

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

ERREUR D'ESTIMATION INTERVENANT DANS L'ANALYSE DE FLUCTUATIONS ACCESSIBLES SOUS DE FAIBLES RAPPORTS SIGNAL SUR BRUIT

C. GABRIELLI*, F. HUET*, M. KEDDAM* et L. RAILLON**

* Groupe de Recherche n° 4 du CNRS : "Physique des Liquides et Electrochimie" associé à l'Université P. et M. Curie, 4 place Jussieu 75230 PARIS CEDEX

** Thomson-C.S.F., DASM, Chemin des Travaux, BP. 53 06802 CAGNES-sur-MER

RESUME

On compare l'erreur d'estimation due au temps de mesure fini pour différentes méthodes d'analyse spectrale : estimation de la corrélation directe ou croisée, ou estimation de la densité spectrale de puissance par filtrage dans une fenêtre étroite, ou transformation de Fourier, le plus souvent F.F.T., directement sur le signal ou sur la corrélation.

Dans toutes les méthodes, on peut approximer dans le cas gaussien la variance de l'estimateur par une expression déjà connue. En introduisant la notion de bande équivalente du second ordre on peut généraliser les résultats.

Dans le cas pratique où l'on cherche à estimer le signal constitué par la partie corrélée de deux voies de mesure bruitées, on donne l'influence du bruit sur cette variance par l'intermédiaire d'un rapport signal sur bruit, de définition différente selon la méthode. Ceci permet de préciser l'avantage en rapidité de convergence de l'intercorrélation sur l'auto-corrélation corrigée du bruit, ou même de l'interspectre sur l'autospectre corrigé, qui apparaît dans le cas d'un rapport signal sur bruit faible.

La validité de ce calcul est vérifiée par la mesure de l'erreur d'estimation dans le cas d'une analyse spectrale directe et croisée du bruit thermique de résistances, effectuée par F.F.T. dans un domaine de rapport signal sur bruit allant de 0,01 à 20.

SUMMARY

Statistical errors due to finite time measurement are compared for several different methods of analysis: auto and cross correlation functions, or power spectral density estimation by means of a narrow spectral window, or the Fourier transform, generally F.F.T., applied directly on the signal or on correlation function.

With gaussian signals, the variance of every method's estimator may be approached with already known expressions. We introduce the notion of second order equivalent bandwidth for a general interpretation of results.

A practical problem is to estimate as a signal, the correlated part of two noisy measurement channels. The influence of noise level on the variance of error is given using a specific signal to noise ratio for every method. It is then possible for example to precise the advantage in convergence time, of intercorrelation over autocorrelation corrected from noise, or also of cross over autospectral density. This is noteworthy for low signal to noise ratio.

The validity of this derivation is verified in the case of the statistical error on the measurement of thermal noise of resistors using F.F.T. method for auto and cross spectral densities in a range of signal to noise ratios extending from 0.01 to 20.



1. - INTRODUCTION.

Il est fréquent de rechercher à faire l'analyse spectrale de fluctuations aléatoires noyées dans un bruit parasite important. En particulier, lorsque les fluctuations à mesurer sont très faibles, le bruit propre du système de mesure peut devenir gênant et même prédominant.

On sait qu'une amélioration importante peut être obtenue dans ce cas en utilisant deux voies de mesure identiques et en effectuant l'intercorrélacion ou l'interspectre de ces deux voies, ce qui élimine théoriquement le bruit des voies de mesure.

Les performances de la mesure restent néanmoins dépendantes du rapport signal sur bruit et ce d'autant plus qu'il est faible. Il ne semble pas que l'influence du rapport signal sur bruit sur l'erreur d'estimation due au temps de mesure fini, ait été étudiée de façon systématique.

Le but de cet article est de présenter les résultats obtenus et les interpréter de façon la plus générale possible [1]. On considère les trois méthodes classiques d'analyse :

- Mesure de la fonction d'autocorrélacion ou d'intercorrélacion
- Mesure de la densité spectrale de puissance directe ou croisée par :
 - . filtrage dans une fenêtre étroite + intégration
 - . transformation de Fourier sur le signal ou sur la corrélacion.

2. - POSITION DU PROBLEME.

