

NICE du 1<sup>er</sup> au 5 JUIN 1981

---

# LIMITE THEORIQUE DES PERFORMANCES M.A.D.

J.P.R. LETOUZEY \*

Ingénieur Conseil -- 42, allée de la Brigantine. 13127 Vitrolles

---

## RESUME

Pour un signal d'énergie finie, bruité et appartenant à une classe de signaux déterminés, on sait qu'il est possible de trouver un estimateur qui minimise la covariance d'erreur d'estimation du signal sur la classe considérée.

On se propose d'évaluer le détecteur issu de cette estimation et qui permet de dire si le signal appartient ou non à la classe recherchée.

On présente le calcul analytique des trois abaques probabilité de détection et taux de fausses alarmes en fonction du seuil de détection, probabilité de détection en fonction du taux de fausses alarmes et du rapport signal à bruit.

On applique les résultats au cas d'un détecteur-estimateur théorique, optimal, de signaux issus de la détection magnétique de sous-marins.

## SUMMARY

*For a given signal with finite energy in noise and which belongs to a given class of signals, it is possible to find an estimator which minimizes its error of estimation on this class.*

*This paper deal with the evaluation of the detector which is derived from this estimation and which can tell whether the signal belongs or not to the given class.*

*Probability of detection and false alarm rate are computed as a function of the signal to noise ratio.*

*These results are applied to a detector-estimator of Magnetic Anomalies generated by submarines.*

*PLAN • Introduction • Espace des signaux MAD • Détection-estimation • Densité de probabilité du test de détection en l'absence de signal • Probabilité de fausses alarmes • Probabilité de détection • Caractéristiques du détecteur • Conclusion • Références.*

\* Ingénieur Civil de l'Aéronautique -- Master of Sciences in Physics M.I.T.



La détection magnétique reste un des moyens importants utilisés en lutte anti-sous-marine en dépit de sa faible portée.

Rappelons en effet que le signal magnétique que provoque un sous-marin est dû à une perturbation statique du champ magnétique terrestre et, par conséquent, celle-ci ne se propage pas. Par contre, ce moyen présente l'intérêt majeur d'être de résolution très fine et de valider la présence d'un sous-marin tout en restant passif.

Des perfectionnements importants ont été accomplis d'abord sur les capteurs eux-mêmes, ensuite sur le traitement du signal proprement dit et enfin sur la compensation des effets perturbateurs dus à l'avion qui emporte le ou les magnétomètres.

Notre propos traite avant tout de la caractérisation du détecteur-estimateur utilisé en reconnaissance des signaux MAD.

Nous rappelons cependant ce qu'est une anomalie magnétique et quelle est la classe de signaux à laquelle appartiennent les signatures MAD.

1. L'ESPACE DES SIGNAUX MAD : (1)

● Qu'est-ce qu'une anomalie magnétique ? (3)

C'est la perturbation du champ terrestre que produit la présence du sous-marin.

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{\Delta H}_s$$

champ perturbé      champ magnétique terrestre      +      perturbation due au sous-marin

En fait, ce qui est généralement mesuré, c'est le module du champ total perturbé :  $|\vec{H}|$ .

Typiquement  $H_0$  est de l'ordre de 20 000 à 70 000 gammas\*,  $\Delta H_s$  de l'ordre de 0,01  $\gamma$  à 100  $\gamma$  selon la distance au sous-marin et selon la configuration d'interception, si bien que l'on peut écrire :

$$|\vec{H}| \approx H_0 + \vec{h} \cdot \vec{\Delta H}_s$$

où  $\vec{h}$  est un vecteur unitaire selon la direction  $\vec{H}_0$ .

● Représentations d'une anomalie magnétique : (3)

Il existe trois représentations particulièrement commodes pour se donner une idée d'un tel phénomène :

- représentation dans un plan horizontal au-dessus du sous-marin par des courbes iso-champ (Fig. 1 droite),
- perspective tri-dimensionnelle représentant la répartition de l'anomalie  $\vec{h} \cdot \vec{\Delta H}$  (Fig. 1 gauche),
- surface à trois dimensions caractérisant les points de valeur  $|\vec{h} \cdot \vec{\Delta H}| = Cte$  (Fig. 1 centre).

● Le signal :

C'est la perturbation le long de la trajectoire de l'avion. La cible est localisée par rapport à cette trajectoire par trois paramètres (Fig. 2).

- D : la plus courte distance de la cible à la trajectoire avion,
- E : la distance de l'avion au plan de cible, ce dernier étant le plan orthogonal à la trajectoire avion et passant par la cible.
- $\beta$  : l'angle de site de la cible, dans le plan de cible.

Le problème du traitement du signal MAD est double :

- détecter s'il y a présence d'une signature MAD,
- localiser la cible à partir de la connaissance de cette signature.

On notera V la vitesse de l'avion par la suite.

En pratique, l'observation d'une signature ne dure que 2 à 15 secondes environ puisque l'avion se déplace.

On démontre que :

i) Les signaux MAD sont générés par trois fonctions ou orthonormées dites de base réduites :

$$s_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{7u^2 - 1}{(1+u^2)^{5/2}}$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{5/2}}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{2}{55\pi}} \cdot \frac{1}{(1+u^2)^{5/2}}$$

$u$  variable réduite. cf. figure No 3.

