



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

EXTRACTION DES VECTEURS PROPRES DE MATRICES DE TOEPLITZ

F. GIANNELLA

C. GUEGUEN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS DEPARTEMENT SYSTEMES ET COMMUNICATIONS
46 RUE BARRAULT 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

SUMMARY

Le problème de l'extraction des vecteurs propres d'une matrice de Toeplitz R est commun à des nombreux domaines : en analyse du signal, elle est la base de la décomposition de Karhunen Loève ; en théorie des antennes, elle permet la détection du nombre de sources et de leur orientation ; en modélisation, elle constitue le fondement de la détection de sinusoïdes dans le bruit (méthodes du type Pisarenko).

Dans un premier temps, on montre comment les techniques classiques peuvent être accélérées par l'utilisation du caractère Toeplitz. Ainsi la recherche du vecteur propre correspondant à la valeur propre minimale peut être entreprise par la méthode de la puissance itérée appliquée à l'inverse de R déterminée par l'algorithme de Trench ou à la matrice $(\sigma I - R)$ où σ est une borne supérieure de la valeur propre maximale déterminée de façon spécifique.

Mais l'approche la plus fructueuse consiste à développer des techniques spécifiques. On propose ici des solutions utilisant fondamentalement dans la boucle d'itération l'algorithme de Levinson. La recherche du vecteur propre est menée en profitant de la convergence de la solution vers la prédiction linéaire usuelle. La valeur propre est estimée par un développement limité de l'adjointe ou par l'algorithme du Point Fixe.

On introduit une méthode, appelée du Faisceau Singulier, qui intègre dans l'itération de Levinson un premier pas de la puissance itérée. Cette méthode, dont la convergence vers la plus petite valeur propre n'est cependant pas prouvée dans tous les cas, paraît fournir un bon compromis entre précision et temps de calcul. La procédure converge en quelques itérations ($\sim 4,5$) pour des dimensions moyennes (~ 10) avec un coût de calcul très inférieur aux méthodes classiques.

The problem of extracting eigen vectors from Toeplitz matrices is common to various areas : in signal processing, it gives a basis for the K.L. expansion ; in antenna arrays it provides the number and location of emitting sources ; in signal modelling, it yields the detection of sinewaves in noise (Pisarenko like methods). This paper shows how the traditional numerical analysis methods can be accelerated using the Toeplitz structure of the matrix R under study : the successive powers method can be applied on R^{-1} as computed by the Trench algorithm or on $(\sigma I - R)$ where σ is a specific bound on the max eigenvalue of R . But more fruitful is the use of specially designed techniques where the well known and efficient Levinson algorithm is iterated in a recursion loop to take advantage of the convergence of linear prediction to the eigenvector in case of zero eigenvalue. Moreover, a special singular pencil method is introduced mixing the Levinson and successive powers procedures. This method converges in a few steps ($\sim 4,5$) for average dimensions (~ 10) with a favourable computation cost. But convergence is not insured in all cases to the true minimum eigenvalue depending on the closeness of the smaller eigenvalues and the stability of the corresponding eigen-model.



1. MOTIVATION

Dans de nombreux domaines on est conduit à extraire les valeurs propres et vecteurs propres associés d'une matrice dont la structure est de Toeplitz.

Dans l'étude des processus aléatoires stationnaires échantillonnés, la matrice de corrélation renferme les propriétés statistiques du moment du second ordre. Elle possède dans son essence le caractère Toeplitz symétrique.

En Théorie des Antennes le nombre de sources d'ondes planes statistiquement indépendantes dans un milieu isotrope est égal au rang r (nombre de valeurs propres non nulles) de la matrice de densité spectrale. Dans le cas de capteurs equi-répartis en nombre supérieur à r , cette matrice possède la forme de Toeplitz. Chaque valeur propre étant associée à une source, les vecteurs propres donnent leur direction.

