

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

QUANTIFICATION ALEATOIRE OPTIMALE

J.P. TRESSIERES, F. CASTANIE

GAPSE, Institut National Polytechnique, 2, rue Ch. Camichel, 31071 Toulouse Cedex

RESUME

La présente communication est consacrée au problème de la quantification optimale lorsque le quantificateur possède des seuils aléatoires (quantification aléatoire).

Dans une courte introduction, on rappelle les définitions de la distorsion apportée par la quantification et de la Quantification Aléatoire (Q.A.). Le problème d'optimisation, i.e. de choisir les paramètres du Q.A. minimisant une distorsion est posée, pour un Q.A. dont le transfert moyen correspond à un opérateur linéaire avec saturation.

La 2^{ème} partie donne l'expression théorique de la distorsion lorsque la loi de l'entrée est connue ainsi que le nombre de niveaux.

Dans la 3^{ème} partie, on applique cette expression à 2 lois d'usage général (Gaussienne, Laplacienne ^{1^{ère}} espèce) ; l'algorithme de recherche d'optimum utilisé est brièvement décrit. Quelques résultats numériques significatifs sont donnés.

La simulation effectuée dans la 4^{ème} partie montre le parfait accord entre l'approche théorique et l'expérimentation.

SUMMARY

This communication deals with the problem of optimal quantization when the quantizer is given random transition points (Random Quantization).

The introduction gives a brief review of quantization distortion definitions and Random Quantization principle (RQ). The optimisation problem is stated : choose the parameters of the RQ in order to minimize the distortion, when the Mean Transfer Curve of the RQ is a linear clipper characteristic.

The theoretical expression of the distortion is derived in the second section, when the input law and the output level number are known quantities.

This expression is applied to two widely-used particular cases in the third section : Laplace and Laplace-Gauss laws. A brief description of the optimisation algorithm is given, together with relevant numerical results.

In the 4th section, a simulation shows the perfect agreement between the proposed theoretical approach and the experiments.



1 - INTRODUCTION

Le problème de quantification des signaux est étudié dans la plupart de ses aspects depuis l'introduction du traitement digital du signal, et surtout des télé-transmissions par "impulsions codées".

Très tôt s'est posé le problème d'étudier, à complexité du quantificateur donné, l'existence d'un schéma de quantification qui minimise à divers sens l'erreur introduite par cette opération. On a ainsi introduit diverses définitions de distance entre une variable aléatoire X et sa version quantifiée X_Q , dont ont découlées des définitions de distorsions.

Si l'on appelle $\{x_i\}$ l'ensemble des seuils et $\{y_i\}$ l'ensemble des niveaux de sorties, ils définissent une méthode de quantification par

$$X_Q = y_i \quad \text{qd } x_i \leq X < x_{i+1} \quad (1)$$

Si l'on définit une distance $\rho(\cdot, \cdot)$ entre X et X_Q , la distorsion D est en général définie par la valeur moyenne $E(\rho(X, X_Q)) = D$ (2)

Si X est une variable aléatoire de la densité $p(x)$, pour un quantificateur à n niveaux de sortie

$$\{y_i\}_{i=1, \dots, n}$$

cette distance s'écrit :

$$D = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x, y_i) \cdot p(x) dx \quad (3)$$

Si on accepte pour valide une mesure de distorsion associée à une distance $\rho(\cdot, \cdot)$, le problème d'optimisation se résumera à :

Etant donné un nombre n de niveaux de sortie fixé, et une loi d'entrée connue $p(x)$, trouver l'ensemble des $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ qui minimisent la distorsion.

Soit, sous des conditions de régularité

$$\frac{\partial D}{\partial x_i} = \frac{\partial D}{\partial y_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (4)$$

et la matrice formée des dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 D}{\partial p_i \partial p_j}$$

(où p_k représente un x_i ou un y_j), soit définie positive.

Ces conditions d'optimisation ont été exprimées par J. MAX [1] qui les a appliquées à l'optimisation, au sens de l'erreur quadratique moyenne minimale, des quantificateurs pour une densité de probabilité d'entrée gaussienne : $\rho(x, y) = (x-y)^2$. J.C. DEMARET [2] a choisi d'autre part la mesure de distorsion en valeur

absolue, qui, selon lui, donne de meilleurs résultats dans une application particulière (mesure de la valeur efficace) $\rho(x, y) = |x-y|$ [3].