\* 1 gamma =  $1 n T = 10^{-5} G$

La figure No 4 représente une rotation de  $15^\circ$  en  $15^\circ$  des signaux de base  $s_0$  et  $s_2$  pairs.

ii) Les densités spectrales s'expriment en fonction de la variable réduite  $k = 2\pi \frac{p}{V} \cdot F$  (cf. Fig. 4).

iii) On passe de l'espace des signaux réduits à l'espace des signaux effectivement observés par une translation et une compression :

$$x = D \cdot u + E$$

où D et E localisent la cible.

iv) L'énergie des signaux est proportionnelle à  $1/D^5$

v) Le produit temps-fréquence,  $B.T/2\pi$ , est de l'ordre de 15 maximum pour l'ensemble de la classe des signaux MAD. Il est donc possible de trouver une représentation discrète en temps et en fréquence de cette base sans pour cela perdre de l'information.

La figure 7 donne une telle représentation avec  $N = 32$ .

L'espace de représentation utilisé doit être plus grand que l'espace strictement nécessaire aux signaux afin de permettre au filtre de blanchiment d'agir sans introduire de recouvrement temporel de sa réponse impulsionnelle avec les signaux à blanchir.

● Les bruits :

Les bruits MAD sont de nature relativement complexe et ont fait l'objet d'études approfondies.

La figure 6 donne une allure générale de la densité spectrale de ces bruits.

On démontre que pour faire une détection-estimation optimale, il est nécessaire de les blanchir.

La figure 8 montre l'allure générale des filtres de blanchiment.

Ce blanchiment est effectué de manière auto-adaptative car les bruits évoluent avec la zone géographique survolée.

La présence de ce filtrage distord le signal et mélange les composantes de base. Cette distorsion dépend de la distance D comme on peut le voir sur la figure 9, ce qui rend pratiquement impossible toute estimation visuelle de D par un opérateur humain sans aide d'un traitement.

2. DETECTION-ESTIMATION : (1) (2)

Ce sujet a fait l'objet d'une communication au dernier GRETSI. (4)

On rappelle qu'on s'est penché sur la généralisation des démonstrations indépendamment de la représentation choisie.

C'est ainsi qu'on a pu démontrer qu'il existe un détecteur-estimateur optimal des paramètres de localisation de la cible (D et E/V) ayant les propriétés suivantes :

i) Il est à reconnaissance de structure, la structure étant définie par la base réduite citée précédemment (Fig. 3).

ii) Cette reconnaissance peut s'effectuer de manière totalement indépendante de la représentation des signaux : c'est la même structure formelle d'estimateur qui justifie les résultats que l'on peut obtenir soit en représentation de Laplace, soit en représentation discrète, à horizons bornés et réduits, soit en représentation récursive temporelle, etc ...

iii) L'approche formelle permet de généraliser le traitement à des signaux multidimensionnels c'est à dire issus de plusieurs MAD portés par le même avion.

iv) Sa structure formelle est la suivante :

$$\begin{cases} |\hat{Y}, n\rangle = \sum_n F^+ |Z', n\rangle \\ \sum_n = P [P F^+ T_n F P]^{-1} P \end{cases}$$

LIMITE THÉORIQUE DES PERFORMANCES D'UN DÉTECTEUR M.A.D. OPTIMAL

- où :
- P est le projecteur sur la ou les classes des signaux à détecter, P est adapté à une valeur de D. Dans le cas mono-signal, P est de la forme  $P = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$
  - où les représentations temporelles réduites  $\langle u/i \rangle_{D=1}$  sont celles de la figure 3.
  - $\Sigma_n$  est la covariance d'erreur d'estimation des paramètres de structure (composantes sur la base).
  - Z' le ou les signaux d'entrée blanchis.
  - $\hat{Y}$  l'état ou les états (paramètres de structure) du ou des signaux estimés.
  - F le filtre de blanchiment et orthogonalisation (si multiségnal) tel que  $\Gamma F^+ F = I$  où  $\Gamma$  est la covariance des bruits d'entrée.
  - $\Pi_n$  est le projecteur de «découvert» lié à la prédiction-lissage du passage à la verticale du sous-marin, une représentation de  $\Pi_n$  peut être :

$$\Pi_n = \int_{-\infty}^{n\Delta T} |t\rangle dt \langle t|$$

projecteur de troncature.  $n=0$  correspond à un filtre adapté à la détection du passage de l'avion à la verticale du sous-marin.

v) La connaissance de l'état  $|\hat{Y}, n\rangle$ , autrement dit des paramètres de structure permet de déterminer le site  $\beta$  de la cible et le moment magnétique  $\vec{M}$  du sous-marin.

Dans le cas d'un seul signal MAD, il y a dégénérescence et l'on trouve une fonction  $\vec{M}(\beta)$  dont seule une analyse de vraisemblance peut lever l'indétermination.

vi) La détection se fait sur le logarithme du rapport signal à bruit de l'état estimé, blanchi et tronqué :

$$Y = \text{Log} \frac{S}{B}$$

$$\text{avec } \frac{S}{B}(t, n) = \frac{\langle \hat{Y}, n | Z', n \rangle}{t_2 \Sigma_n'} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} |\hat{Y}, n\rangle = \Pi_n F |\hat{Y}, n\rangle \\ \Sigma_n' = \Pi_n F \Sigma_n F^+ \Pi_n \end{cases}$$

Ce qui n'est autre que le rapport entre l'énergie totale des signaux blanchis, tronqués et reconnus comme éléments de la classe, et l'espérance mathématique des bruits blanchis, tronqués et reconnus sur la classe considérée.

L'ensemble de ces détecteurs adaptés à autant de couples (D, n) qu'il est nécessaire pour obtenir une résolution suffisante sur la localisation de la cible, constitue un véritable ambiguïmètre «compression (D) - temps (n)» qui permet d'estimer D et n par détection du maximum.

