i}(m) \underline{G}_i(m) \underline{G}_i^{\dagger}(m) = \frac{1}{N} E[\underline{Y}(m) \underline{Y}^{\dagger}(m)]. \quad (4)$$

Etant dans le cas stochastique, le terme *vecteur source* sera réservé au vecteur $\underline{W}_i(m)$ colinéaire au vecteur aléatoire $\underline{G}_i(m)$ introduit en (2), mais normé par la condition.

$$|\underline{W}_i(m)|^2 = \frac{1}{N} E[|\underline{Y}_i(m)|^2], \quad (5)$$

soit :

$$\underline{W}_i(m) = \sqrt{\gamma_{u_i}(m)} \underline{G}_i(m). \quad (6)$$

Ainsi, le vecteur aléatoire $\underline{Y}_i(m)$ peut s'écrire :

$$\underline{Y}_i(m) = \sqrt{N} \epsilon_i(m) \underline{W}_i(m) \quad (7)$$

où $\epsilon_i(m)$ est une variable aléatoire de variance unité.

D'après (4) et (6) la matrice interspectrale peut s'exprimer comme une somme de matrices de rang 1, chacune d'elles étant associée à un vecteur source $\underline{W}_i(m)$:

$$[\gamma_y(m)] = \sum_i \underline{W}_i(m) \underline{W}_i^{\dagger}(m). \quad (8)$$

2.3. Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice interspectrale.

Dans l'espace de dimension K défini par les sorties des capteurs, la puissance moyenne du vecteur $\underline{Y}(m)$ dans la direction du vecteur unitaire \underline{e} (de cet espace) est définie par $E[|\underline{e}^{\dagger} \underline{Y}(m)|^2]$. Ce qui, d'après (4), conduit à :

$$E[|\underline{e}^{\dagger} \underline{Y}(m)|^2] = N \underline{e}^{\dagger} [\gamma_y(m)] \underline{e}. \quad (9)$$

Cette expression nous montre que, dans l'espace des capteurs, la matrice interspectrale caractérise la répartition de la puissance moyenne du signal dans l'ensemble des directions $\{\underline{e}\}$. Cette répartition est ellipsoïdale, les axes de cet ellipsoïde étant les vecteurs propres de la matrice (normalisés aux valeurs propres associées). Cette interprétation et les relations (6) et (8) justifient la recherche de la forme diagonale de cette matrice.

Il faut noter que la matrice interspectrale donne une information globale sur le sous-espace source. C'est seulement dans le cas particulier où le rang de la matrice est égal à 1 que la connaissance du sous-espace source donne la direction du vecteur source. Dans les autres cas il est nécessaire de faire des hypothèses additionnelles sur le milieu [7].

3. BIAIS DE L'ESTIMATION.

3.1. Effet du moyennage lors de l'estimation pratique.

Si théoriquement la matrice interspectrale est définie par (4), en pratique cette matrice est bien souvent estimée par un moyennage en fréquence :

$$[\hat{\gamma}_y(m)] = \frac{1}{N} \sum_{m'} [\underline{Y}(m-m') \underline{Y}^{\dagger}(m-m')] F_{m'}, \quad (10)$$

où les $\{F_{m'}\}$ sont tels que :

$$\begin{cases} \sum_{m'} F_{m'} = 1, \\ \sum_{m'} F_{m'}^2 = \frac{1}{L_e}, \end{cases} \quad (11)$$

L_e désignant la largeur équivalente de la fenêtre. A noter que dans le cas d'une fenêtre rectangulaire L_e correspond au nombre L de composantes sur lesquelles on moyenne.

Nous devons remarquer que si le moyennage porte sur L composantes, le rang de la matrice estimée ne peut pas être plus grand que L. En conséquence, pour être sûr de ne pas limiter artificiellement le rang, le nombre L doit être au moins égal au nombre de capteurs K.

L'espérance mathématique de l'estimée est donnée par :

$$E[\hat{\gamma}_y(m)] = \sum_{m'} [\gamma_y(m-m')] F_{m'}. \quad (12)$$

Cette relation peut-être interprétée comme la convolution discrète entre la matrice $[\gamma_y(m)]$ et la fenêtre de pondération $F_{m'}$. Ainsi, le biais résulte de l'effet classique de lissage des variations en fréquence de la matrice $[\gamma_y(m)]$. Il est d'autant plus important que la fenêtre de pondération est plus large.