Le bruit parasite B provient souvent du bruit de la chaîne de mesure, bruit du préamplificateur en particulier. La seule propriété exigée pour différencier le signal S des bruits additifs B₁ et B₂ sur chaque voie est que B₁, B₂ et S soient tous décorrélés :

$$\begin{aligned}
 X &= S + B_1 \rightarrow \text{Corrélacions : } C_{XX} = C_{SS} + C_{B_1 B_1} \\
 Y &= S + B_2 \quad C_{YY} = C_{SS} + C_{B_2 B_2} \\
 &\quad C_{XY} = C_{SS} \\
 \text{Spectres : } S_{XX} &= S_{SS} + S_{B_1 B_1} \\
 &\quad S_{YY} = S_{SS} + S_{B_2 B_2} \\
 &\quad S_{XY} = S_{SS}
 \end{aligned}$$

On ne peut malheureusement mesurer C_{XY} ou S_{XY} que sur un temps de mesure fini T. Les valeurs trouvées par les estimateurs notés C_{XY}^T ou S_{XY}^T ne vont donc qu'approcher C_{SS} ou S_{SS}, et la variance de cette erreur d'estimation va faire intervenir S, B₁ et B₂, en particulier le rapport signal sur bruit.

3. - ESTIMATION DE LA FONCTION DE CORRELACION.

3.1. Propriétés de l'estimateur.

On prendra pour estimateur de l'intercorrélacion :

$$\begin{aligned}
 C_{XY}^T(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T X(t) Y(t-\tau) dt \quad \text{pour } |\tau| < T \\
 &= 0 \quad \text{pour } |\tau| \geq T
 \end{aligned}$$

Cet estimateur est sans biais car :

$$E[C_{XY}^T(\tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T E[\bar{X}(t) Y(t-\tau)] dt = C_{XY}(\tau)$$

Le calcul de la variance de cet estimateur va faire intervenir le moment du 4ème ordre.

On supposera dans toute la suite les signaux gaussiens. On a exactement [2] :

$$\begin{aligned}
 \text{VAR}[C_{XY}^T(\tau)] &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \left(1 - \frac{|\theta|}{T}\right) [C_{XX}(\theta) \cdot C_{YY}(\theta) \\
 &\quad + C_{XY}(\theta+\tau) \cdot C_{YX}(\theta-\tau)] d\theta
 \end{aligned}$$

Il n'est pas restrictif de supposer X et Y centrés. Si l'on suppose alors qu'ils ne comportent pas de composantes sinusoïdales pures, toutes les corrélacions tendent vers 0 pour θ grand. Il existe donc une valeur θ_{MAX} légèrement supérieure au "temps de corrélacion" défini par la suite, au-delà de laquelle on peut négliger la contribution des corrélacions à l'intégrale.

Comme en pratique T >> θ_{MAX}, on peut prendre $1 - \frac{|\theta|}{T} \approx 1$ comme une bonne approximation :

$$\begin{aligned}
 \text{VAR}[C_{XY}^T(\tau)] &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} [C_{XX}(\theta) \cdot C_{YY}(\theta) + C_{XY}(\theta+\tau) \cdot C_{YX}(\theta-\tau)] d\theta \\
 &\text{pour } \tau < \theta_{MAX} \ll T.
 \end{aligned}$$

Pour un temps de mesure T tendant vers l'infini, la covariancia tend vers 0 quel que soit τ < T : l'estimateur est convergent.

Par contre, pour les grandes valeurs de τ, lorsque C_{XY}(τ) devient négligeable, les zones où C_{XY}(θ+τ) et C_{XY}(θ-τ) sont non négligeables tendent à devenir disjointes. On a donc :

ERREUR D'ESTIMATION INTERVENANT DANS L'ANALYSE DE FLUCTUATIONS ACCESSIBLES
SOUS DE FAIBLES RAPPORTS SIGNAL SUR BRUIT

$$\text{VAR}[\bar{C}_{XY}^T(\tau)] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{XX}(\theta) C_{YY}(\theta) d\theta$$

pour $\theta_{\text{MAX}} < \tau < T$

La covariance reste donc importante alors que $C_{XY}(\tau)$ devient négligeable. On en déduit que la précision relative de la corrélation mesurée devient de plus en plus mauvaise lorsque τ augmente.