La figure No 10 représente un tel ambiguïmètre sous forme de courbes iso-critère, à des instants successifs. On notera que les axes de représentation sont  $n\Delta T$  en abscisse pour l'estimation du temps qu'il reste à passer pour être à la verticale de la cible ou qui s'est écoulé depuis le passage à la verticale, D en progression géométrique pour les ordonnées. Il ne s'agit donc pas d'une représentation en axes réduits qui serait :  $\frac{Y}{2} n\Delta T$  en abscisse.

3. DENSITÉ DE PROBABILITÉ DU TEST DE DÉTECTION EN L'ABSENCE DE SIGNAL :

● Nous supposons le bruit d'entrée  $x$  gaussien centré et covariance  $\Gamma = E[x \langle x \rangle]$ .

Tous les détecteurs travaillent en définitive sur le signal d'état :  $|\hat{Y}, n\rangle = \mathcal{P}_{F, n} |Z', n\rangle$  (4)

où  $\mathcal{P}_{F, n}$  est un projecteur qui tient compte du blanchiment, des bruits, de l'échantillonnage des signaux, de leur troncature, de l'appartenance à la base MAD :

$$\mathcal{P}_{F, n}^2 = \mathcal{P}_{F, n} \quad \& \quad \mathcal{P}_{F, n}^+ = \mathcal{P}_{F, n}$$

Si bien que la covariance du bruit de sortie s'inscrit :

$$\Sigma_n' = \mathcal{P}_{F, n} E[|X', n\rangle \langle X', n|] \mathcal{P}_{F, n} \quad \text{soit :}$$

$$\Sigma_n' = \Pi_n F P [P F^+ \Pi_n F P]^+ P F^+ \Pi_n$$

qui n'est autre que  $\mathcal{P}_{F, n}$  (4), d'où le résultat important suivant :

$\Sigma_n'$  est un projecteur, ce qui signifie que toutes les composantes du bruit  $|x', n\rangle$  après traitement sont des variables aléatoires (i) statistiquement indépendantes de même variance :

$$r^2 = \frac{t_2 \mathcal{P}_{F, n}}{\dim \mathcal{P}_{F, n}} \equiv t_2 P / \dim P = 1$$

Elle sont centrées, puisque l'estimateur est non biaisé ; gaussiennes, puisque le bruit d'entrée l'est aussi et que la transformation par projection est linéaire.

On en déduit également que le rapport signal à bruit et le test d'estimation  $\langle \hat{Y}, n | Z', n \rangle$  sont identiques à un coefficient numérique près  $t_2 P = M$ .

N.B. Dans toute la suite de ce papier nous prendrons donc pour test :

$$Y = \text{Log} \langle \hat{Y}, n | Z', n \rangle$$

plutôt que :  $Y = \text{Log} \frac{1}{M} \langle \hat{Y}, n | Z', n \rangle$

● Il résulte du résultat précédent (i), que la loi de densité de probabilité de  $\langle x', n | X', n \rangle$  est une loi du  $\chi^2$  de dimension M.

Par conséquent, celle du test Y s'obtient par changement de variable  $v = e^k$  (fonction continue, positive, montone) :

$$f(v) dv = P_2 [v \leq Y \langle v + dv \rangle] = \frac{1}{2^{M/2} \Gamma(M/2)} \cdot \exp\left[\frac{M}{2} v - \frac{1}{2} v^2\right]$$

qui passe par un maximum pour  $v = \text{Log} M$

Dans le cas des signaux MAD dipolaires  $M = 3$ , d'où :

$$f_3(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[\frac{3}{2} v - \frac{1}{2} v^2\right]$$

de moyenne  $m_0 = 0,819$  et de variance  $\sigma_0^2 = 0,619$ .

La figure No 12 représente cette loi pour  $M = 2, 3, 4, 8, 16$  et 32.

On démontre aisément que  $f_M(v)$ , pour M assez grand, tend vers une gaussienne de moyenne Log M, d'extremum  $\sqrt{\frac{M}{2\pi}}$ , de variance  $2/M$ . La figure No 11 représente cette tendance pour  $M = 3$  et  $M = 16$ , après centrage.

En conclusion de ce paragraphe, on peut dire que tous les détecteurs intervenant dans l'ambiguïmètre destiné à localiser la cible seront caractérisés par les mêmes courbes opérationnelles qui vont être déterminées dans les paragraphes suivants.

4. PROBABILITÉ DE FAUSSES ABSENCES :

Soit  $H_0$  l'hypothèse d'absence de signal MAD dans le bruit :

$$P_{Fa} = P_2 [Y > k | H_0] = P_2 [e^Y > e^k | H_0]$$

Par conséquent :

$$\alpha = P_{Fa} = \int_{e^k}^{+\infty} \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \cdot e^{-v/2} \cdot dv$$

où k est le seuil de détection.

soit :

$\alpha$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$
k	1,833	2,429	2,920	3,050	3,254	3,423	3,569	3,692	3,803	3,903

La figure No 13 représente le taux de fausses alarmes en fonction du seuil de détection k.