En fait, l'effet le plus fâcheux de ce moyennage est la modification apparente du sous-espace source. En effet, si dans la relation (12) nous exprimons la matrice $[\gamma_y(m-m')]$ comme fonction des vecteurs source :

$$E[\hat{\gamma}_y(m)] = \sum_{m', i} [\underline{W}_i(m-m') \underline{W}_i^{\dagger}(m-m')] F_{m'}, \quad (13)$$

nous constatons que, dans le moyennage sur m' , le rang de cette matrice ne reste égal à r que si la direction des vecteur $\{\underline{W}_i(m-m')\}$ demeure inchangée. En fait, cette hypothèse n'a aucune raison d'être remplie pour T fini. Par conséquent, le rang maximum K peut-être atteint et (K-r) valeurs propres parasites peuvent être générées par ce moyennage.

Afin de préciser cet effet nous allons nous placer dans le cas d'une source unique et rechercher l'influence de la première valeur propre parasite. Pour ce faire nous allons faire un développement au second ordre du vecteur source associé $\underline{W}(m-m')$ au voisinage de m :

$$\underline{W}(m-m') = \underline{W}(m) + m' \underline{u}_1 + m'^2 \underline{u}_2. \quad (14)$$

Ce développement peut encore s'écrire :

$$\underline{W}(m-m') = (1+\alpha m') \underline{W}(m) + \beta m' \underline{v}_1 + \gamma m'^2 \underline{v}_2, \quad (15)$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} \underline{W}(m) \cdot \underline{v}_1 = 0, \\ \underline{v}_1^{\dagger} \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_2^{\dagger} \cdot \underline{v}_2 = 1. \end{cases} \quad (16)$$

Dans ces conditions, en calculant l'espérance mathématique de l'estimée $[\hat{\gamma}_y(m)]$ et en recherchant les valeurs et vecteurs propres de $E[\hat{\gamma}_y(m)]$ nous obtenons :



ESTIMATION CLASSIQUE D'UNE MATRICE DE DENSITE SPECTRALE : VALEURS PROPRES PARASITES ET MODIFICATION DE LA DIRECTION DES VECTEURS PROPRES.

- pour les valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1(m) = \underline{W}^\dagger(m) \cdot \underline{W}(m) = \lambda_0(m) , \\ \lambda_2(m) = |\beta|^2 \mu^2 , \mu^2 = \sum_m F_{m'} m'^2 , \end{cases} \quad (17)$$

- pour les vecteurs propres :

$$\begin{cases} \underline{P}_1(m) = \underline{W}(m) , \\ \underline{P}_2(m) = \underline{V}_1 + \delta \underline{W}(m) . \end{cases} \quad (18)$$

En pratique le paramètre le plus important est le rapport de cette valeur propre parasite à la valeur propre non biaisée :

$$\epsilon^2(m) = \frac{|\beta|^2 \mu^2}{\underline{W}^\dagger(m) \cdot \underline{W}(m)} . \quad (19)$$

Cette quantité a une interprétation géométrique très simple (voir Fig. 1), au second ordre :

$$\epsilon^2(m) = \phi^2(m) \mu^2 , \quad (20)$$

où $\phi(m)$ est l'angle entre $\underline{W}(m-1)$ et $\underline{W}(m)$.

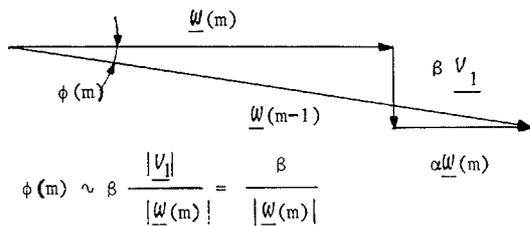


Fig. 1 : Interprétation géométrique du rapport de la 1ère valeur propre parasite à valeur propre non biaisée.

Une illustration de ces résultats est donnée dans les figures 2 et 3. Dans ces exemples nous avons considéré la sortie de 2 capteurs et une source, la deuxième fonction de transfert étant une constante: $G_1^2(m)=R$ (ici $R=1$).