3.2. Interprétation de la variance.

Dans le cas de l'autocorrélation, la formule précédente se simplifie en :

$$\text{VAR}[\bar{C}_{XX}^T(\tau)] \leq \text{Var}[\bar{C}_{XX}^T(0)] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} 2C_{XX}^2(\theta) d\theta$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{\infty} C_{XX}^2(\theta) d\theta$$

Pour interpréter cette formule classique [3] on définira un temps de corrélation du second ordre :

$$\tau_{\text{cor2}}(X) = \frac{\int_0^{\infty} C_{XX}^2(\theta) d\theta}{C_{XX}^2(0)}$$

par extension de :

$$\tau_{\text{cor1}}(X) = \frac{\int_0^{\infty} C_{XX}(\theta) d\theta}{C_{XX}(0)}$$

Cette grandeur correspond en théorie du radar au pouvoir discriminateur en distance pour un signal donné [4]. Elle permet d'obtenir simplement la variance relative de l'estimateur :

$$\frac{\text{VAR}[\bar{C}_{XX}^T(0)]}{C_{XX}^2(0)} = \frac{4\tau_{\text{cor2}}(X)}{T}$$

Cherchons un équivalent fréquentiel :

$$\tau_{\text{cor2}}(X) = \frac{\int_0^{\infty} S_{XX}^2(f) df}{[\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df]^2}$$

Comme $C(\theta)$ est réel pair, $S(f)$ l'est aussi et ne correspond donc pas à un filtre réalisable. On peut par contre toujours introduire un filtre $G(f)$ tel que attaqué par un bruit blanc de densité P_0 , le spectre en sortie soit $S(f)$:

$$S_{XX}(f) = |G_X(f)|^2 \cdot P_0 \Rightarrow \tau_{\text{cor2}} = \frac{P_0^2 \int_0^{\infty} |G(f)|^4 df}{4P_0^2 \int_0^{\infty} |G(f)|^2 df}$$

On peut alors sur ce filtre G définir une bande équivalente du second ordre :

$$\frac{1}{4\tau_{\text{cor2}}(X)} = \text{Beq}_2(X) = \frac{[\int_0^{\infty} |G_X(f)|^2 df]^2}{\int_0^{\infty} |G_X(f)|^4 df} = \frac{[\int_0^{\infty} S_{XX}(f) df]^2}{\int_0^{\infty} S_{XX}^2(f) df}$$

Cette définition peut être considérée comme une extension de la classique bande équivalente de bruit pour laquelle :

$$\text{Beq}_1(X) = \frac{\int_0^{\infty} |G_X(f)|^2 df}{C_X^2(0)} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) df}{S_{XX}(0)} = \frac{1}{4} \frac{C_{XX}(0)}{\int_0^{\infty} C_{XX}(\theta) d\theta}$$

$$= \frac{1}{4 \tau_{\text{cor1}}(X)}$$

Cette grandeur $\text{Beq}_2(X)$ définie ici intervient dans l'étude du rapport signal sur bruit après détection quadratique [5]. Elle ne dépend que de la forme du spectre $S_X(f)$ ou encore du gabarit du filtre $G_X(f)$, et est indépendante du niveau de puissance P_0 . Elle permet :

$$\frac{\text{VAR}[\bar{C}_{XX}^T(\tau)]}{C_{XX}^2(0)} \leq \frac{\text{VAR}[\bar{C}_{XX}^T(0)]}{C_{XX}^2(0)} = \frac{1}{T \text{Beq}_2(X)}$$

La grandeur Beq_2 définie ici permet de généraliser la classique formule en $\frac{1}{BT}$ [2,3], qui n'était valable que pour un bruit blanc idéalement filtré sur une bande de largeur B .

3.3. Mesure de C_{SS} par autocorrélation corrigée.

Lorsque le bruit est parfaitement stationnaire, ou à plus forte raison s'il est faible, on peut penser obtenir valablement C_{SS} par :

$$C_{SS}(\tau) = C_{XX}(\tau) - C_{BB}(\tau)$$

En effet on peut mesurer $C_{BB}(\tau)$ une fois pour toutes sur un temps $T_B \gg T$. Prenons la meilleure hypothèse et supposons $C_{BB}(\tau)$ parfaitement connu. On a néanmoins :

$$\text{VAR}[\bar{C}_{SS}^T(0)] = \text{VAR}[\bar{C}_{XX}^T(0)] = C_{XX}^2(0) \cdot \frac{1}{T \text{Beq}_2(X)}$$