5. PROBABILITÉ DE DÉTECTION :

Soit  $\mathcal{H}_1$ , l'hypothèse de présence d'un signal MAD dans le bruit.

$$P_d = P_n[Y > k / \mathcal{H}_1] = P_n[e^Y > e^k / \mathcal{H}_1]$$

Il est toujours possible de trouver (par changement de base) une base de l'espace des signaux MAD, de projecteur P, telle que  $\exp(Y)$  se mette sous la forme :

$$e^Y = \left[ \sqrt{\frac{2E}{N_0}} + x \right]^2 + y^2 + z^2$$

où  $x, y, z$  sont les composantes de  $|z', n\rangle$  de variance 1, comme nous l'avons vu, E l'énergie du signal MAD à détecter et  $\frac{N_0}{2}$  la densité de bruit définie par :

$$\frac{N_0}{2} = \frac{1}{N} \cdot \ln \Gamma \quad \text{avec } N > \max \left[ \frac{B \cdot T'}{2\pi} \right]$$

On a donc :

$$P_d = P_n \left[ \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} + x \right)^2 + y^2 + z^2 > e^k / \mathcal{H}_1 \right]$$

Le calcul exact de cette probabilité passe par l'évaluation de l'intégrale triple suivante :

$$P_d = \iiint_V \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} + x \right)^2 + y^2 + z^2 \right] \right] \cdot dx dy dz$$

où V est le volume compris entre les sphères de rayon  $e^k$  et  $+\infty$ , centrées à l'origine.

● Nous proposons d'approcher cette probabilité en remplaçant  $y^2$  et  $z^2$  par leurs espérances mathématiques soit 1, si bien que :

$$P_d \approx P_n \left[ \sqrt{\frac{2E}{N_0}} > \sqrt{e^k - 2} - x / \mathcal{H}_1 \right]$$

soit :

$$P_d \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\sqrt{e^k - 2} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{u^2}{2} \right] \cdot du$$

Posons :

$$d = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \quad \text{et} \quad t = d - \sqrt{e^k - 2}$$

Connaissant  $P_d$ , il est possible de calculer t :

$$P_d = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp \left[ -u^2/2 \right] du$$

soit :

$P_d$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
t	-1,28	-0,84	-0,53	-0,26	0	0,26	0,53	0,84	1,28	1,65	2,33

et par conséquent le seuil nécessaire pour atteindre  $P_d$ , à d donné :

$$k = \log_2 \left[ 2 + (d-t)^2 \right]$$

La figure No 14 représente l'abaque  $P_d$  en fonction du seuil k, paramétré en valeur de d.

L'approximation que nous avons prise n'est valable que pour  $P_d$  au moins supérieure à 0,2.

6. CARACTÉRISTIQUES DU DÉTECTEUR :

● Il s'agit de l'abaque  $P_d$  en fonction de d, paramétré par le taux de fausses absences  $\alpha$ .

On l'obtient en éliminant k dans les deux expressions  $P_d(k)$  et  $\alpha(k)$ .

Ainsi pour  $\alpha$  donné, la planche No 13 fournit k.

Pour  $P_d$  donné, on obtient t par le tableau ci-dessus et d par :

$$d = t + \sqrt{e^k - 2}$$

La figure No 15 représente ces caractéristiques.

● Indice de performances du détecteur :

Par définition :

$$P = \frac{(m_1 - m_0)^2}{\sigma_y^2}$$

avec :  $m_1 = E[Y / \mathcal{H}_1]$   $K_{m_0} = E[Y / \mathcal{H}_0] = 0,819$

En première approximation, nous prendrons  $\left( \frac{E}{N_0} \right)$  and :

$$(m_1 - m_0)^2 \approx \log^2 d^2 = 2 \log^2 d$$

Par ailleurs  $\sigma_y^2 = 0,619$ , ce qui donne :

$$P \approx 6,46 \log^2 d \quad \text{ou} \quad d \approx \exp \left[ 0,393 \sqrt{P} \right]$$

Sur la figure No 15, nous avons ajouté cette échelle  $\sqrt{P}$  sur l'axe des abscisses en plus de l'échelle d.

7. CONCLUSION :

Les courbes opérationnelles du détecteur-estimateur MAD optimal ont été établies. Elles sont valables pour tous les points de la surface d'estimation de la plus courte distance à la cible et de la position, en temps réel, de l'avion par rapport au plan de cible (sous réserve d'une représentation réduite des courbes iso-critères).

On notera la très grande sensibilité de  $\alpha$  et de  $P_d$  au seuil k : celui-ci devra être choisi avec le plus grand soin.

Il est important que le projecteur  $\mathcal{S}_{\eta u}$  ne détruise pas trop le produit  $B \cdot T'$  des signaux MAD afin de préserver toute l'information nécessaire à caractériser la cible.

Il conviendrait maintenant de relier ces caractéristiques à la portée.

L'auteur tient à remercier la Société CROUZET pour lui avoir autorisé à diffuser ces résultats et rappelle que la mise en œuvre de l'ambiguimètre sur système informatique d'étude embarqué à bord d'avion a été faite par M.J.M. GLINER de la Société CROUZET en 1978-79. (5)

RÉFÉRENCES :

- (1) Estimation de la position, de l'immersion, de la vitesse et du cap d'une cible sous-marine. J.P.R. LETOUZEY. Documents CROUZET S.A. Tomes I à IX, 1974 à 1976. Contrat DRET/GR1.
- (2) Estimation de la position, de l'immersion, de la vitesse et du cap d'une cible sous-marine. Rapport de synthèse Phases I et II. J.P.R. LETOUZEY. Documents CROUZET S.A. 26/3243 du 22.11.79.
- (3) Military Electronics Defence EXPO 77. 27 septembre 1977 - Wiesbaden. J.P.R. LETOUZEY. ASW Magnetometric Systems. Détection-Estimation formelle. GRETSI mai 1979, papier No 20. J.P.R. LETOUZEY.
- (4) Architecture d'un système adapté au traitement du signal. GRETSI mai 1979, papier No 58. J.M. GLINER.