Ces types de quantificateurs déterministes restent dans tous les cas des opérateurs non linéaires, non bijectifs (donc non inversibles) : l'information est perdue dans l'opération de quantification. En outre, dans les quantifications grossières, il y a une forte corrélation entre le bruit de quantification et le signal.

Nous proposons une étude théorique d'optimisation de la Quantification Aléatoire (Q.A.) lorsque la densité de probabilité d'entrée est connue. Cette optimisation portera sur un critère quadratique : on a en effet montré que l'expression de la transformation des moments est simple pour un quantificateur aléatoire [6].

Nous nous sommes limités aux quantificateurs aléatoires (Q.A.) à transfert moyen linéaire sur un intervalle.

En effet, il a été montré que pour un Q.A. à transfert moyen linéaire (sur \mathbf{R}) le bruit de quantification est parfaitement non corrélé avec le signal [4] ; en outre tout estimateur consistant de moyenne permet de "retrouver" asymptotiquement l'information.

On peut ainsi espérer que ces propriétés se prolongeront au cas où la linéarité du transfert moyen n'est vrai que sur un intervalle fini.

2 - APPROCHE THEORIQUE

Soit un Quantificateur Aléatoire défini par

$$X_Q = y_i \quad \text{quand } x_i \leq X < x_{i+1}$$

où $\{y_i\}$ est la suite (déterministe) des niveaux de sortie et $\{x_i\}$ une suite de variables aléatoires (non dégénérées).

Ceci généralise l'équation (1) et a des propriétés de transformation de moments connues

$$E(X_Q^m) = E(\lambda_m(X))$$

où $\lambda_m(x)$ est entièrement définie par les fonctions de répartition $F_i(x)$ des seuils x_i [5].

De là on tire l'expression de la distance quadratique :

$$D = E((X-X_Q)^2) = E(X^2) - 2E(X X_Q) + E(X_Q^2) \quad (5)$$

$$\begin{cases} E(X_Q^2) = E(\lambda_2(X)) \\ E(X X_Q) = E(X \lambda_1(X)) \end{cases} \quad (6)$$

Sachant que $\{y_i\}$ représente le $i^{\text{ème}}$ niveau de sortie du quantificateur et $F_i(x)$ la fonction de répartition

du seuil correspondant, nous savons que :

$$\lambda_1(x) = \sum_{i \in I} (y_i - y_{i-1}) F_i(x) = \sum \Delta_i F_i(x) \text{ en posant } \Delta_i = y_i - y_{i-1} \quad (7)$$

$$\lambda_2(x) = \sum_{i \in I} (y_i^2 - y_{i-1}^2) F_i(x)$$

où I_0 est l'ensemble fini décrit par i

$$\text{Soit : } D = E(X^2) - 2 \sum_i \Delta_i E(X F_i(x)) + E(\lambda_2(x)) \quad (8)$$

Le problème consiste donc à trouver $\{y_i\}$ et $\{F_i(x)\}$ minimisant D .

Nous nous sommes limités, dans cette étude, à un problème plus restreint. Nous étudierons simplement le cas correspondant aux hypothèses suivantes :

- 1)- Quantificateur aléatoire à transfert moyen linéaire sur l'intervalle (y_1, y_n) .
- 2)- Les seuils aléatoires sont non recouvrants [4] (i.e. les domaines occupés par X_i et X_{i+1} avec une probabilité non nulle sont disjoints).

On montre que sous ces hypothèses les $\{X_i\}$ peuvent être uniformément distribuées sur (y_{i-1}, y_i)

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} x & \text{pour } y_1 \leq x \leq y_n \\ y_n & \text{pour } x > y_n \\ y_1 & \text{pour } x < y_1 \end{cases}$$

(n étant le nombre de niveaux de sortie).

Le problème se réduit alors à minimiser l'éq. (8) qui s'écrit :

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(\lambda_2(x) - x^2) dx + 2 \int_{-\infty}^{y_1} (-y_1 x + x^2) p(x) dx + 2 \int_{y_n}^{+\infty} (y_n x - x^2) p(x) dx \quad (9)$$

D'après l'hypothèse 2, on sait que $\lambda_2(x)$ sera l'interpolée linéaire d'une parabole sur un intervalle.

Ceci est résumée sur la figure 1.

