

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

DECONVOLUTION DISCRETE EN TEMPS REEL.

Guy DEMOMENT et Didier SAINT-FELIX

LABORATOIRE DES SIGNAUX ET SYSTEMES - C.N.R.S.-E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE.

RESUME

De nombreuses méthodes ont été proposées pour la restauration d'un signal dégradé par un système linéaire, à partir de la mesure de sa sortie bruitée, de la connaissance du système, et d'une information a priori sur les propriétés respectives du signal et du bruit. Mais ces méthodes nécessitent le plus souvent d'importants calculs en temps différé.

La méthode proposée opère directement dans l'espace des données et permet un travail en ligne, les valeurs estimées de l'entrée étant fournies au rythme de l'échantillonnage de la sortie, avec un retard de quelques périodes. L'algorithme utilisé est récursif et minimise une distance d'entrée. Le choix d'une matrice permet d'ajuster l'inévitable compromis biais-variance de la solution en fonction du rapport signal-à-bruit. La méthode présente comme avantage essentiel la simplicité de mise en oeuvre puisqu'elle ne nécessite ni inversion de matrice ni transformation de Fourier.

SUMMARY

A large number of diverse methods have been proposed for restoration of a signal degraded by a linear system. The problem is the numerical estimation of the system input from the knowledge of the system itself, of its noisy output and of some a priori information. But these methods are often off-line implemented and computation time consuming.

The numerical procedure that is presented relies on two principles :

- (i) the algorithm minimizes an input distance, which is the aim of any deconvolution procedure,
- (ii) the algorithm works on line : the input estimated values are supplied with a delay of a few sampling periods.

The choice of a diagonal matrix allows one to carry out the compromise between bias and variance. This method needs no matrix inversion nor Fourier transformation and can, therefore, be easily implemented with a microprocessor.



1. INTRODUCTION

En physique expérimentale, on désire fréquemment accéder à une grandeur $x(t)$ qui ne peut être atteinte qu'au travers d'un appareil délivrant une mesure $y(t)$. Un des cas les plus importants est celui des appareils linéaires pour lesquels l'observation $y(t)$ est reliée à la grandeur à mesurer par une équation intégrale de première espèce :

$$y(t) = \int_U h(t,u) x(u) du, \quad t \in T \quad (1)$$

Le noyau de cette intégrale, $h(t,u)$, représente la fonction d'appareil ou sa réponse impulsionnelle. Nous nous limiterons au cas des appareils stationnaires et des transmissions causales. Cette équation intégrale devient alors une équation de convolution

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (2)$$

On considère habituellement que l'appareil est bien utilisé lorsque le noyau de l'intégrale peut être approché par :

$$h(t-\tau) = a \delta(t-\tau) \quad (3)$$

La grandeur à mesurer s'obtient alors simplement :

$$x(t) = \frac{1}{a} y(t) \quad (4)$$

Cette approximation n'est acceptable qu'au delà d'un pas limite de t appelé résolution. Lorsque, pour des raisons technologiques ou économiques, on désire utiliser l'appareil en deçà de cette limite, il faut alors résoudre l'équation (2), c'est-à-dire déconvoluer la grandeur expérimentale $y(t)$ pour obtenir $x(t)$. La méthode décrite dans cet article est une méthode de déconvolution discrète en temps réel, c'est-à-dire une méthode numérique fournissant des valeurs échantillonnées de $x(t)$, à partir d'échantillons de $y(t)$, au rythme de l'échantillonnage de la sortie de l'appareil, avec éventuellement un retard de quelques périodes d'échantillonnage.

2. POSITION DU PROBLEME.

L'équation (2) peut s'écrire sous la forme :

$$Hx = y \quad (5)$$

Le problème de la déconvolution consiste alors à trouver une transformation inverse H^{-1} telle que :

$$H^{-1} y = x \quad (6)$$

D'un point de vue mathématique, la question qui se pose immédiatement est celle de l'existence et de l'unicité de H^{-1} . En fait, dans la pratique, le problème est souvent singulier et lorsque dans le meilleur des cas H^{-1} existe et est unique, il est alors fréquemment mal conditionné, c'est-à-dire qu'il existe ϵ , aussi petit que l'on veut, tel que :

$$H^{-1} [y + \epsilon] = x + \delta \quad (7)$$

où δ est ni arbitrairement petit ni négligeable. Or il s'agit là d'une situation réaliste puisque la sortie de l'appareil est inévitablement affectée par un bruit de mesure. De plus, lorsque le problème est discrétisé, les matrices qui apparaissent possèdent un nombre de condition très élevé et la précision limitée des calculateurs a tôt fait de les transformer en matrices singulières.