LIMITE THÉORIQUE DES PERFORMANCES D'UN DÉTECTEUR M.A.D. OPTIMAL

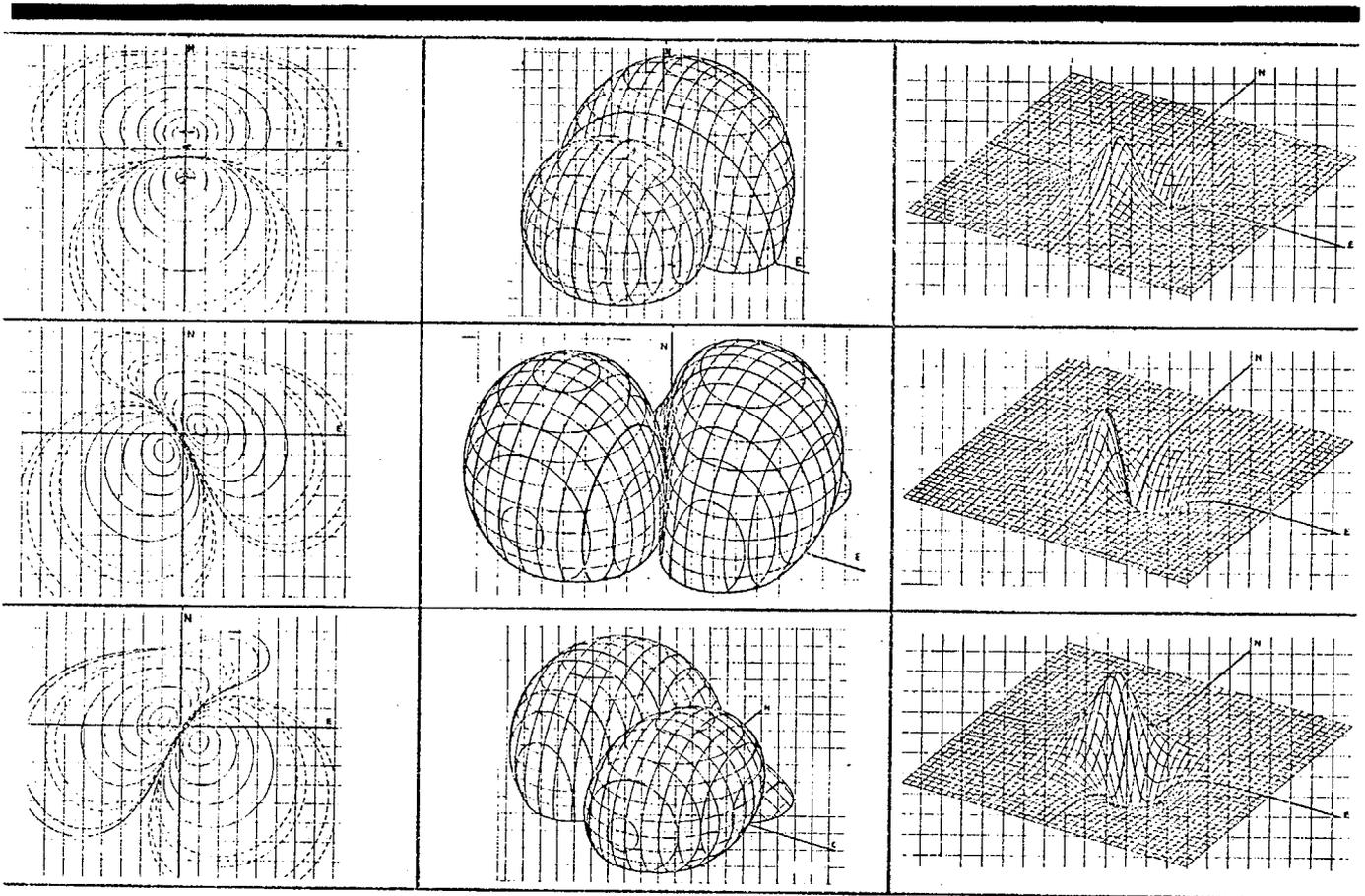


Figure No 1

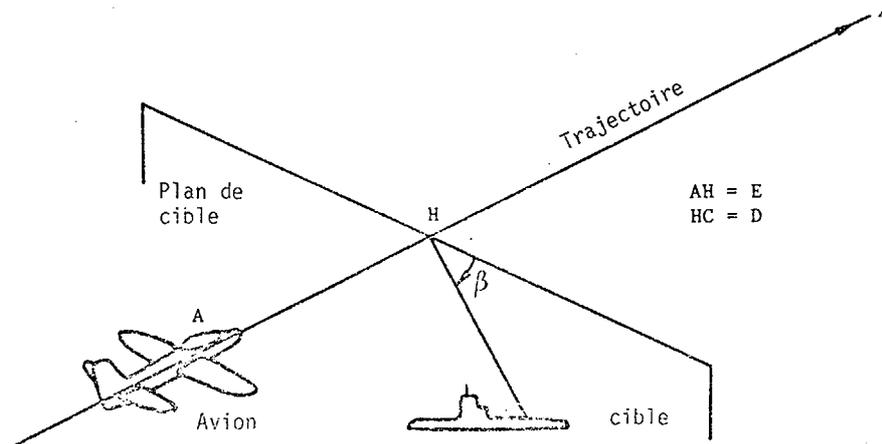


Figure No 2

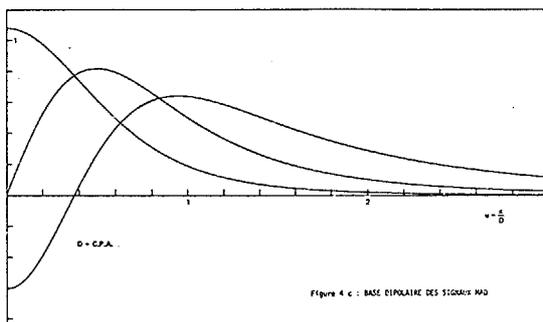


Figure No 3

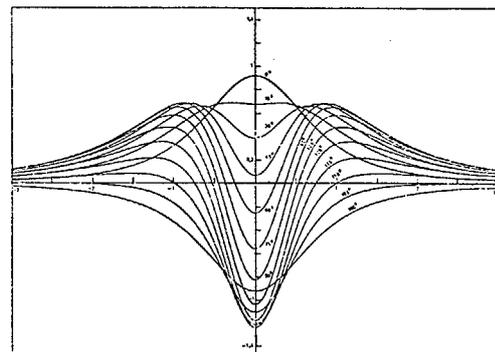