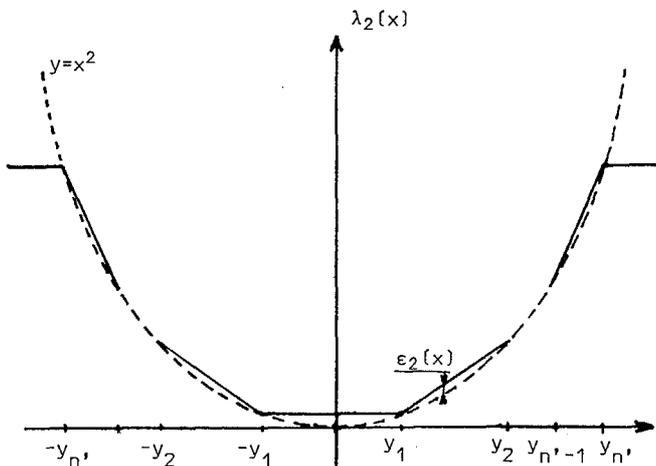


Figure 1

L'expression de $\lambda_2(x)$ est :

$$\begin{aligned} \lambda_2(x) &= (y_i + y_{i-1}) x - y_i y_{i-1} \text{ pour } y_{i-1} \leq x < y_i \quad (10) \\ \lambda_2(x) &= y_n^2 \text{ pour } x \geq y_n \\ \lambda_2(x) &= y_1^2 \text{ pour } x < y_1 \end{aligned}$$

Donc, le problème revient à trouver la famille des $\{y_i\}$ minimisant (9) à l'aide de (10) connaissant $p(x)$ et n .

Si l'on note $\lambda_2(x) - x^2 = \epsilon_2(x)$, on voit que $\epsilon_2(x)$ est une famille de paraboles enchaînées aux points $\{y_i\}$ [4].

Si l'on pose : $g_i(x) = x(y_i + y_{i-1}) - y_i y_{i-1} - x^2$

$$D = \sum_{i \in I_0} \int_{y_{i-1}}^{y_i} p(x) g_i(x) dx + \int_{-\infty}^{y_1} (-y_1 x + x^2) p(x) dx + \int_{y_n}^{+\infty} (y_n x - x^2) p(x) dx$$

Dans le cas particulier où $p(x)$ est une fonction paire et où le quantificateur est symétrique ($y_n = -y_1$) le problème revient à minimiser l'expression de D donnée en Annexe [A(1)].

Nous considérerons deux cas suivant la parité du nombre de niveaux n :

1)- Le nombre de niveaux n est pair :

Faisons le changement d'indice :

$$\begin{aligned} j &= i - \frac{n}{2} \text{ pour } y_i > 0 \\ j &= -i + \frac{n}{2} + 1 \text{ pour } y_i < 0 \end{aligned}$$

et posons :

$$\begin{aligned} \text{Sgn}(y_j) &= \text{Sgn}(j) \times \frac{y_j}{y_1} \\ n' &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

L'expression de la distorsion est donnée en Annexe [A(2)].

2)- Le nombre de niveaux n est impair :

Faisons le changement d'indice :

$$\begin{aligned} j &= i - \frac{n-1}{2} \text{ pour } y_i \geq 0 \\ j &= -i + \frac{n+3}{2} \text{ pour } y_i < 0 \end{aligned}$$

et posons :

$$\begin{aligned} \text{Sgn}(y_j) &= \text{Sgn}(j) \times \frac{y_j}{y_1} \\ n' &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Les résultats seront les mêmes que dans le cas précédent en tenant compte toutefois que $y_1 = 0$ et que $n' = \frac{n+1}{2}$.

L'expression obtenue dans ce cas est donnée en Annexe [A(3)].



3 - APPLICATION AUX LOIS LAPLACIENNES

Nous appliquerons les équations A(2) et A(3) au cas de distribution d'entrées d'usage général :

- Loi Laplace de 1^{ère} espèce :

$$p(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|} \quad a > 0$$

- Loi Gaussienne :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Nous considérerons le cas d'une loi gaussienne normée et de moyenne nulle.

Les équations A(2) et A(3) (nombre de niveaux pair et impair) deviennent respectivement dans ces cas : A(4), A(5), A(6) et A(7).

Choix de l'algorithme

L'algorithme utilisé permet de trouver le minimum d'une fonction de plusieurs variables, sans utiliser le gradient de la fonction.

Partant des valeurs initiales des variables, ce programme d'optimisation évalue numériquement le gradient et la matrice des dérivées secondes de la fonction au point de départ, à partir d'un réseau de points dont on fournit le pas.

L'algorithme de Newton est ensuite utilisé au cours d'un processus itératif qui utilise l'algorithme de la variance de Davidon [8] pour calculer les dérivées secondes à chaque itération. La minimisation est stoppée lorsque la norme du gradient est inférieure à une valeur fixée.