Dans de nombreux problèmes, il est intéressant d'appliquer la décomposition de Karhunen-Loève à un vecteur de données constitué par les échantillons successifs d'un signal stationnaire : analyse de données, codage par transformation en transmission numérique, réduction de redondance, compression de données. La base considérée est alors l'ensemble des vecteurs propres de la matrice d'autocorrélation R .

Un problème classique est la détection de sinusoides noyées dans du bruit blanc. Une des approches les plus appropriées est celle de PISARENKO [1], qui donne comme solution pour les paramètres du modèle, les éléments du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice d'autocorrélation.

Dans le même esprit, des développements limités peuvent être utilisés pour approximer R , ce qui donne des familles de spectres intermédiaires entre celui de la méthode de PISARENKO (Spectre de Raies), l'estimation spectrale par le Maximum de Vraisemblance et par le Maximum d'Entropie [2].

En détection, les coefficients du filtre qui maximisent le rapport signal à bruit est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de l'équation caractéristique généralisée [3] :

$$Ra = \lambda W a$$

où R est la matrice de corrélation du signal et W , celle du bruit.

Dans le cas où le bruit est blanc l'équation propre devient simple et si le signal à détecter est stationnaire l'on retrouve le caractère Toeplitz dans R .

En traitement des signaux stationnaires perturbés par un bruit blanc, l'annulation de l'effet du bruit est soumise à une borne limite supérieure au dessus de laquelle la matrice de corrélation ne sera plus définie positive. Cette borne est la plus petite valeur propre de R calculée à partir du signal bruité.

Toutes ces constatations fournissent une motivation importante pour calculer de façon efficace les vecteurs propres d'une matrice de Toeplitz.

Malgré les propriétés particulières de ces matrices on ne trouve pas dans la littérature de méthode rapide d'extraction de vecteurs propres - valeurs propres, spécifique pour une Toeplitz de dimension réduite, et l'on est contraint à faire appel à des techniques classiques pour les matrices symétriques (Jacobi, Givens-Householder, ...) ou générales (puissance itérée + déflation) qui sont assez coûteuses en calcul.

Il faut cependant noter l'exception des matrices de Toeplitz circulantes et celles de dimension infinie où cette détermination est en fait explicite [4] [5]. Cette lourdeur des calculs traditionnels a pu entraîner une désaffection de la méthode de Pisarenko au profit de la méthode du maximum d'entropie même dans les cas (sinusoïdes) où cette première s'applique naturellement.

Par contre, un effort particulier a été consacré récemment au développement de méthodes rapides pour la

solution des "équations normales" résultant du maximum d'entropie et de la prédiction linéaire (algorithme de Levinson et ses diverses généralisations). L'idée fondamentale qui sous-tend cet article est la recherche d'algorithmes rapides pour les vecteurs propres basés sur l'utilisation intermédiaire de l'algorithme classique de Levinson. Trois méthodes sont ainsi proposées :

- . Développement limité de l'équation caractéristique.
- . Méthode du Point Fixe.
- . Méthode du Faisceau Singulier.

2. PROPRIETES DE TOEPLITZ. RAPPELS.

Définition : R est de Toeplitz si

$$r_{ij} = r_{|i-j|} \quad i, j = 0, 1, \dots, p \quad (1)$$

Les propriétés de ces matrices dans le cas de dimension infinie ont été amplement étudiées [4] [6] [7] mais des particularisations dans le cas fini sont parfois ardues voire inextricables.

Ces matrices forment un cas particulier des matrices centrosymétriques

$$R = J R J \quad (2)$$

$$J R = R J, \quad J = J^{-1}$$

où J est l'opérateur qui renverse l'ordre des lignes (colonnes) d'une matrice quand il est appliqué à gauche (droite).