Figure No 4



LIMITE THÉORIQUE DES PERFORMANCES D'UN DÉTECTEUR M.A.D. OPTIMAL

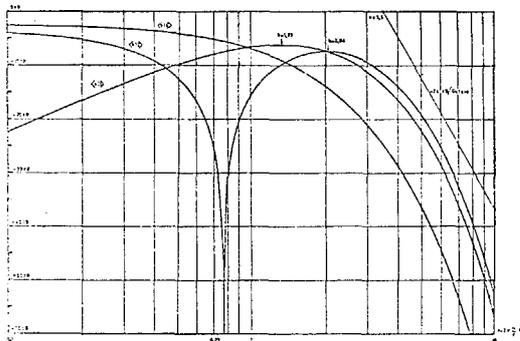


Figure No 5

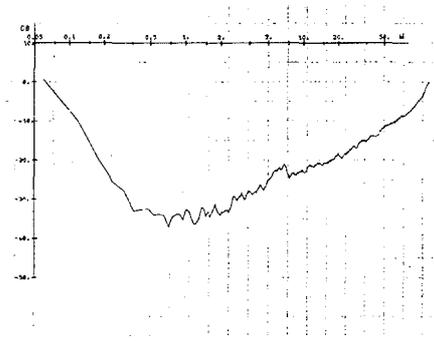


Figure No 6

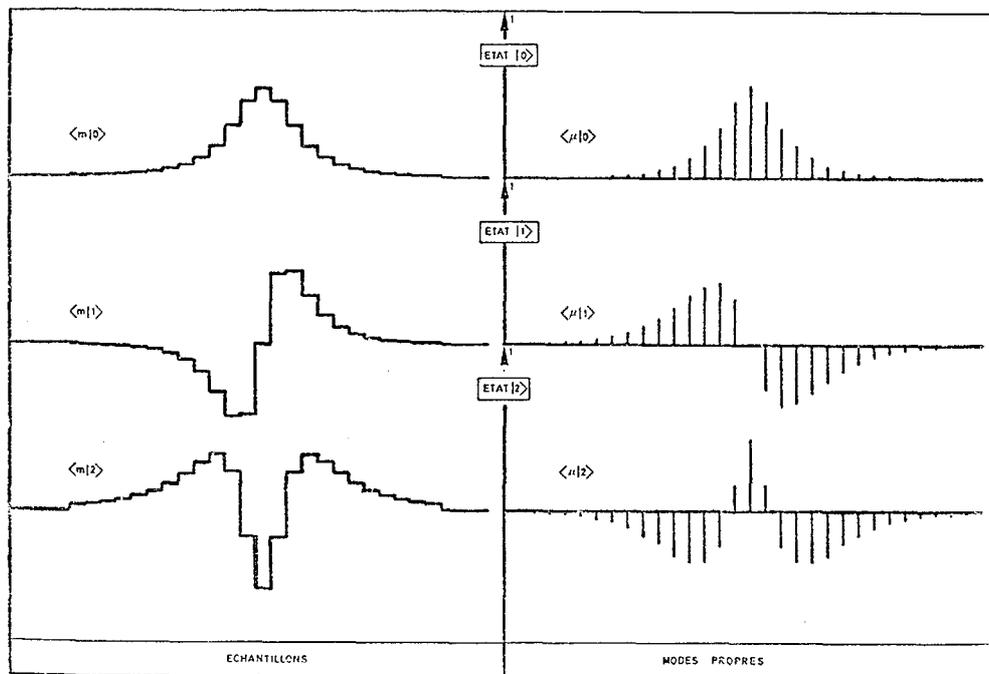


Figure No 7