Nous donnons dans le tableau suivant un échantillon de résultats obtenus dans le cas où la variable d'entrée a une fonction de distribution gaussienne normée ($\sigma=1$) et de moyenne nulle ($\mu=0$) soit :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

La représentation de l'erreur quadratique optimale en fonction du nombre de niveaux du quantificateur ainsi déterminé nous a permis de donner une expression empirique de la distance quadratique minimale en fonction du nombre de niveaux :

$$D_{opt} = 2,347 n^{-1,78}$$

Ceci est représenté en échelle log-log sur la figure 2.

	n = 4	n = 5	n = 6	n = 8	n = 16	n = 32
y ₁	0,3949	0	0,2871	0,2262	0,1229	0,0642
y ₂	1,2773	0,677	0,8950	0,6946	0,3711	0,1931
y ₃		1,4769	1,6382	1,2201	0,6272	0,3231
y ₄				1,8889	0,8978	0,4550
y ₅					1,1923	0,5896
y ₆					1,5259	0,7277
y ₇					1,9277	0,8705
y ₈					2,4689	1,0193
y ₉						1,1759
y ₁₀						1,3431
y ₁₁						1,5254
y ₁₂						1,7281
y ₁₃						1,9558
y ₁₄						2,2182
y ₁₅						2,5460
y ₁₆						2,9991
D	0,1757	0,1252	0,0939	0,0585	0,0174	0,0048