De ce fait, pour des valeurs propres simples, ses vecteurs propres sont symétriques ou antisymétriques.

$$u_i = \pm J u_i \quad (3)$$

Ses polynômes propres sont par conséquent auto-réciproques :

$$U(z) = \pm U^*(z) \quad (4)$$

Si la dimension de R est paire, le nombre de vecteurs symétriques est égal à celui d'antisymétriques. Si la dimension est impaire il y aura un vecteur symétrique de plus par rapport aux antisymétriques.

Comme en modélisation la notion d'ordre (p) d'un processus est associée à une matrice de dimension ($p + 1$) conservons ces notations par commodité.

Soit la décomposition de R

$$R = \sum_{i=0}^p \lambda_i u_i u_i^T = U \Lambda U^T \quad (5)$$

où

u_i sont ses vecteurs propres et λ_i les valeurs propres associées rangées par valeurs croissantes :

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$$

$$U = [u_0, u_1, \dots, u_p] = [v_0, v_1, \dots, v_p]^T$$

où

u_i sont les vecteurs colonnes et v_i les vecteurs lignes.

$$\Lambda = \text{diag} [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p]$$

$$U \text{ est orthonormale } \begin{cases} u_i u_j^T = \delta_{ij} \\ v_i v_j^T = \delta_{ij} \end{cases}$$

EXTRACTION DES VECTEURS PROPRES DE MATRICES DE TOEPLITZ

Avec $w_i = i^{\text{ème}}$ élément de v_0 , $\epsilon_i w_i = i^{\text{ème}}$ élément de v_p , $\epsilon_i = \pm 1$

$$\sum_{i=0}^p \epsilon_i w_i^2 = 0 \quad (\text{car } v_0 v_p^T = 0) \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^p w_i^2 = 1 \quad (\text{car } v_0 v_0^T = 1)$$

La liaison entre le vecteur de prédiction linéaire et les vecteurs propres de R est assurée par :

$$a^T = [\alpha \ 0 \ \dots \ 0] R^{-1} \quad \frac{1}{\alpha} = \sum_i \frac{w_i^2}{\lambda_i} \quad (7)$$

$$a = \alpha \sum_{i=0}^p \frac{w_i}{\lambda_i} u_i \quad \alpha: \text{erreur de prédiction}$$

Quand $\alpha = 0$ la matrice R est singulière et le vecteur de prédiction coïncide avec le vecteur propre associé à la valeur propre nulle.

3. ACCELERATION DE LA PUISSANCE ITEREE (P.I)

Dans l'article nous nous intéressons particulièrement à la détermination de la plus petite valeur propre et vecteur propre associé de R.

Parmi les méthodes classiques celle qui est la plus appropriée à l'extraction de la plus grande valeur propre d'une matrice est celle de la Puissance Itérée (P.I.).

$$\lambda_{\max} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{R^k x}{R^{k-1} x} \right]_j \quad \begin{matrix} x: \text{vecteur} \\ j: \text{indice d'élément de} \\ \text{vecteur} \end{matrix} \quad 0 < j \leq p \quad (8)$$

L'application à la valeur propre minimale nécessite l'inversion de R. Celle-ci (Toeplitz symétrique) peut être réalisée avec un coût de calcul réduit par l'algorithme de TRENCH [8] qui est proportionnel à p^2 , par rapport aux méthodes classiques d'inversion de matrices symétriques (proportionnel à p^3).

La convergence de la P.I. n'est pas assurée quand les deux plus grandes valeurs propres de R^{-1} sont très proches (λ_1/λ_0 petit par rapport à λ/λ_0).

Si les autres vecteurs propres sont à déterminer, on y associe la procédure classique de DEFLATION [9].