La déconvolution est donc un problème d'approximation; il s'agit de trouver une solution acceptable dans l'ensemble des solutions possibles généré par un problème mal posé. Il n'existe donc pas de méthode universelle et l'information a priori joue un rôle essentiel. Cette information a priori porte par exemple sur les statistiques de la grandeur à mesurer et du bruit de mesure.

Le problème considéré peut être schématisé de la façon suivante :



$b(t)$ est un processus aléatoire supposé additif et représentant les bruits de mesure et d'acquisition. On supposera par la suite que $b(t)$ est un bruit blanc stationnaire et centré. La sortie mesurée $y(t)$ étant discrétisée avec un pas d'échantillonnage T , l'équation (5) s'écrit matriciellement :

$$\underline{y} = H \underline{x} + \underline{b} \quad (8)$$

c'est-à-dire explicitement :

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(i) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(1), 0, \dots, 0 \\ h(2), h(1), \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, h(N), \dots, h(1), \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, \dots, h(N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(n-N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(n) \end{pmatrix} \quad (9)$$

où \underline{y} et \underline{b} sont des vecteurs $(n,1)$, \underline{x} un vecteur $(n-N+1, 1)$ et H une matrice $(n, n-N+1)$.

Le choix d'une solution parmi l'infinité des solutions générées par un problème mal conditionné doit être guidé par un critère. Il est intéressant de classer les méthodes de déconvolution existantes par rapport à ce critère. La démarche la plus naturelle consiste à chercher une solution \hat{x} telle que

$$(\underline{y} - H \hat{x})^t (\underline{y} - H \hat{x}) \quad (10)$$

soit minimal. La solution obtenue est alors une solution pseudo-inverse

$$\hat{x} = (H^t H)^{-1} H^t y \quad (11)$$

qui n'est envisageable que si $H^t H$ est inversible. Cette condition ne peut être satisfaite dans la pratique qu'avec un pas d'échantillonnage large pour limiter le mauvais conditionnement dû à la dépendance linéaire entre les lignes de H . La sensibilité au bruit demeure importante et l'amélioration de la résolution de l'appareil limitée [4] [11]. Lorsque les propriétés statistiques de l'entrée \underline{x} et du bruit \underline{b} sont connues, on cherche plutôt une solution \hat{x} telle que

$$E [(\underline{x} - \hat{x})^t (\underline{x} - \hat{x})] \quad (12)$$

soit minimale. Cette démarche conduit au filtrage de Wiener [2] [12]. Elle présente cependant l'inconvénient de nécessiter une information a priori souvent difficile à obtenir dans la pratique (matrices de covariance de \underline{x} et \underline{b}). En fait le filtrage de Wiener peut être considéré [5] comme un cas particulier d'un problème général de minimisation avec contraintes, ou de régularisation, qui peut s'exprimer de la façon suivante : minimiser

$$(\hat{x}^t C^t C \hat{x}) \quad (13)$$

sous la contrainte résiduelle

$$(\underline{y} - H \underline{\hat{x}})^t (\underline{y} - H \underline{\hat{x}}) \leq \epsilon \quad (14)$$

Il s'agit bien d'une régularisation au sens de Tykonov, on admet que l'on ne peut pas trouver de solution unique au problème et on cherche, dans la classe d'équivalence définie par (14), la solution satisfaisant la contrainte (13) qui englobe l'information a priori. Cette solution s'écrit :

$$\underline{\hat{x}} = [H^t H + \gamma C^t C]^{-1} H^t \underline{y} \quad (15)$$

Ces méthodes [15] [4] [13] fournissent des solutions satisfaisantes au problème de la déconvolution, mais elles présentent des inconvénients d'ordre pratique : elles ne peuvent être mises en oeuvre qu'en temps différé puisqu'elles nécessitent la connaissance complète du vecteur \underline{y} et elles entraînent, même dans leur forme itérative [4] un volume de calcul important. La seule méthode travaillant en temps réel que nous connaissons, la méthode de Ronsin [10], s'appuie sur une résolution de type pseudo-inverse (11) et ne fournit de solution acceptable qu'avec un pas d'échantillonnage relativement large.