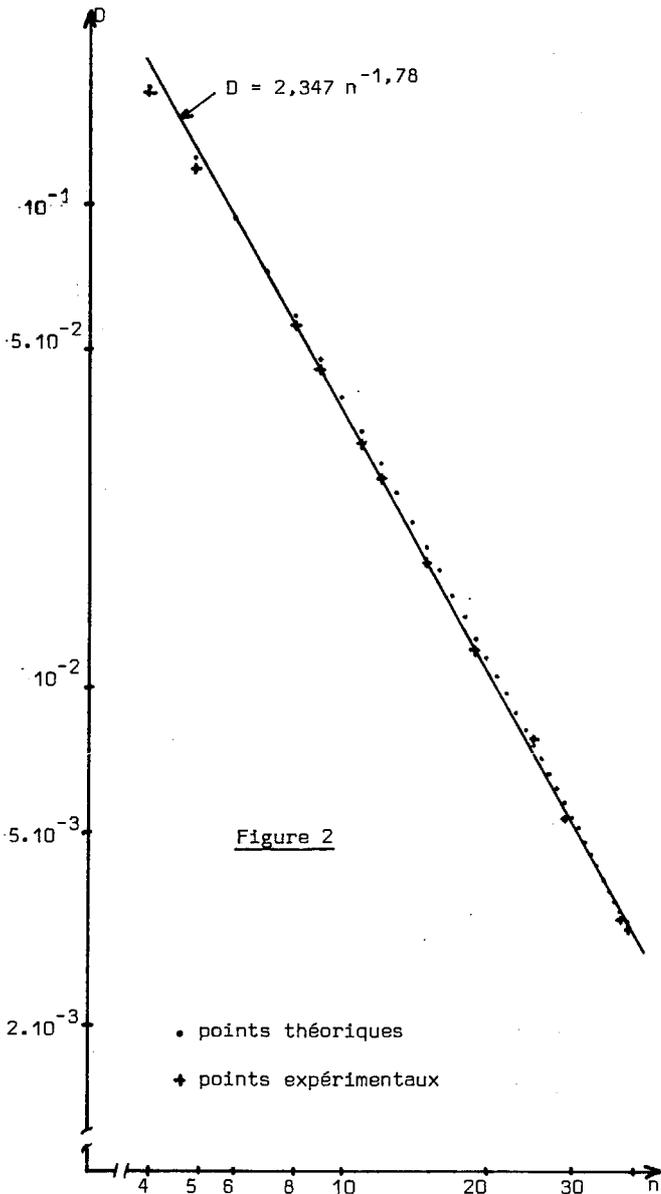


Figure 2

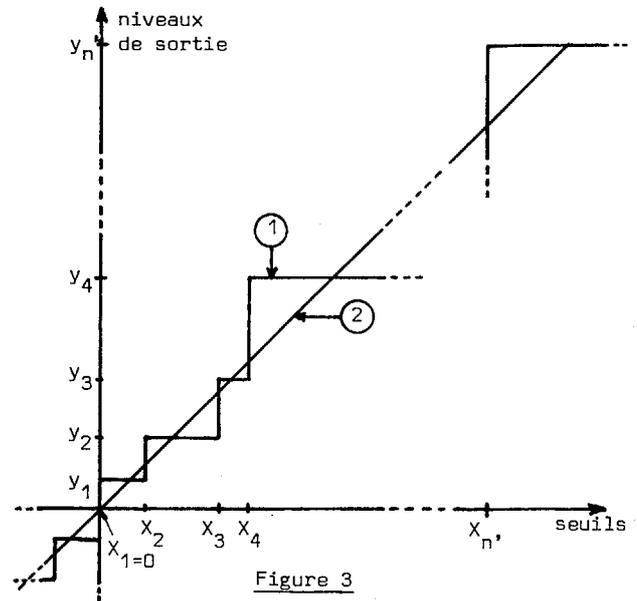


Figure 3

- ① une réalisation de la caractéristique de transfert
- ② Courbe de transfert moyen $\lambda_1(x)$

La distance quadratique moyenne $E((X_Q - X)^2)$ a ensuite été estimée sur 10^5 échantillons. Quelques résultats expérimentaux sont portés sur la figure 2. On constate l'excellent accord entre les valeurs théoriques calculées au § 3 et ces valeurs expérimentales.

5 - CONCLUSION

La présente communication est consacrée aux premiers résultats obtenus sur l'application de la quantification aléatoire au problème de la quantification optimale. Une étude plus complète pourra se trouver en [10]. Il a été montré que d'une part la théorie de la Q.A. se révèle parfaitement exploitable pour des problèmes particuliers, et d'autre part, que le problème d'optimisation conserve une solution dans ce cas.

La solution obtenue pré-suppose la connaissance de la loi de l'entrée, et nous donne un quantificateur à erreur quadratique minimale qui conserve l'information "en moyenne". Dans la mesure où cette moyenne peut être estimée aussi bien qu'on le veut par un estimateur convergent, on peut considérer que le quantificateur proposé "ne perd pas" l'information. Ceci joint à la propriété de décorrélation exacte du bruit de quantification et du signal des Q.A. à transfert moyen linéaire, devrait ouvrir des champs d'applications à cette étude, pour le moment théorique : télétransmission, calcul stochastique, et estimateurs à Q.A. lorsque les entrées ont des lois connues.

4 - VERIFICATION EXPERIMENTALE :

Nous avons effectué l'implantation en simulation sur microprocesseur à l'aide d'une source de bruit uniformément distribuée (U.D.) (réellement aléatoire) [9], [7].

Une variable gaussienne a été générée numériquement, et soumise à l'algorithme de quantification aléatoire décrit en (1); les seuils aléatoires $\{X_i\}$, à fonctions de répartitions linéaires ont été générés à partir de la source U.D.

Nous avons tout d'abord vérifié la forme de $\lambda_1(x)$ en estimant la moyenne de la sortie pour différentes valeurs de l'entrée. Les résultats sont en parfait accord avec la figure 3.



ANNEXE : Expressions de la distorsion

Formule générale de la distorsion : [A(1)]

$$D = - \sum_{i \in I_0} \left\{ y_i y_{i-1} \int_{y_{i-1}}^{y_i} p(x) dx - (y_i + y_{i-1}) \int_{y_{i-1}}^{y_i} x p(x) dx \right\} - \int_{y_1}^{y_m} x^2 p(x) dx + 2 y_m^2 \int_{y_m}^{\infty} p(x) dx - 4 y_m \int_{y_m}^{\infty} x p(x) dx + 2 \int_{y_m}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

Formule générale lorsque le nombre de niveaux est pair : [A(2)]

$$D = - 2 \sum_{j=2}^{m'} \left\{ y_j y_{j-1} \int_{y_{j-1}}^{y_j} p(x) dx - (y_j + y_{j-1}) \int_{y_{j-1}}^{y_j} x p(x) dx \right\} + 2 y_1^2 \int_0^{y_1} p(x) dx + 2 y_m^2 \int_{y_m}^{\infty} p(x) dx - 4 y_m \int_{y_m}^{\infty} x p(x) dx - 2 \int_0^{y_{n'}} x^2 p(x) dx + 2 \int_{y_{n'}}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