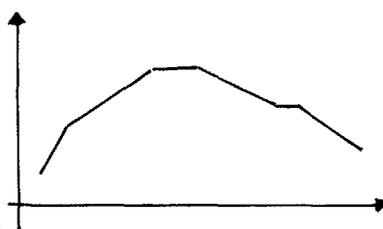


Figure No 8

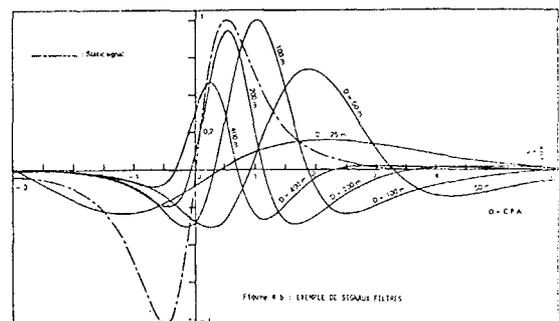


Figure No 9

LIMITE THÉORIQUE DES PERFORMANCES D'UN DÉTECTEUR M.A.D. OPTIMAL

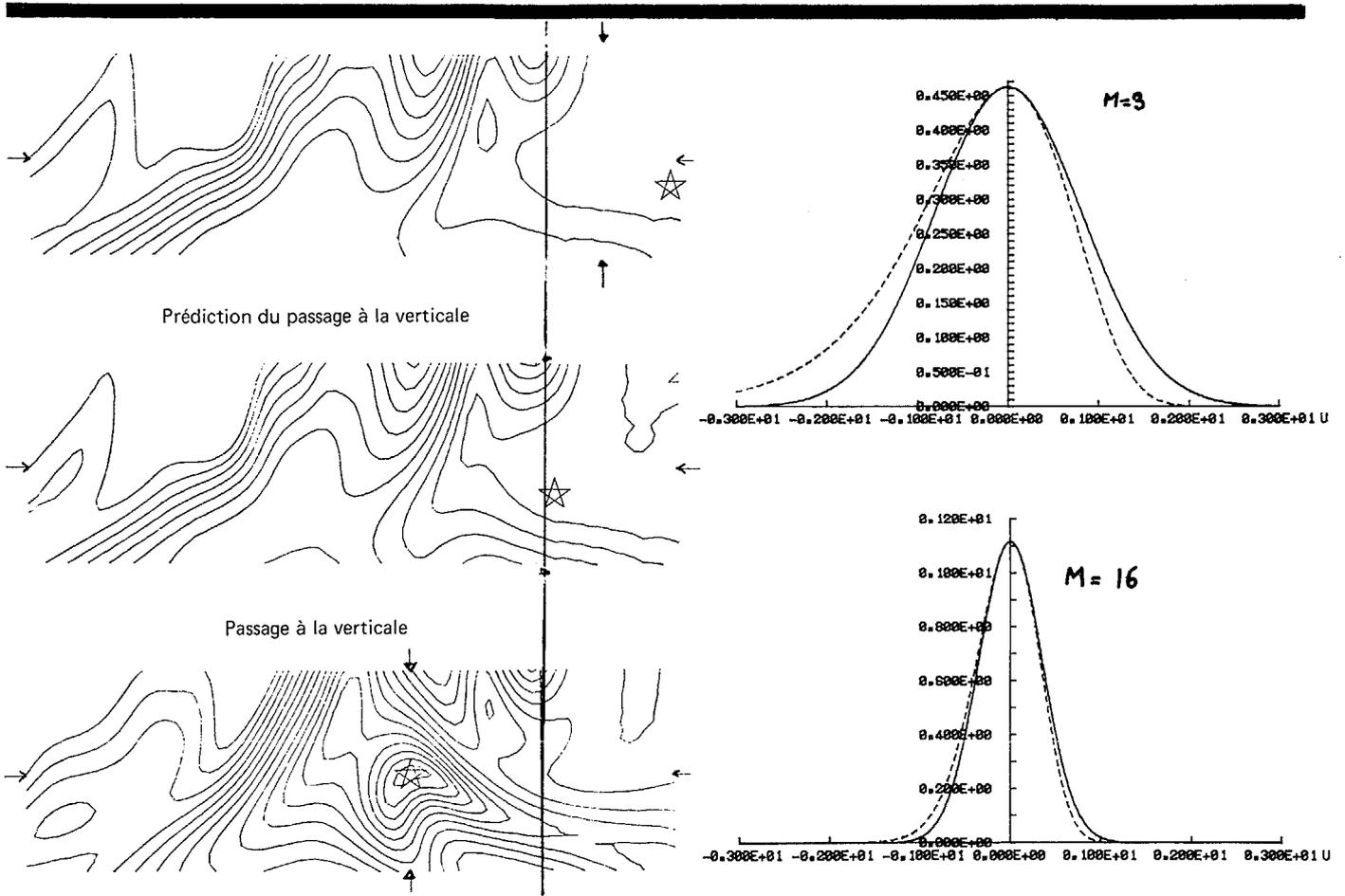


Figure No 10

Figure No 11

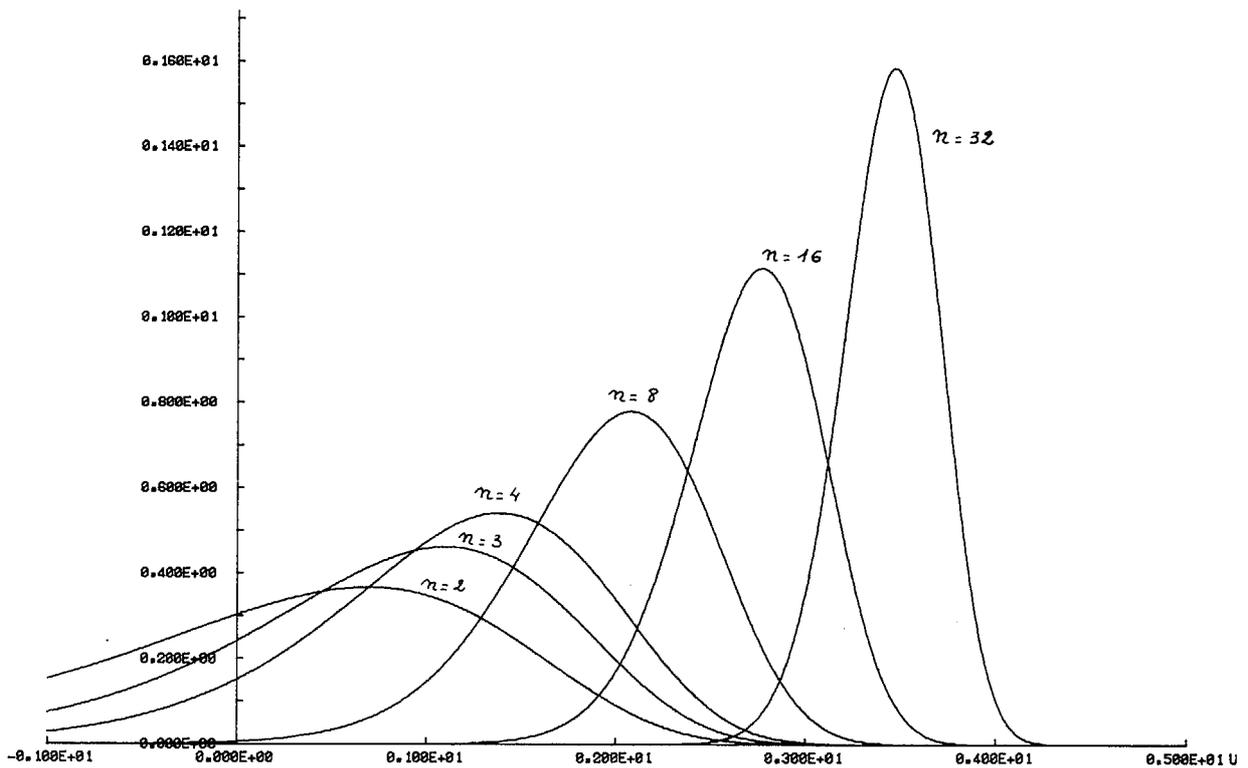