L'objectif de notre travail fut donc de développer une méthode de déconvolution en temps réel, fournissant une solution acceptable et effectivement applicable à des problèmes où les dimensions de H sont élevées (typiquement n de l'ordre de quelques milliers). La solution acceptable est définie arbitrairement comme une solution "physique", c'est à dire une solution de norme minimale. La matrice de contrainte C est alors une matrice identité. L'inverse généralisée d'une matrice H étant définie par

$$H^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [H^t H + \alpha I]^{-1} H^t \quad (16)$$

le lien entre la régularisation d'un problème mal conditionné et l'inversion généralisée d'une matrice est évident. C'est pourquoi la base de notre travail a été la méthode itérative de résolution de systèmes singuliers par projections de Kaczmarz [6]. Cette méthode a été utilisée par Richalet et coll. pour l'identification de systèmes linéaires [10] ou la déconvolution discrète en temps différé [9]. Notre travail a consisté à modifier cette méthode pour la rendre récursive et utilisable en temps réel.

3. RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE SINGULIER PAR PROJECTIONS.

Il est bien connu que lorsque la matrice H est carrée et non singulière, le procédé d'élimination gaussien fournit une solution précise à l'équation (5) tant que le nombre de condition H n'est pas trop élevé. Quand la matrice est creuse et d'ordre élevé, cette méthode est moins efficace que des procédures itératives telles que celles de Gauss-Seidel ou de Jacobi. Ces méthodes ne convergent cependant pas toujours. L'intérêt de la méthode de Kaczmarz s'en trouve renforcé puisque l'on peut montrer qu'elle converge pour tout système linéaire d'équations sans ligne identiquement nulle, même s'il est singulier, et ce pour un nombre d'opérations arithmétiques élémentaires relativement faible [14].

Le système à résoudre s'écrit sous forme matricielle

$$H \underline{x} = \underline{y} \quad (17)$$

où H est une matrice réelle (n, n-N+1) et \underline{x} et \underline{y} des vecteurs réels de dimensions respectives (n - N+1) et (n). Le système (17) peut être écrit de façon équivalente sous la forme :

$$\langle \underline{x}, \underline{h}_i \rangle = y(i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (18)$$

où \underline{h}_i est le i-ème vecteur colonne de H^t et où $\langle \underline{x}, \underline{z} \rangle$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs. Supposons $\|\underline{h}_i\| > 0$ pour tout i et soit f_i l'application de R^m dans R^m définie par :

$$f_i(\underline{x}) = \underline{x} - \frac{\langle \underline{x}, \underline{h}_i \rangle - y(i)}{\langle \underline{h}_i, \underline{h}_i \rangle} \underline{h}_i \quad \text{avec } m=n-N+1 \quad (19)$$

Soit F l'application de R^{m+n} dans R^m définie par

$$F(\underline{y}, \underline{\hat{x}}) = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n(\underline{\hat{x}}) = f_n(\dots(f_2(f_1(\underline{x})))\dots) \quad (20)$$

L'algorithme est défini par la récurrence

$$\underline{\hat{x}}^{i+1} = F(\underline{y}, \underline{\hat{x}}^i) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

$\underline{\hat{x}}^0$ étant un élément arbitraire de R^m . La séquence des $\{\underline{\hat{x}}^i\}$ ainsi générée converge quels que soient H, \underline{y} et $\underline{\hat{x}}^0$. En effet, la relation (19) peut s'écrire :

$$f_i(\underline{x}) = P_i \underline{x} + \frac{y_i}{\langle \underline{h}_i, \underline{h}_i \rangle} \underline{h}_i \quad i=1, \dots, n \quad (22)$$

$$\text{où } P_i = I - \frac{1}{\langle \underline{h}_i, \underline{h}_i \rangle} \underline{h}_i \underline{h}_i^t \quad (23)$$

P_i est une matrice de projection orthogonale. Soit $Q_i = P_i \dots P_2 P_1$ ($i = 1, \dots, n$), où $Q_0 = I$, et soit R la matrice telle que :

$$R \underline{y} = \sum_{i=1}^n \frac{y(i)}{\langle \underline{h}_i, \underline{h}_i \rangle} Q_{i-1} \underline{h}_i \quad (24)$$

$$\text{Nous avons donc } F(\underline{y}, \underline{\hat{x}}) = Q \underline{\hat{x}} + R \underline{y} \quad \text{où } Q = Q_n \quad (25)$$