Formule générale lorsque le nombre de niveaux est impair : [A(3)]

$$D = - 2 \sum_{j=3}^{m'} \left\{ y_j y_{j-1} \int_{y_{j-1}}^{y_j} p(x) dx - (y_j + y_{j-1}) \int_{y_{j-1}}^{y_j} x p(x) dx \right\} - y_2 \int_0^{y_2} x^2 p(x) dx + 2 y_m^2 \int_{y_m}^{\infty} p(x) dx - 4 y_m \int_{y_m}^{\infty} x p(x) dx - 2 \int_0^{y_{n'}} x^2 p(x) dx + 2 \int_{y_{n'}}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

Variable d'entrée Laplacienne et nombre de niveaux pair : [A(4)]

$$D = \sum_{j=2}^{m'} \left\{ \frac{y_j + y_{j-1}}{a} (e^{-ay_{j-1}} - e^{-ay_j}) + y_{j-1}^2 e^{-ay_{j-1}} - y_j^2 e^{-ay_j} \right\} + y_1^2 (1 - e^{-ay_1}) + e^{-ay_{n'}} (y_{n'}^2 + \frac{2}{a} y_{n'} + \frac{4}{a^2}) - \frac{2}{a^2}$$

Variable d'entrée gaussienne et nombre de niveaux pair : [A(5)]

$$D = \sum_{j=2}^{m'} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} (-y_{j-1} e^{-\frac{y_{j-1}^2}{2}} + y_j e^{-\frac{y_j^2}{2}}) - 2 y_{j-1} y_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} y_1^2 \int_0^{y_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (y_{n'} e^{-\frac{y_{n'}^2}{2}} - y_{n'} e^{-\frac{y_{n'}^2}{2}}) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (2 + y_{n'}^2) \int_0^{y_{n'}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + 1 + y_{n'}^2$$

Variable d'entrée Laplacienne et nombre de niveaux impair : [A(6)]

$$D = \sum_{j=3}^{m'} \left\{ \frac{y_j + y_{j-1}}{a} (e^{-ay_{j-1}} - e^{-ay_j}) + y_{j-1}^2 e^{-ay_{j-1}} - y_j^2 e^{-ay_j} \right\} + y_2 \left[\frac{1}{a} - e^{-ay_2} \left(\frac{1}{a} + y_2 \right) \right] + e^{-ay_{n'}} (y_{n'}^2 + \frac{2}{a} y_{n'} + \frac{4}{a^2}) - \frac{2}{a^2}$$

Variable d'entrée gaussienne et nombre de niveaux impair : [A(7)]

$$D = \sum_{j=3}^{m'} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} (y_j e^{-\frac{y_j^2}{2}} - y_{j-1} e^{-\frac{y_{j-1}^2}{2}}) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} y_{j-1} y_j \int_{y_{j-1}}^{y_j} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (y_2 - y_{n'} e^{-\frac{y_{n'}^2}{2}}) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (2 + y_{n'}^2) \int_0^{y_{n'}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + y_{n'}^2 + 1$$



 BIBLIOGRAPHIE

- [1] - MAX J.
"Quantizing for minimum distortion"
IRE Trans. Inf. Theory, Vol. IT-6, pp.7-12,
1960.
- [2] - DEMARET J.C.
"Optimum quantisers for a Gaussian input
probability density and the magnitude-error
distortion measure."
E.S.A., Scientific Memorandum, S.M. 83, 1975.
- [3] - DEMARET J.C.
"Contribution à l'approche des performances
maximales d'un procédé numérique, appliquée
à la mesure de la valeur efficace".
Extrait de la collection des publications de
la Faculté des Sciences Appliquées de l'Uni-
versité de Liège (n° 67-1977).
- [4] - CASTANIE F.
"Linear mean transfer random quantization"
à paraître : Signal Processing 1981.
- [5] - CASTANIE F.
"Signal Processing by random reference quanti-
zing".
Signal Processing, 1979, pp. 27-43.
- [6] - CASTANIE F.
"Estimation des moments par quantification à
référence stochastique".
Thèse d'Etat - INP Toulouse, 1977.
- [7] - CASTANIE F.
"Generation of random bits with accurate and
reproducible properties".
PIEEE, Vol. 66, n° 7, July 1978, pp. 807-809.
- [8] - DAVIDON W.C.
"Variance algorithm for minimization".
Comp. Journal, Vol. 10, 1968, p. 406.
- [9] - DUBE D.
"Fonctionnement et utilisation du périphérique,
source de nombres aléatoires numériques".
Note Interne 4-1980, GAPSE, INP Toulouse
- [10] - TRESSIERES J.P.
"Contribution à l'étude de la quantification
aléatoire optimale".
Thèse à paraître, GAPSE, INP Toulouse.