La variance relative de la grandeur cherchée va donc faire intervenir naturellement le rapport signal sur bruit global en puissance :

$$\eta_P = \frac{C_{SS}(0)}{C_{BB}(0)}$$

$$\frac{\text{VAR}[\bar{C}_{SS}^T(0)]}{C_{SS}^2(0)} = \frac{[C_{SS}(0) + C_{BB}(0)]^2}{C_{SS}^2(0)} \cdot \frac{1}{T \text{Beq}_2(X)}$$

$$= \frac{1}{T \text{Beq}_2(X)} \cdot (1 + \frac{1}{\eta_P})^2$$

3.4. Mesure de C_{SS} par intercorrélation.

Avec les notations du § 2 on obtient à partir de l'expression approchée de $\text{VAR}[\bar{C}_{XY}^T(\tau)]$:

$$\text{VAR}[\bar{C}_{XY}^T(0)] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ [C_{SS}(\theta) + C_{B_1 B_1}(\theta)] [C_{SS}(\theta) + C_{B_2 B_2}(\theta)] + C_{SS}^2(\theta) \} d\theta$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ 2C_{SS}^2(\theta) + C_{SS}(\theta) [C_{B_1 B_1}(\theta) + C_{B_2 B_2}(\theta)] + C_{B_1 B_1}(\theta) \cdot C_{B_2 B_2}(\theta) \} d\theta$$

$$= \text{VAR}[\bar{C}_{SS}^T(0)] + \text{VAR}[\bar{C}_{SB_1}^T(0)] + \text{VAR}[\bar{C}_{SB_2}^T(0)] + \text{VAR}[\bar{C}_{B_1 B_2}^T(0)]$$



Les trois dernières corrélations, si on les estimait séparément, devraient donner 0. Toutefois sur un temps fini leur variance n'est pas nulle. C'est ce qui explique que la convergence de C_{XY}^T est plus lente que celle de C_{SS}^T mesurée sans aucun bruit : la présence d'un bruit ne biaise pas C_{XY}^T mais ralentit sa convergence.

On supposera dans la suite, ce qui est le plus fréquent : $C_{B_1 B_1} = C_{B_2 B_2}$. On obtient grâce aux notations précédentes :

$$\frac{\text{VAR}[C_{XY}^T(0)]}{C_{XY}^2(0)} = \frac{\text{VAR}[C_{XY}^T(0)]}{C_{SS}^2(0)} = \frac{1}{T \text{Beq}_2(S)} + \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_{SS}(\theta) C_{BB}(\theta)}{C_{SS}^2(0)} d\theta + \frac{1}{2\eta_p^2 T \text{Beq}_2(B)}$$

Grâce à l'inégalité de Schwarz, qui n'est égalité que pour $C_{SS} = \lambda C_{BB}$

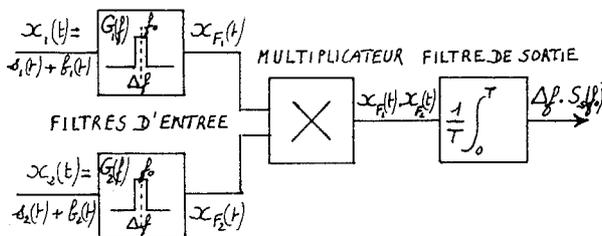
$$\frac{\text{VAR}[C_{XY}^T(0)]}{C_{SS}^2(0)} \leq \frac{1}{T \text{Beq}_2(S)} + \frac{1}{\eta_p T \sqrt{\text{Beq}_2(S)} \cdot \text{Beq}_2(B)} + \frac{1}{2\eta_p^2 T \text{Beq}_2(B)}$$

Lorsque C_{SS} et C_{BB} sont proportionnels, les gabarits G_S et G_B sont identiques, c'est-à-dire $\text{Beq}_2(S) = \text{Beq}_2(B)$. De plus, l'inégalité de Schwarz devient alors égalité :

$$\forall \tau, C_{SS}(\tau) = \eta C_{BB}(\tau) \Rightarrow \frac{\text{VAR}[C_{XY}^T(0)]}{C_{SS}^2(0)} = \frac{1}{T \text{Beq}_2} \left(1 + \frac{1}{\eta_p} + \frac{1}{2\eta_p^2} \right)$$

La comparaison des termes en $1/\eta^2$ montre alors que les performances de convergence de l'intercorrélacion sont meilleures que celles de l'autocorrélacion corrigée. Les formules obtenues ici précisent un résultat asymptotique déjà connu [6] disant que pour η tendant vers 0 l'intercorrélacion est $\sqrt{2}$ fois plus précise pour le même B.T.

4. - ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE PAR FILTRAGE.



Si l'on considère le filtre de sortie comme un vrai intégrateur, l'estimateur est exactement une corrélacion de point 0 :

$$\frac{1}{T} \int_0^T x_{F1}(t) \cdot x_{F2}(t) dt = C_{XF1XF2}^T(0)$$

Pour que la mesure ait un sens les signaux doivent être harmonisables. La classique formule des interférences donne [7] :

$$C_{XF1XF2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \nu \tau} G_1(\nu) G_2^*(\nu) S_{X1X2}(\nu) d\nu$$

Lorsqu'il n'y a pas de raies dans le spectre, on peut le supposer constant dans la fenêtre d'analyse autour de f_0 , étroite par principe. Le biais de l'estimateur fait alors intervenir la classique bande équivalente "de bruit" du premier ordre du filtre d'entrée, en supposant $C_1 = G_2$

$$E[C_{XF1XF2}^T(0)] = C_{XF1XF2}(0) = \int_0^{\infty} [S_{X1X2}(f) + S_{X1X2}(-f)] |G(f)|^2 df = 2R_e[S_{X1X2}(f_0)] \cdot \text{Beq}_1(G) \cdot |G(f_0)|^2$$

avec $\text{Beq}_1(G) = \frac{\int_0^{\infty} |G(f)|^2 df}{|G(f_0)|^2}$

L'estimateur n'est donc pas biaisé si l'on prend Beq_1 comme largeur de fenêtre. Dans le cas où l'interspectre n'est pas réel, la méthode par filtrage est délicate.

La variance de l'estimateur peut s'obtenir simplement à partir du résultat obtenu pour l'intercorrélacion, ce qui donne à partir du §3.1 dans le domaine spectral :

$$\text{VAR}[C_{XF1XF2}^T(0)] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{XF1XF1}(f) S_{XF2XF2}^*(f) + S_{XF1XF2}^2(f)] df$$

En supposant là encore les divers spectres constants dans les fenêtres étroites G_1 et G_2 :

$$\text{VAR}[C_{XF1XF2}^T(0)] = \frac{1}{T} [S_{X1X1}(f_0) \cdot S_{X2X2}^*(f_0) + S_{X1X2}^2(f)] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(f) G_2^*(f) df$$

Dans le cas particulier du problème posé au § 2 :

$$\text{VAR}[C_{XF1XF2}^T(0)] = \frac{1}{T} \left[2S_{SS}^2(f_0) + [S_{B1B1}(f_0) + S_{B2B2}^*(f_0)] S_{SS}(f_0) + S_{B1B1}(f_0) S_{B2B2}^*(f_0) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(f) G_2^*(f) df$$

Il n'intervient que des autospectres, donc réels.

On fait intervenir cette fois le rapport signal sur bruit des densités spectrales de puissance :

$$\eta_{B1}(f_0) = \frac{S_{SS}(f_0)}{S_{B1B1}(f_0)} \quad \text{et} \quad \eta_{B2}(f_0) = \frac{S_{SS}(f_0)}{S_{B2B2}(f_0)}$$

$$\frac{\text{VAR}[C_{XF1XF2}^T(0)]}{C_{XF1XF2}^2(0)} = \frac{2}{T} \left[1 + \frac{1}{\eta_{B1}(f_0)} + \frac{1}{\eta_{B2}(f_0)} \right] + \frac{1}{2\eta_{B1}(f_0) \cdot \eta_{B2}(f_0)}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(f)|^2 |G_2(f)|^2 df}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(f) G_2^*(f) df \right]^2}$$

Si l'on revient au cas particulier où $G_1 = G_2$, on voit qu'il intervient la bande équivalente du second ordre $Beq_2(G)$ définie précédemment :

$$\frac{VAR C_{XF_1XF_2}^T(0)}{C_{XF_1XF_2}^2(0)} = \frac{1}{T Beq_2(G)} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta_{B_1}(f_0)} + \frac{1}{\eta_{B_2}(f_0)} \right) + \frac{1}{2\eta_{B_1}(f_0) \cdot \eta_{B_2}(f_0)} \right]$$

L'intervention de $Beq_2(G)$ est connue dans ce cas Cf [8]. Elle est appelée bande statistique équivalente.