Les matrices Q et R possèdent les propriétés suivantes: pour $\underline{y} = \underline{0}$, l'algorithme

$$\underline{\hat{x}}^{i+1} = F(\underline{0}, \underline{\hat{x}}^i) = Q \underline{\hat{x}}^i \quad i=0, 1, \dots \quad (26)$$

génère une séquence $\{\underline{\hat{x}}_i\}$ qui converge vers $P_K \underline{\hat{x}}^0$. $\underline{\hat{x}}^0$ est le vecteur initial et P_K la matrice de projection orthogonale sur le noyau de l'application H. De plus

$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i Q^j R$ existe. Elle est notée G et possède les propriétés suivantes :

$$HGH = H, \quad GHG = G, \quad GH = P_J, \quad HG = P \quad (27)$$

où P_J est la projection orthogonale sur l'image de H et P la projection sur $\text{Im } H$ parallèlement à $\text{Ker } R$. G est donc l'inverse généralisée de H. L'algorithme (21) génère ainsi une séquence $\underline{\hat{x}}^i$ telle que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{\hat{x}}^i = P_K \underline{\hat{x}}^0 + G \underline{y} \quad (28)$$

Il est bien connu que le système (17) possède une solution si et seulement si $HG \underline{y} = \underline{y}$. Dans ce cas (28) fournit la solution pour un $\underline{\hat{x}}^0$ arbitraire et $G \underline{y}$ est la solution de norme minimale.

Il faut bien voir cependant que tous les problèmes de comportement singulier ne sont pas éliminés par l'utilisation d'inverses généralisées et que l'existence du bruit sur les données ne doit pas être oubliée.



4. DEVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME DE DECONVOLUTION EN TEMPS REEL.

On voit aisément que si les vecteurs h_i sont mutuellement orthogonaux, alors $\hat{Q} = Q P_j = 0$, et l'algorithme converge en une itération. De même, lorsque les h_i sont "presque" orthogonaux, la norme $\|\hat{Q}\|$ est petite et l'algorithme converge rapidement.

Dans le cas qui nous intéresse ici, la structure de la matrice H dans l'équation (9) montre qu'elle contient un grand nombre de zéros et que l'on passe d'un vecteur h_i au vecteur h_{i+1} par simple décalage de coordonnées. La dépendance linéaire est donc élevée, et ce d'autant plus que le pas d'échantillonnage est faible. Il faut donc s'attendre à une convergence lente.

L'idée de base consiste à effectuer une transformation linéaire qui rend les vecteurs h_i "presque" orthogonaux [1][7]. Soit M une matrice réelle (n-N-1, n-N+1). L'algorithme (19) est modifié de la façon suivante :

$$f_i(\hat{x}) = \hat{x} - \frac{\langle \hat{x}, h_i \rangle - y(i)}{h_i^t M(i) h_i} M(i) h_i \quad i=1, \dots, n \quad (29)$$

Ceci s'apparente étroitement à la sphérisation du problème de minimisation d'un critère telle qu'elle est effectuée par la méthode de Newton-Raphson. En effet, la méthode de Kaczmarz, à chaque itération définie par l'équation (19), peut s'interpréter comme une méthode du gradient pour la minimisation d'une distance d'entrée :

$$D = (\underline{x} - \hat{x})^t (\underline{x} - \hat{x}) \quad (30)$$

La méthode d'estimation de \underline{x} étant itérative et régulière, nous cherchons une matrice M qui conditionne l'espace des entrées de façon à rendre les surfaces iso-distance sphériques. Ceci revient à fixer, près de la solution, une trajectoire rectiligne pour l'estimée \hat{x} , ce qui entraîne :

$$\Delta D(i+1) = D(\hat{x}^{i+1}) - D(\hat{x}^i) = -\beta D(\hat{x}^i) \quad \beta \in \mathbb{R}^+ \quad (31)$$

M est choisie diagonale par souci de simplicité (m_{ii} éléments de M). En utilisant (29) il vient :

$$D(\hat{x}^{i+1}) = \sum_{j=0}^{n-N} [\hat{x}^i(j) - x(j)]^2 a_j^2 \quad (32)$$

$$\text{où } a_j = 1 - \frac{m_{jj}^i h(j) [\langle \hat{x}^i, h_i \rangle - y(i)]}{[\hat{x}^i(j) - x(j)] h_i^t M(i) h_i} \quad (33)$$

pour que la condition (31) soit satisfaite, il suffit que les a_j soient indépendants de j, ce qui peut être obtenu avec :

$$\begin{aligned} m_{jj} &= \frac{1}{h(j)} [\hat{x}^i(j) - x(j)] \quad \text{si } h(j) \neq 0 \\ m_{jj} &= 0 \quad \text{si } h(j) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