Figure No 12



LIMITE THÉORIQUE DES PERFORMANCES D'UN DÉTECTEUR M.A.D. OPTIMAL

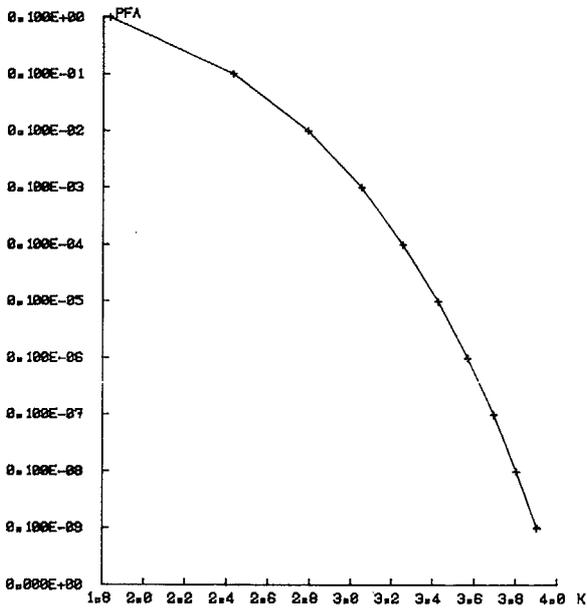


Figure No 13

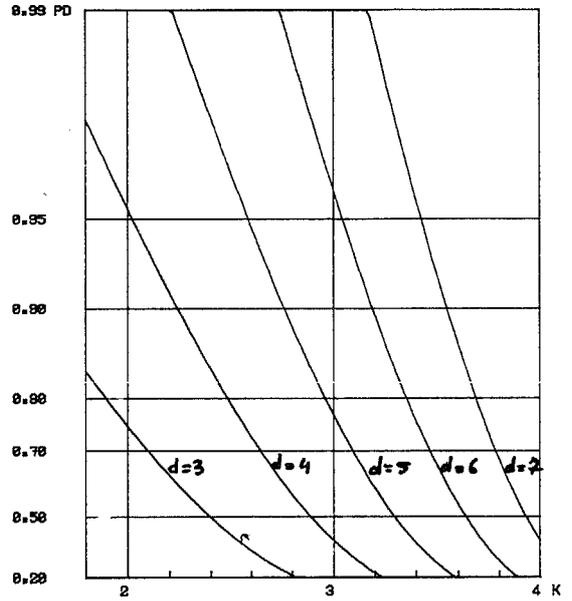


Figure No 14

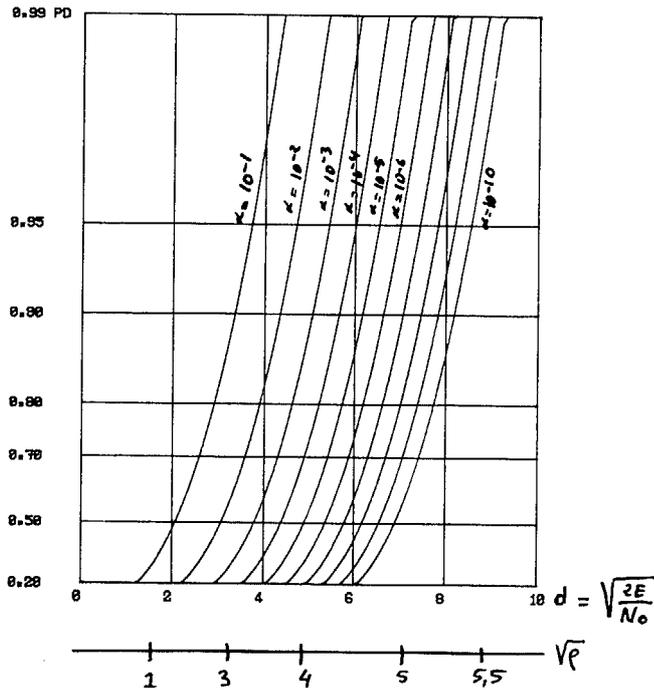


Figure No 15