Si en plus $S_{B_1B_1} = S_{B_2B_2}$:

$$\frac{VAR [C_{XF_1XF_2}^T(0)]}{C_{XF_1XF_2}^2(0)} = \frac{1}{T Beq_2(G)} \left\{ 1 + \frac{1}{\eta(f_0)} + \frac{1}{2\eta^2(f_0)} \right\}$$

On voit donc intervenir une formule parfaitement analogue à l'intercorrélation, avec toutefois une interprétation différente :

- . $Beq_2(G)$ correspond cette fois à la bande d'un filtre réellement existant, et non pas un filtre équivalent déduit du spectre des signaux à analyser.
- . Par principe, $Beq_2(G)$ est plus étroit que $Beq_2(G_X)$, donc la convergence plus difficile ; par contre l'analyse est plus fine en fréquence. Pour obtenir des performances comparables aux autres méthodes, il faut disposer en parallèle autant de paires de filtres que de points significatifs voulus en fréquence.
- . La méthode devient alors assez lourde mais est parfaitement souple puisque l'on peut choisir en particulier un pas fréquentiel logarithmique ; on peut aussi remarquer que lorsque $\eta(f_0)$ est très faible, cela ne gêne pas l'estimation d'une zone où il l'est moins.

5. - ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER.

5.1. Transformation de Fourier sur la corrélation.

Pour pouvoir comparer les deux méthodes qui suivent on prend pour estimateur de la corrélation [9]

$$c_{ij}^T(\theta) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} + |\theta|/2}^{+\frac{T}{2} - |\theta|/2} X_i(t + \frac{\theta}{2}) X_j(t - \frac{\theta}{2}) dt \quad \text{pour } |\theta| \leq T$$

$$= 0 \quad \text{pour } |\theta| > T$$

Cet estimateur n'est qu'asymptotiquement sans biais :

$$E [c_{ij}^T(\theta)] = (1 - \frac{|\theta|}{T}) \cdot C_{ij}(\theta)$$

Son avantage est de ne supposer la connaissance de $X_i(t)$ et $X_j(t)$ que sur $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ quel que soit θ ; $C_{ij}^T(\tau)$ nécessite au contraire la connaissance de X_i et X_j sur un intervalle dépendant de τ .

L'estimateur de la d.s.p. est alors :

$$S_{ij}^T(f) = \int_{-T}^{+T} c_{ij}^T(\theta) e^{-2\pi j f \theta} d\theta$$

Cet estimateur n'est également qu'asymptotiquement sans biais. On peut montrer [9] que la covariance est, dans le cas gaussien et lorsque f_1 et f_2 sont suffisamment voisins pour que les spectres soient approximativement constants de f_1 à f_2 :

$$COV [S_{ij}^T(f_1), S_{kl}^T(f_2)] = S_{ik}(f_1) \cdot S_{jl}(-f_1) W^+ + S_{il}(f_1) \cdot S_{jk}(-f_1) W^-$$

$$\text{avec : } W^\pm = \left[\frac{\sin \pi T(f_1 \pm f_2)}{\pi T(f_1 \pm f_2)} \right]^2$$

Pour T grand, la covariance converge en $1/T^2$. Par contre, pour $f_1 = f_2$, $W^- = 1$ pour tout T : l'estimateur $S_{ij}^T(f)$ est dit inconsistant, car sa variance ne tend pas vers 0 pour T grand.