La figure 2 montre l'effet important d'un retard pur θ ($\theta = \tau p$ et $p=9$) entre 2 signaux de durée T ($T=N\tau$ et $N = 1024$), la fonction de transfert entre la source (signal à bande étroite caractérisé par la réponse du filtre, de fréquence centrale ν_0 ($\nu_0 = 0,059$) et de largeur de bande B_0 ($B_0\tau = 0,0344$), à un bruit blanc de puissance spectrale 1) et le premier capteur étant donnée par : $G_1^1(m) = e^{-\frac{2\pi j m}{N}} p$. En effet, si nous désignons par T_w ($T_w = \frac{N\tau}{L}$) la largeur équivalente de la fenêtre nous montrons que :

$$\epsilon^2(m) \sim \frac{\pi^2}{3} \frac{\theta^2}{T_w^2} \frac{1}{(R + \frac{1}{R})^2} = c^{te} . \quad (21)$$

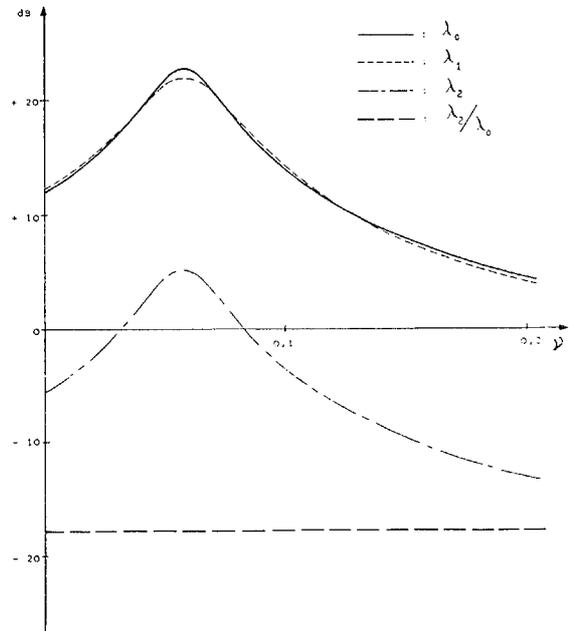


Fig. 2 : Valeurs propres dans le cas d'un retard pur et d'un signal à bande étroite.

Ce résultat est en accord avec la relation (20) : l'erreur ne dépend pas du spectre de la source. Par contre, elle dépend du rapport des gains entre les voies et peut prendre des valeurs non négligeables suivant les valeurs données à θ , T_w et R .

La figure 3 illustre l'effet d'un filtrage bande étroite sur une voie : $G_1^1(m) = \frac{1}{1 - re^{-\frac{2\pi j}{N} (m-m_0)}}$

($B_0\tau = \frac{1-r}{\pi r} = 0,0344$ et $\nu_0 = \frac{m_0}{N} = 0,059$), le signal d'entrée étant un bruit blanc de densité spectrale 1. La valeur maximale du rapport $\epsilon^2(m)$ est obtenue pour la fréquence centrale; en désignant par $B_w = \frac{L}{T}$ la largeur de la fenêtre fréquence et R_0 le rapport des modules des gains à la fréquence centrale, nous obtenons :

$$\epsilon_{\max}^2 \sim \frac{1}{3} \frac{B_w^2}{B_0^2} \frac{1}{(R_0 + \frac{1}{R_0})^2} . \quad (22)$$

Ce résultat est analogue à celui que traduit la relation (21) et il est assujéti aux mêmes remarques.



ESTIMATION CLASSIQUE D'UNE MATRICE DE DENSITE SPECTRALE : VALEURS PROPRES PARASITES ET MODIFICATION DE LA DIRECTION DES VECTEURS PROPRES.