La détermination de la matrice optimale M d'après (34) est impossible dans la pratique car l'on a évidemment pas accès à l'entrée vraie \underline{x} . Il s'agit là d'une difficulté de même nature que celle liée à la détermination de la valeur optimale γ dans les méthodes de régularisation (15). Cependant, une convergence rapide de l'algorithme implique que les m_{jj} non nuls croissent rapidement avec j. La rapidité de cette croissance doit être ajustée, pour réaliser l'inévitable com-

promis biais-variance, entre les deux limites suivantes $1 - m_{jj} = 1 \quad \forall_j \quad t.q. h(j) \neq 0$. C'est l'algorithme (19) qui converge lentement et qui, utilisé en temps réel, donne un biais important avec une variance faible [7].

2- $m_{jj} = 0 \quad \forall_j \neq i, m_{jj} = 1 \quad j=1$. Les vecteurs h_i sont tous mutuellement orthogonaux, la convergence s'effectue en un coup, le biais est nul mais la variance est importante car on résoud en fait directement le système (17) [7].

5. MISE EN OEUVRE PRATIQUE.

Cette mise en oeuvre s'appuie sur le fait que la matrice H contient un grand nombre de zéros et que seules N composantes de \underline{x} sont modifiées par (29) à chaque itération. La méthode est schématisée à la figure suivante.

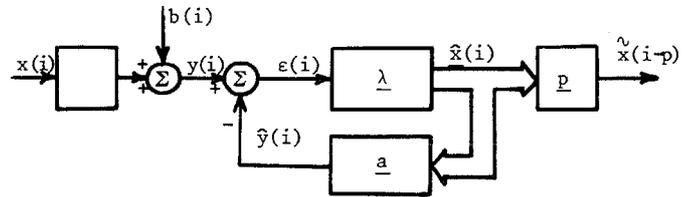


Figure 1 : Principe de la déconvolution discrète en ligne.

L'Algorithme de Déconvolution En Ligne (ADELE) s'écrit :

$$\hat{x}(i) = \hat{x}^\circ(i) + \lambda \epsilon^\circ(i) \quad (35)$$

$$\text{où } \epsilon^\circ(i) = y(i) - \hat{y}^\circ(i) = y(i) - \underline{a}^t \hat{x}^\circ(i) \quad (36)$$

$$\underline{a}^t = [h(1), \dots, h(N)] \quad \hat{x}(i)^t = [\hat{x}(i-1), \dots, \hat{x}(i-N)] \quad (37)$$

$$\lambda = \frac{A \underline{a}}{\underline{a}^t A \underline{a}} \quad (38)$$

où A est la matrice diagonale dont les éléments avec $a_{\ell\ell}$ sont donnés par

$$a_{\ell\ell} = m_{i-\ell+1, i-\ell+1} \quad \ell = 1, 2, \dots, N \quad i = 1, 2, \dots, M-N+1 \quad (39)$$

La matrice A est constante et la loi de décroissance des $a_{\ell\ell}$ choisie telle que $a_{\ell\ell} = \left(\frac{\alpha}{\ell}\right)^{-q}$, α et $q \in \mathbb{R}^+$. α est d'autant plus grand que N est grand, q est choisi d'autant plus grand que le rapport signal à bruit est grand.

$$\hat{x}(i-p) = \underline{p}^t \cdot \hat{x}(i) \quad (40)$$

où $\underline{p}^t = [0, \dots, 1, 0, \dots, 0]$ est un vecteur dont toutes les coordonnées, sauf la p-ième, sont nulles. Cette méthode est d'une mise en oeuvre aisée. Comme il n'y a que l'écart instantané $\epsilon(i)$ entre la sortie mesurée et la sortie estimée qui intervient, il n'est pas nécessaire de garder en mémoire les valeurs des sorties passées. L'initialisation du vecteur $\hat{x}(i)$ est faite de la façon suivante :

$$\hat{x}^\circ(i) = \underline{P} \hat{x}(i-1) \quad (41)$$

$$\text{où } \underline{P} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et } \hat{x}^\circ(0) = \underline{0}$$