Pour éviter l'inversion de R on peut aussi déterminer une borne supérieure σ_s de la valeur propre maximale et utiliser la P.I. sur

$$R' = (\sigma_s I - R) \quad \lambda_{\max}(R') = \sigma_s - \lambda_{\min}(R) \quad (9)$$

Malheureusement, il n'y a pas de méthode fiable, à notre connaissance, pour la détermination de la borne inférieure (σ_I) de la plus petite valeur propre d'une matrice définie positive ($\sigma_I > 0$). Les méthodes existantes dans le cas général donnent des σ_I négatives, déjà pour des dimensions petites (3)

Nous présentons trois méthodes connues écrites ici uniquement pour σ_s , tenant en compte le caractère Toeplitz de R.

a) Méthodes de FARNELL, PARKER, BROWNE [10] (équivalentes dans le cas symétrique)

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \max \{ T_k \} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, p/2 ; p \text{ pair} \\ T_0 &= \sum_{i=0}^p |r_i| \quad , \quad k = 0, 1, \dots, (p+1)/2 ; p \text{ impair} \\ T_k &= T_{k-1} + |r_k| - |r_{p+1-k}| \end{aligned} \quad (10)$$

b) Théorème de BRAUER [10]

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \max \{ r_0 + (P_k P_\lambda)^{1/2} \}, k \neq \lambda \\ P_k &= T_k - r_0 \end{aligned} \quad (11)$$

c) Méthode de SLEPIAN et LANDAU [11]

$$\begin{aligned} U_p &: \text{borne supérieure à l'ordre } p \text{ (dim. } p+1) \\ U_0 &= r_0 \\ U_i &= \frac{1}{2} |r_0 + U_{i-1} + \sqrt{(r_0 - U_{i-1})^2 + 4b_i}| \\ b_i &= \sum_{j=0}^{i-1} r_{|i-j|}^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_i^2 \quad i = 1, \dots, p \\ \sigma_s(R_i) &= U_i \end{aligned} \quad (12)$$

Des comparaisons ont été faites entre b) et c). Nous avons observé que la méthode de BRAUER donne des résultats plus fins dans la plupart des cas. De plus elle est moins lourde en temps de calcul.

4. UTILISATION D'UN DEVELOPPEMENT DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE

Les méthodes présentées ici, profitent du fait que l'équation propre

$$Ra = \lambda a$$

converge vers la prédiction linéaire classique quand la plus petite valeur propre de R tend vers zéro. Les techniques envisagées sont donc proches de celles où l'on veut enlever la composante d'un bruit blanc entachant le signal.

$$\begin{cases} (R_{p-1} - \epsilon I) a = -r \\ r_0 - \epsilon + a^T r = 0 \end{cases} \quad (13)$$

(13) aura pour solution la valeur propre minimale de R_p (dimension $p+1$) : $\epsilon = \lambda_0$

$$\epsilon = r_0 - r^T (R_{p-1} - \epsilon I)^{-1} r \quad (14)$$

Pour calculer ϵ on peut utiliser un développement de l'équation caractéristique :

$$(R_{p-1} - \epsilon I)^{-1} = R_{p-1}^{-1} + \epsilon R_{p-1}^{-2} + \epsilon^2 R_{p-1}^{-3} + \dots + \epsilon^{n_R - n - 1} R_{p-1}^{-n} + \dots \quad (15)$$

qui peut être limité au premier et au second ordre :

$$a) (R_{p-1} - \epsilon I)^{-1} \approx R_{p-1}^{-1} + \epsilon R_{p-1}^{-2} \quad (16)$$

$$\epsilon = \frac{a^T R_p a}{a^T a} = \frac{\alpha}{a^T a} \quad (17)$$

qui n'est rien d'autre que le quotient de Rayleigh

$$\begin{aligned} \text{On a par ailleurs :} \\ \mu_i = \alpha \frac{w_i}{\lambda_i} \quad \epsilon = \frac{\sum_i \lambda_i \mu_i^2}{\sum_i \mu_i^2} \end{aligned} \quad (18)$$

ϵ peut être aussi écrit comme :

$$\epsilon = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & R_p^{-1} & & \\ & & R_p^{-2} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_p^{-1} x \\ R_p^{-2} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}} \quad j = 0 \quad (19)$$



Cette expression constitue le premier pas de la puissance itérée avec un choix particulier pour x , $x^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ cf ((8)).