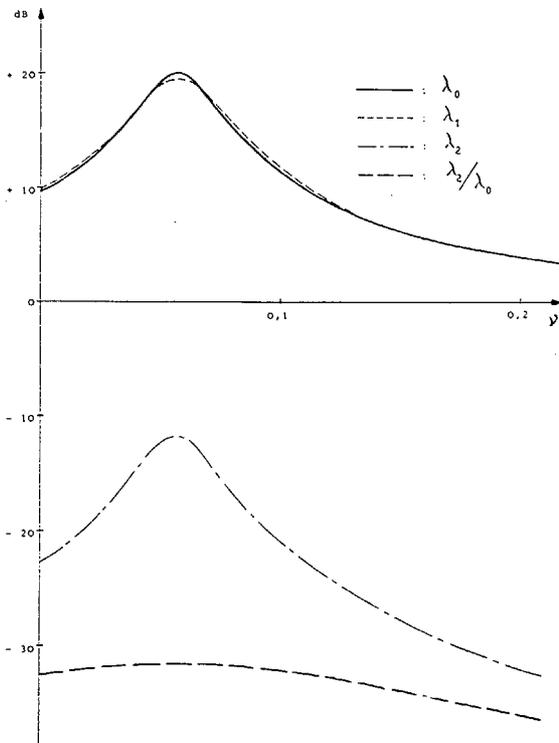


Fig. 3 : Valeurs propres dans le cas d'un filtrage à bande étroite et d'un bruit blanc en entrée.

3.2. Effet de l'échantillonnage.

Habituellement les signaux discrets $\{y_i(n\tau)\}$ sont obtenus par échantillonnage des signaux continus $\{y_i(t)\}$. A moins que ces signaux soient strictement à bande limitée, le fait qu'il existe une relation de filtrage linéaire entre $u_i(t)$ et $y_i(t)$ n'implique pas la même relation entre $u_i(n\tau)$ et $y_i(n\tau)$. Il n'y a pas de relation déterministe exacte qui permette, pour $t = n\tau$, d'écrire $y_i(n\tau)$ en fonction seulement de $u_i(n\tau)$. Mais nous pouvons toujours démontrer que la matrice d'intercorrélation de signaux échantillonnés est égale à la matrice d'intercorrélation des signaux continus correspondants pour $t = n\tau$. Aussi dans le cas scalaire, la matrice interspectrale de signaux échantillonnés peut se déduire de la matrice interspectrale des signaux continus correspondants par repliement du spectre le long de l'axe des fréquences. En dénotant par $[S(v)]$ la matrice interspectrale, la matrice obtenue par repliement s'écrit :

$$[S_F(v)] = \sum_p [S(v-p)] , \quad (23)$$

où $[S(v)]$ nous est donnée en fonction des vecteurs source $\{W_i(v)\}$ par :

$$[S(v)] = \sum_{i=1}^r W_i(v) \cdot W_i^\dagger(v) . \quad (24)$$

Ainsi, chaque terme de la somme (23) apporte r sources apparentes additionnelles soit $(p-1)r$ "sources parasites". Comme dans le cas du moyennage en fréquence le rang de $[S_F(v)]$ sera plus grand que r en général.

Afin de préciser cet effet, plaçons nous dans le cas d'une source unique et supposons que $[S(v)]$ soit

une fonction décroissante de v pour $v > 1/2$ avec une coupure assez rapide. Dans ces conditions les relations (23) et (24) nous donnent :

$$[S_F(v)] \neq W(v) \cdot W^\dagger(v) + W(v-1) \cdot W^\dagger(v-1) + W(v+1) \cdot W^\dagger(v+1) . \quad (25)$$

Si les termes additionnels dus au repliement sont petits, nous nous attendons à ce que $[S_F(v)]$ ait une valeur propre principale avec son vecteur propre près de $W(v)$ et deux valeurs propres parasites. Dans l'espace à 3 dimensions engendré par $W(v)$, $W(v-1)$ et $W(v+1)$, ces vecteurs peuvent être décomposés sur $W(v)$ et un plan orthogonal :

$$\begin{aligned} W(v-1) &= \alpha_1 W(v) + \beta_1 V_1, & V_1^\dagger \cdot V_1 &= 1, & V_1^\dagger \cdot W(v) &= 0, \\ W(v+1) &= \alpha_2 W(v) + \beta_2 V_2, & V_2^\dagger \cdot V_2 &= 1, & V_2^\dagger \cdot W(v) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Un vecteur propre additionnel peut s'écrire :

$$P(v) = U + \delta W(v), \quad W^\dagger(v) \cdot U = 0. \quad (27)$$

Dans ces conditions, nous montrons d'après (26) et (27) que $P(v)$ est un vecteur propre de $[S_F(v)]$ si U est un vecteur propre de la matrice $|\beta_1|^2 V_1 \cdot V_1^\dagger + |\beta_2|^2 V_2 \cdot V_2^\dagger$, avec la même valeur propre. Ces valeurs propres sont toujours inférieures à $|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2$.