Mise en oeuvre de cette façon, la méthode est particulièrement simple puisqu'elle ne nécessite ni inversion de matrice, ni transformation de Fourier. Le nombre des opérations arithmétiques élémentaires (multiplication + addition) est proportionnel à la dimension du vecteur \underline{x} de l'équation (8), ce qui peut être avantageusement comparé aux méthodes de régularisation [4] et [15]. Le choix de p n'est pas très critique et il suffit de s'assurer que :

$$\lambda(p) \ll \lambda(i) \max \tag{42}$$

6. COMPARAISON AVEC LES METHODES DE REGULARISATION.

La méthode que nous venons de décrire fournit une solution approchée à l'équation (28). Elle est donc, de ce point de vue, sous optimale par rapport aux méthodes de régularisation telles que (15). Nous allons voir cependant que la simplicité n'est pas obtenue au détriment des performances et que la solution fournie est tout-à-fait acceptable. Nous avons repris pour cela l'exemple de Hunt [4]. Une séquence d'entrée (cf. figure 2.a).

$$x(i) = \exp\left[-\left(\frac{i-400}{75}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{i-600}{75}\right)^2\right]$$

$$i = 0, 1, \dots, 1023 \tag{43}$$

est convoluée avec une réponse impulsionnelle rectangulaire définie par :

$$h(i) = 1 \quad 0 \leq i \leq 249 \quad \text{et} \quad h(i) = 0 \quad 250 \leq i \leq 1023.$$

Le bruit qui est rajouté est constitué d'échantillons aléatoires d'une distribution uniforme sur l'intervalle $[-5, +5]$. La solution pseudo-inverse est présentée à la figure 2.b. Il est difficile, même doué d'une vive imagination, d'y retrouver les caractéristiques de l'entrée réelle. Cette solution est évidemment inacceptable. La solution par régularisation [4] est pré-

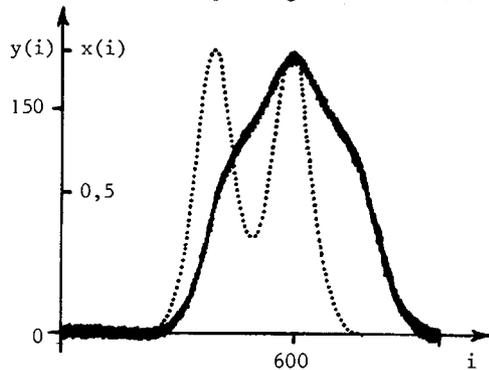
sentée à la figure 2.c, elle nécessite un nombre d'opérations arithmétiques élémentaires proportionnel à $k^2 \log k/2$ (ici $k = 1024$). La solution fournie par ADELE est présentée à la figure 2.d, l'erreur quadratique moyenne sur l'entrée n'est que 0,75 %, elle soutient la comparaison avec la solution précédente d'autant mieux que le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires n'est que proportionnel à k . (dans l'exemple présenté, $p=249$, $a_{jj} = \left(\frac{16}{j}\right)^2 \quad j=1,2,\dots,250$).

7. CONCLUSIONS.

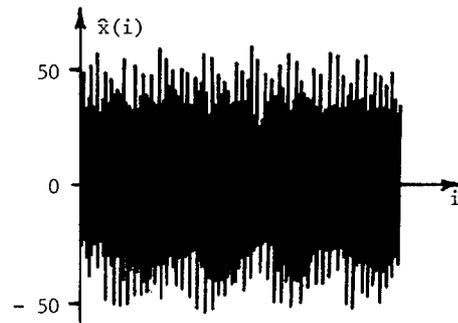
La méthode proposée opère directement dans l'espace des données et permet un travail en ligne, les valeurs estimées de l'entrée étant fournies au rythme de l'échantillonnage de la sortie, avec un retard de quelques périodes. La structure de l'algorithme est récursive et à chaque itération il minimise une distance d'entrée. Le choix d'une matrice permet d'ajuster l'inévitable compromis biais-variance de la solution en fonction du rapport signal-à-bruit. L'avantage essentiel de la méthode réside dans sa grande simplicité due à l'absence d'inversion de matrice et de transformation de Fourier. Cette simplicité permet de développer aisément un appareil déconvolveur construit autour d'un microprocesseur (dossier ANVAR N° 18546).