ϵ étant supérieur à λ_0 , la matrice $R' = [R_{p-1} - \epsilon I]$ n'est pas définie positive.

On constate en pratique que la convergence vers λ_0 ne se vérifie pas toujours. Il faut pour cela que λ_0 soit très petite et assez éloignée des autres valeurs propres.

$$b) (R_{p-1} - \epsilon I)^{-1} \approx R_{p-1}^{-1} + \epsilon R_{p-1}^{-2} + \epsilon^2 R_{p-1}^{-3} \quad (20)$$

$$-b^T b + [(b^T b)^2 + 4\alpha(a^T R_{p-1}^{-1} a)]^{1/2}$$

$$\text{On trouve } \epsilon = \frac{2 a^T R_{p-1}^{-1} a}{\dots} \quad (21)$$

$$b^T = [1 \ a]$$

ϵ sera toujours supérieur à λ_0 .

On obtient des valeurs plus proches de λ_0 que dans le cas précédent, mais la convergence n'est toujours pas assurée.

5. ALGORITHME DU POINT FIXE (P.F.) [12]

Partant de la relation existante entre les valeurs propres d'ordres successifs d'une matrice hermitienne [11], qui peut aussi être déduite à partir de (14) par la décomposition de Karhunen-Loève [12] on peut envisager de construire un algorithme itératif qui converge vers λ_0 .

$$r_0 - \epsilon = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i^{p-1} - \epsilon} \quad \beta_i = r^T u_i^{(p-1)}$$

$$r^T = [r_1 \ \dots \ r_p] \quad (22)$$

u_i^{p-1} vecteurs propres de R_{p-1}

Toute valeur propre de R est une solution de l'équation (22) à condition qu'elle ne soit pas aussi valeur propre de R_{p-1} . Ceci est assurée par l'hypothèse de valeurs propres simples pour R .

De (22) on peut vérifier la propriété d'entrelacement entre les valeurs propres des matrices des mineurs principaux successifs, symétriques (Propriété de STURM) [13].

$$\lambda_0^p \leq \lambda_0^{p-1} \leq \lambda_1^p < \dots \leq \lambda_{p-1}^{p-1} \leq \lambda_p^p \quad (23)$$

L'établissement d'un algorithme du point fixe du premier ordre utilisant (22) ne garantit pas la convergence dans un nombre suffisant de cas. On aura donc recours à un algorithme du 2ème ordre du type :

$$r_0 - \epsilon - \frac{\beta_0^2}{\mu_0 - \epsilon} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\beta_i^2}{\mu_i - \epsilon}, \quad \mu_i = \lambda_i^{p-1} \quad (24)$$

Cette approche est récursive sur l'ordre

$$f(\epsilon) = r_0 - \epsilon - \frac{\beta_0^2}{\mu_0 - \epsilon} \quad h(\epsilon) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\beta_i^2}{\mu_i - \epsilon} \quad (25)$$

Si les conditions de convergence sont satisfaites, la solution à chaque itération sera bornée :

$$0 < \epsilon < \mu_0$$

$$\epsilon = \frac{r_0 + \mu_0 - h_0 - \sqrt{(r_0 + \mu_0 - h_0)^2 - 4(\mu_0 [r_0 - h_0 - \beta_0^2 - \beta_0^2])}}{2} \quad (26)$$

h_0 valeur de $h(\epsilon)$ à l'itération précédente.

Pour initialiser l'algorithme on part de $\epsilon = \epsilon_0$ ($\epsilon_0 = 0$ par exemple)

Condition de convergence : $-f'(\lambda_0) > h'(\lambda_0)$ (27)

6. ALGORITHME DU FAISCEAU SINGULIER

On propose ici un nouvel algorithme dénommé du Faisceau Singulier car la solution à chaque itération peut être vue sous la forme d'une équation propre généralisée dans laquelle les deux matrices à diagonaliser ne sont pas définies positives.