Ainsi, dans le cas le plus défavorable, une borne supérieure du rapport entre une valeur propre parasite et la valeur propre non biaisée nous est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_F^2(v) &= \frac{|W(v-1)|^2 + |W(v+1)|^2}{|W(v)|^2}, & |W(v-1)|^2 &\leq |\beta_1|^2 \\ & & |W(v+1)|^2 &\leq |\beta_2|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Une illustration de cet effet est donnée dans le cas d'une source (bruit blanc de densité spectrale 1) et de 2 capteurs. Une voie est un filtre présentant un

seul pôle: $G_1^1(v)$ ($G_1^1(v) = \frac{G}{1+2j \frac{v-v_0}{B_0}}$, $G=10$, $v_0=0,117$ et

$B_0 = 0,0344$), et l'autre voie un passe bas idéal coupant à la fréquence $1/2$.

La recherche des 2 premières valeurs propres ($\lambda_1(v)$, $\lambda_2(v)$) conduit aux résultats de la figure 4 ($\lambda_0(v)$ étant la valeur propre théorique). Cet exemple montre que même pour des fréquences basses le repliement entraîne des valeurs élevées de $\lambda_2(v)/\lambda_0(v)$ ou de sa borne supérieure $\epsilon_F^2(v)$ et que l'utilisation d'un filtre passe bas avec une forte atténuation en dehors de la bande, avant échantillonnage, est impérative si l'on veut diminuer les risques d'erreur dans l'interprétation des résultats.

.../...

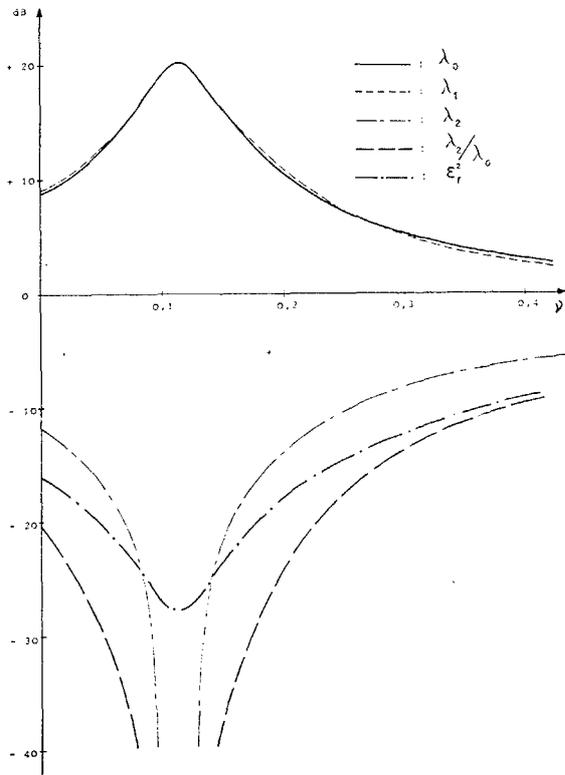


Fig. 4 : Valeurs propres montrant l'effet du repliement sur un signal à bande étroite (sans filtrage passe bas avant échantillonnage).

4. VARIANCE DE L'ESTIMATION.

Le signal aléatoire $\underline{Y}(m)$ se décompose dans la base des vecteurs propres $\{\underline{P}_i(m)\}$ (normalisés à 1) de $[\underline{Y}_y(m)]$, ses composantes étant des variables aléatoires non corrélées de variance λ_i . Cette décomposition s'écrit :

$$\underline{Y}(m) = \sqrt{N} \sum_{i=1}^r \eta_i(m) \sqrt{\lambda_i(m)} \underline{P}_i(m), \quad (29)$$

où les $\{\eta_i(m)\}$ sont des variables aléatoires non corrélées de variance unité.