Cette méthode a été par ailleurs appliquée à la résolution de deux problèmes :

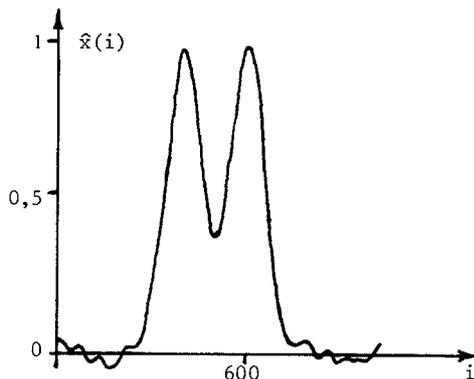
- 1) la mesure des pression hémodynamiques pour laquelle elle permet d'obtenir avec des catheters classiques et peu coûteux, une résolution comparable à celle obtenue par des catheters à extrémité barosensible, fragiles et très coûteux [8];
- 2) la caractérisation de tissus vivants par échographie ultrasonore pour laquelle il est possible d'améliorer la résolution d'un facteur 10 par rapport aux méthodes d'impédiographie classiques [3].



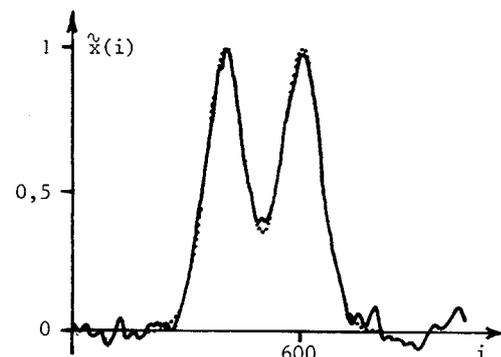
a) Entrée réelle (...) et sortie bruitée ().



b) Solution pseudo-inverse [4] .



c) Solution régularisée [4] .



d) Solution fournie par Adèle.

Figure 2 : Exemples de déconvolution discrète en présence de bruit.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DEMOMENT G., C.L. POSCA, D. SAINT-FELIX. Transducer smearing correction using a microprocessor-based discrete deconvolution. 18th. IEEE Conf. Dec. Contr. (1979) : 842-843.
- [2] HELSTROM C.W. Image restoration by the method of least squares. J. Opt. Soc. Amer. (1967) 57 : 297-303.
- [3] HERMENT A., G. DEMOMENT, M. VAYSSE. Algorithm for on-line deconvolution of echographic signals. 10th. Intern. Symp. Acoustical Imaging. (1980).
- [4] HUNT B.R. The inverse problem of radiography. Math Biosc. (1970) 8 : 161-179.
- [5] HUNT B.R. Deconvolution of linear systems by constrained regression and its relationship to the Wiener theory. IEEE Trans. (1972) AC:703-705.
- [6] KACZMARZ S. Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. Bull. Acad. Polon. Sc. Lettres (1937) A : 355-357.
- [7] POSCA C.L. Amélioration des caractéristiques dynamiques d'un capteur linéaire par déconvolution discrète en temps réel. Thèse de Docteur-Ingénieur Orsay (1979).
- [8] POSCA C.L., J. OKSMAN, G. DEMOMENT. Improvement of catheter pressure measurement with a microprocessor-based discrete deconvolution. 2nd. Med. Conf. Med. and Biol. Engng. (1980) : 217-218.
- [9] RICHALET J., J.F. BOISVIEUX, R. POULIQUEN. Etude des systèmes compartimentés. Compte-rendu DGRST N° 69 01824-9 (1970), 232 p.
- [10] RICHALET J., A. RAULT, J.L. TESTUD, J. PAPON. Model predictive heuristic control : application to industrial processes. Automatica (1978) 14 : 413-428.
- [11] RONSIN J. Déconvolution numérique en temps réel. Colloque GRETSI (1975) : 16/1-16/7.
- [12] RONSIN J. Déconvolution en temps réel par filtrage de Wiener. Colloque GRETSI (1977) : 68/1 - 68/6.
- [13] STRAND O.N., E.R. WESTWATER. Statistical estimation of the numerical solution of a Fredholm integral equation of the first kind. J. Assoc. Comput. Mach. (1968) 15 : 100-114.
- [14] TANABE K. Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications. Numer. Math. (1971) 17 : 203-214.
- [15] TWOMEY S. On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature. J. Assoc. Comput. Mach. (1963) 10 : 97-101.