Algorithme :

Initialisation : $\epsilon_0 = 0$ (la meilleure borne inférieure)

$$\tilde{a}_{i+1} = - [R_{p-1} - \epsilon_{i+1} I]^{-1} r \quad i=1, 2, \dots, q \text{ (pas d'itération)} \quad (28)$$

$$\epsilon_{i+1} = \frac{a^T J R_p a}{a^T J a} \quad a^T = [1 \ \tilde{a}_{i+1}] \quad (29)$$

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i + \frac{a^T J (R_p - \epsilon_i I) a}{a^T J a} \quad (30)$$

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i + \frac{k\alpha}{a^T J a} \quad (31)$$

k : dernier coefficient de réflexion

notons que $\cos \theta = \frac{a^T J a}{a^T a}$ est une mesure de la symétrie (ou antisymétrie) du vecteur a .

Comme en (paragraphe 4a) nous pouvons écrire ϵ_{i+1} sous la forme du premier pas de la P.I. avec un choix particulier du vecteur x (cf (8))

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i + \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{R}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} R^{-2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}} = \epsilon_i + \left[\frac{\tilde{R}^{-1} x}{R^{-2} x} \right]_{j=0}$$

$$x^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \quad \tilde{R} = [R_{p-1} - \epsilon_{i+1} I] \quad (32)$$

On note une certaine "ressemblance" du rapport de formes (29) avec le quotient de Rayleigh (17).

$$Ra = \lambda a \quad a^T R a = \lambda a \quad \lambda = \frac{a^T R a}{a^T a} \quad (33)$$

En appliquant l'opérateur J à gauche :

$$J R a = \lambda J a \quad a^T (J R) a = \lambda a^T J a \quad \lambda = \frac{a^T (J R) a}{a^T J a} \quad (34)$$

Dans les deux cas nous avons un faisceau quadratique de formes : le premier est régulier et le deuxième singulier, car J possède des valeurs propres négatives ($J a = -a$)

$$\text{soit } S \quad J R \quad s_{ij} = r_{|p-i-j|} \quad (35)$$

Il est intéressant de noter que le nombre de carrés positifs (π) de la forme

$$a^T (J R) a$$

est égal au nombre de vecteurs propres symétriques de R , ainsi que le nombre de carrés négatifs (ν) est égal au nombre de ses vecteurs propres antisymétriques. Sa signature est nulle pour R de dimension $(p+1)$ paire et égale à 1 pour $(p+1)$ impaire.

Notons aussi que le faisceau singulier est en fait un faisceau de formes bilinéaires dont les matrices sont les mêmes que celles du faisceau régulier

$$\lambda = \frac{(J a)^T R a}{(J a)^T a} \quad (36)$$

7. PROPRIETES DE L'ALGORITHME DU F.S.

On a observé la convergence vers (λ_0, u_0) en un nombre petit d'itérations (3 ou 4 Levinson) dans le cas où la matrice R a été construite à partir des coefficients de corrélation (vrais ou estimés) de processus AR n'ayant que des pôles conjugués, en particulier, des signaux réels prétraités par un filtre passe-bande, dans des applications d'analyse en bande étroite.

Dans le cas général de processus AR, contenant des pôles réels, la convergence a toujours été vérifiée quand l'énergie spectrale est bien distribuée entre $-\pi$ et $+\pi$ dans le cercle unité.

Dans les cas où l'algorithme n'a pas convergé vers λ_0 , la convergence vers λ_1 a été vérifiée, et le polynôme propre correspondant avait toutes ses racines sur le cercle. Pour ces cas, quand on compare la position des fréquences relatives aux pôles du modèle avec celles relatives aux racines des polynômes propres, on s'aperçoit que ce n'est plus $U_0(Z)$ mais $U_1(Z)$ qui possède la position la plus proche.