Dans le paragraphe précédent nous avons pris en compte l'effet sur le biais de la non homogénéité des $\{\omega_i(m)\}$ lors du moyennage sur m . Ici nous nous concentrons sur l'effet de la variance et nous supposons que les $\{\omega_i(m)\}$ demeurent inchangés pour les valeurs de m concernées. Dans ces conditions, d'après (10) et (29), et en utilisant une notation simplifiée, nous pouvons écrire l'estimée de $[\underline{Y}_y(m)]$ sous la forme :

$$[\hat{\underline{Y}}_y] = \frac{1}{N} \sum_m [\underline{Y}(m) \cdot \underline{Y}^\dagger(m)] F_m = \sum_{i,j=1}^r \overline{\eta_i \eta_j^*} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \underline{P}_i \cdot \underline{P}_j, \quad (30)$$

où

$$\begin{cases} \overline{\eta_i \eta_j^*} = \sum_m [\eta_i(m) \eta_j^*(m)] F_m, \\ E[\eta_i \eta_j^*] = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker}). \end{cases} \quad (31)$$

Sous la forme donnée par la relation (30) la matrice $[\hat{\underline{Y}}_y]$ peut se décomposer en la somme de 3 termes :

$$[\hat{\underline{Y}}_y] = [\underline{Y}_y] + [A] + [B], \quad (32)$$

où

$$\begin{cases} [A] = \sum_i \mu_{ii} \lambda_i \underline{P}_i \cdot \underline{P}_i^\dagger, \\ [B] = \sum_{i \neq j} \mu_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \underline{P}_i \cdot \underline{P}_j^\dagger, \end{cases} \quad (33)$$

et

$$\mu_{ij} = \overline{\eta_i \eta_j^*} - \delta_{ij} \quad (34)$$

avec

$$E[|\mu_{ij}|^2] = \sum_m F_m^2 = \frac{1}{L_e}. \quad (35)$$

Ainsi, d'une part pour la matrice $\{[\underline{Y}_y] + [A]\}$, nous avons :

$$[\underline{Y}_y] + [A] = \sum_i (1 + \mu_{ii}) \lambda_i \underline{P}_i \cdot \underline{P}_i^\dagger. \quad (36)$$

Cette matrice a pour vecteurs propres $\{\underline{P}_i\}$ et pour valeurs propres $\{(1 + \mu_{ii})\lambda_i\}$. La variance de celles-ci est donnée, d'après (35), par :

$$E[\delta \lambda_i^2] = \lambda_i^2 E[\mu_{ii}^2] = \frac{\lambda_i^2}{L_e}. \quad (37)$$

Ce résultat est très similaire à ceux obtenus pour des signaux continus [12], et il nous montre que la variance normalisée est inversement proportionnelle à la largeur de la fenêtre.

Et, d'autre part pour la matrice $\{[\underline{Y}_y] + [B]\}$, en recherchant, au 1er ordre sur les termes de variance, le vecteur propre $[\underline{P}_i + \delta \underline{P}_i]$ de cette matrice associé au vecteur propre \underline{P}_i de $[\underline{Y}_y]$, nous avons :

$$\{[\underline{Y}_y] + [B]\} [\underline{P}_i + \delta \underline{P}_i] = \lambda_i' [\underline{P}_i + \delta \underline{P}_i]. \quad (38)$$

Il est alors possible de montrer que la solution à cette équation nous est donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_i' = \lambda_i, \\ \delta \underline{P}_i = - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \underline{P}_j = - \sum_{j \neq i} \delta \underline{P}_{ij} \end{cases} \quad (39)$$

où

$$\alpha_{ij} = \frac{\mu_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j}}{\lambda_j - \lambda_i}. \quad (40)$$

Par suite, la variation du vecteur \underline{P}_i dans le plan $[\underline{P}_i, \underline{P}_j]$ est donnée par $\delta \underline{P}_i = \alpha_{ij} \underline{P}_j$. Comme le vecteur \underline{P}_j est unitaire, α_{ij} peut être directement interprété comme l'angle de rotation du vecteur \underline{P}_i dans le plan $[\underline{P}_i, \underline{P}_j]$. La variance sur la position du vecteur \underline{P}_i peut donc être caractérisée par :

$$E[|\alpha_{ij}|^2] = \frac{1}{L_e} \frac{\lambda_i \lambda_j}{(\lambda_i - \lambda_j)^2}. \quad (41)$$

Cette expression montre que plus les valeurs propres sont proches, plus grande est l'indétermination sur la direction des vecteurs propres.

Nous devons noter que les fluctuations des vecteurs propres se font à l'intérieur du sous-espace source qui reste invariant dans son ensemble. L'augmentation du nombre de valeurs propres non nulles est un effet de biais et non de variance.



ESTIMATION CLASSIQUE D'UNE MATRICE DE DENSITE SPECTRALE : VALEURS
PROPRES PARASITES ET MODIFICATION DE LA DIRECTION DES VECTEURS PROPRES.