D'après des simulations de comparaison entre le Faisceau Singulier et le Point Fixe, il nous paraît que les deux méthodes sont soumises à une "loi commune" de convergence, car quand le P.F. diverge, le F.S. converge vers une autre valeur propre que la plus petite. En général vers λ_1 , comme on l'a déjà remarqué. Le coût de calcul reste inférieur pour le F.S..

Comparaisons des complexités de calcul entre la P.I. (avec TRENCH) et le F.S.

$$\text{P.I. } \hat{c} = NI (p^2 + Op) + 2p^2 + 3p$$

$$\text{F.S. } \hat{c} = NI (p^2 + Op)$$

NI : nombre d'itérations

Dans de nombreux essais il a été vérifié un allègement du coût de calcul de 1,5 à 10 fois avec le F.S. par rapport à la P.I., pour une précision donnée.

$$NI (\text{F.S.}) < NI (\text{P.I.})$$

Il est important de souligner ici qu'une étude exhaustive reste à faire pour délimiter les applications de cet algorithme et éventuellement de lui apporter d'améliorations.

Une extension peut être envisageable dans le cas symétrique général (non Toeplitz), où l'inversion de R peut être faite sans trop de calcul par CHOLESKI ou par l'algorithme de MORF [14].

Cette extension trouverait des applications plus larges, notamment en identification, dans les approches de PRONY-AOKI [15], dans le cas non-stationnaire, où la matrice de corrélation ne sera plus de Toeplitz. Une application intéressante serait en modélisation du signal de parole [16].

REFERENCES

- [1] PISARENKO, V.F. "The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function" Geophysics, J.R. Astr. SOC (1973) 33 pp 347-366
- [2] GUEGUEN C., GIANNELLA F. "Les Approches de l'Analyse Spectrale sous l'angle de l'approximation de la matrice de corrélation" GRETSI 81.
- [3] ROBINSON, "Statistical Communication and Detection" London, England : Griffin (1967) Chap. 9.
- [4] SZEGÖ., GRENANDER R. "Toeplitz forms and their applications", Berkeley University of California Press" (1958).
- [5] PAPOULIS A. "Signal Analysis" New York Mc Graw Hill, 1977.
- [6] GRAY R. "On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices" IEEE Trans. on Inf. Theory Vol IT-18 n° 6, nov 1972, pp 725-730.
- [7] WIDOM H. "Toeplitz Matrices" - Hirschman - studies in real and complex analysis - Prentice Hall, 1965.
- [8] ZOHAR S. "Toeplitz Matrix Inversion : The Algorithm of W.F. TRENCH" J. of As. for Comp. Mach., Vol 16 n° 4 Oct. 1969, pp 592-601.
- [9] WILKINSON "The Algebraic Eigenvalue Problem" Oxford University Press, 1965.
- [10] BRAUER A. "Limits for the characteristic roots of a matrix", Duke Math. Journal Vol 13, 1946, pp 387-395, Vol. 14, 1947, pp 21-26.
- [11] SLEPIAN D., LANDAU H. "A note on the Eigenvalues of Hermitian matrices" SIAM J. Math. Anal. Vol 9, n° 2, April 1978, pp 291-297.
- [12] GRADELER, E. "Memoire de fin d'année et rapport de stage" ENST - Paris.
- [13] BELLMAN R. "Introduction to Matrix Analysis" Mc Graw Hill, 1970, chap. 7
- [14] MORF M., DICKINSON B., KAILATH T., VIEIRA A. "Efficient Solution of Covariance Equations for Linear Prediction" IEEE Trans. on ASSP - Vol ASSP-25 n° 5 oct 1977, pp 429-433.
- [15] AOKI M., YUEP. "On a priori error estimates of some identification methods" IEEE Trans. on Aut. Contr. AC - 15, n° 5, Oct. 1970, pp 541-548.
- [16] LE ROUX J., GIANNELLA F., "Whiteness criteria for ARMA models Identification "ECCTD'81 (European Conference on Circuit Theory and Design) La Haye - Pays Bas, 25-28 Août 1981.