5. CONCLUSIONS.

La contribution de ce travail dans le domaine de l'analyse spectrale multidimensionnelle appliquée à la localisation spatiale est double.

D'une part, nous remarquons que les valeurs propres non nulles sont liées au biais de la procédure d'estimation. Nous montrons, sur quelques situations pratiques, que le biais introduit une limitation significative à la dynamique effective de la méthode permettant de déterminer la dimension du sous-espace source, et qu'il est impératif d'effectuer un très bon filtrage passe-bas avant échantillonnage.

D'autre part, la relation (41) fournissant l'indétermination angulaire sur les vecteurs propres trouve une application directe en localisation spatiale lorsque une valeur propre est dominante. En effet, du fait du lien qu'il existe dans ce cas entre le vecteur propre et le vecteur source, l'erreur sur la direction de ce dernier peut-être connue. Il faut enfin souligner que, dans le but d'aboutir à une localisation spatiale, la variance des valeurs propres présente beaucoup moins d'intérêt que la variance angulaire des vecteurs propres qui fournit un degré de confiance sur la direction des vecteurs sources.

REFERENCES

- [1] J. MUNIER, "Traitement d'antenne et imagerie", Colloque national sur le traitement du signal et ses applications, Nice, France, 16-21 Juin, 1975, pp. 69/1 - 69/11.
- [2] G.C. TEMES and al., "The Optimization of Band limited Systems", Proceedings IEEE, Vol. 61, N° 2, February 1973, pp. 196-234.
- [3] Y. BIRAUD, "A New Approach for Increasing the Resolving Power by Data Processing", Astronomy and Astrophysics, Vol. 1, N°1, January 1969, pp.124-127.
- [4] B.R. FRIEDEN, "Restoring with Maximum Likelihood and Maximum Entropy", Journal of the optical society of america, Vol. 62, N° 4, April 1972, pp. 511-518.
- [5] A.C. SCHELL, "Enhancing the Angular Resolution of Incoherent Sources", The radio and Electronic Engineer, Vol. 29, N° 1, January 1965, pp.21-26.
- [6] A.A. KSIENSKI and R.B. MCGHEE, "Radar Signal Processing for Angular Resolution beyond the Rayleigh Limit", The Radio and Electronic Engineer, Vol.34 N° 3, September 1967, pp. 161-174.
- [7] H. MERMOZ, "Imagerie, corrélations et modèles", Annales des Télécommunications, Vol. 31, N° 1-2, Janvier-Février 1976, pp. 17-36.
- [8] F. GLANCEAUD et al., "Identification d'ondes UBF dans la magnétosphère en utilisant la matrice interspectrale", Annales des Télécommunications, Vol. 34, N° 3-4, Mars-Avril 1979, pp.243-248.
- [9] J.L. LACOUME et al., "Caractérisation par analyse interspectrale du champ d'ondes reçu sur un réseau de capteurs. Applications", Colloque national sur le traitement du signal et ses applications, Nice, France, 28 Mai- 2 Juin 1979, pp. 80/1-80/7.
- [10] R. KLEMM, "Use of generalized resolution methods to locate sources in random dispersive media", IEEE Proceedings, Vol. 127, Pt. F, N° 1, February 1980.
- [11] B. LUMEAU, "Identification de sources d'activités cérébrales", Thèse de Docteur-Ingénieur, Orsay, 1980.
- [12] C. TURCAT, "Problèmes liés à l'estimation d'une matrice de densité spectrale", Colloque national sur le traitement du signal et ses applications, Nice, France, 26-30 Avril 1977, pp. 16/1-16/6.
- [13] A. KNOB et J.L. LACOUME, "Etude de la précision de l'estimation de la densité spectrale de puissance croisée, obtenue par transformation de Fourier de la fonction de corrélation", Annales des télécommunications, Vol. 32, N° 7-8, Juillet-Août 1977, pp. 248-256.
- [14] A. PAPOULIS, "Probability, Random Variables, and Stochastics Processes", Mc Graw-Hill, Tokyo, 1965, pp. 368-369 and 453-456.
- [15] H. CLERGEOT, "Choix entre les différentes méthodes quadratiques d'estimation du spectre de puissance", Annales des télécommunications, soumis pour publication.