En pratique, pour obtenir un meilleur estimateur on atténue par une pondération $w(\theta)$ l'influence des $c_{ij}^T(\theta)$ pour les fortes valeurs de $|\theta|$, qui sont à forte erreur relative (Cf.3.1) :

$$S_{ij}^{T,w}(f) = \int_{-T}^{+T} c_{ij}^T(\theta) \cdot w(\theta) e^{-2\pi j f \theta} d\theta$$

On peut montrer alors, lorsque $w(\theta)$ est négligeable bien avant T, que [9] :

$$COV [S_{ij}^{T,w}(f), S_{kl}^{T,w}(f)] = \frac{S_{il}(f) \cdot S_{jk}(-f)}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(\theta) d\theta$$

si $w(0) = 1$ et $f \neq 0$
 $w(\theta)$ étant a priori pair, on peut l'interpréter comme une corrélation. On peut alors faire intervenir le temps de corrélation du second ordre défini précédemment (Cf. § 3.2) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(\theta) d\theta = 2w^2(0) \cdot \tau_{cor2}(w) = \frac{w^2(0)}{2 Beq_2(Gw)}$$

Pour faire intervenir Beq_2 on introduit le filtre $G_w(f)$ tel que : $|G_w(f)|^2 = W(f)$. La valeur $w(0) \neq 1$ introduit un biais puisqu'elle change $c_{ij}^T(0)$ donc la puissance du signal. On supposera par la suite $w(0) = 1$.

Dans le cas où l'on s'intéresse à la partie corrélée de deux voies X et Y (Cf. § 2) :

$$VAR [S_{XY}^{T,w}(f)] = \frac{S_{XY}(f) S_{YX}(-f)}{T} \cdot \frac{1}{2 Beq_2(G_w)}$$

Posons $S_{XY} = L_{XY} + j Q_{XY}$, avec $L_{XY} = \frac{S_{XY} + S_{YX}}{2}$ la partie réelle. Dans le problème posé au § 2 :



$$\begin{aligned} S_{XX} &= S_{SS} + S_{B_1 B_1} \\ S_{YY} &= S_{SS} + S_{B_2 B_2} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \implies L_{XY} = S_{SS} \text{ et } \rho_{XY} = 0 \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier de l'estimation d'un signal S , l'erreur d'estimation est donc :

$$\begin{aligned} \text{VAR}[I_{XY}^{T,w}(f)] &= \text{VAR}\left[\frac{S_{XY}^{T,w}(f) + S_{YX}^{T,w}(f)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \text{VAR}[S_{XY}^{T,w}(f)] + \frac{1}{2} \text{COV}[S_{XY}^{T,w}(f), S_{YX}^{T,w}(f)] \\ &= \frac{[S_{XY}(f) S_{YX}(-f) + S_{XX}(f) S_{YY}(-f)]}{4T \text{Be}q_2(G_w)} \\ &= \frac{[S_{SS}^2(f) + (S_{SS}(f) + S_{B_1 B_1}(f))(S_{SS}(f) + S_{B_2 B_2}(f))]}{4T \text{Be}q_2(G_w)} \end{aligned}$$

Avec le rapport signal sur bruit des densités spectrales de puissance $\eta_{B_1}(f)$ et $\eta_{B_2}(f)$ introduit pour les deux voies (Cf. § 4), on obtient là encore une expression analogue :

$$\frac{\text{VAR}[I_{XY}^{T,w}]}{S_{SS}^2(f)} = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta_{B_1}(f)} + \frac{1}{\eta_{B_2}(f)} \right) + \frac{1}{2\eta_{B_1}(f) \cdot \eta_{B_2}(f)} \right] \cdot \frac{1}{2T \text{Be}q_2(G_w)}$$

5.2. Transformation de Fourier directe, ou périodogramme.

Le périodogramme $I_{XY}^T(f)$ est défini à partir des transformées de Fourier $X^T(f)$ et $Y^T(f)$ des signaux $X(t)$ et $Y(t)$ dans la fenêtre d'observation $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$:

$$I_{XY}^T(f) = \frac{X^T(f) \cdot Y^{T*}(f)}{T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} X(t) Y(t') e^{-2\pi j f(t-t')} dt dt'$$

Si l'on pose $t-t'=\theta$, on transforme le domaine en :

$$\text{Pour } \theta < 0 : \frac{1}{T} \int_{-T}^0 e^{-2\pi j f \theta} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}-|\theta|} X(t) Y(t-\theta) dt \right] d\theta$$

$$\text{Pour } \theta > 0 : \frac{1}{T} \int_0^{+T} e^{-2\pi j f \theta} \left[\int_{-\frac{T}{2}+\theta}^{+\frac{T}{2}} X(t) Y(t-\theta) dt \right] d\theta$$

En changeant alors t en $t+\frac{\theta}{2}$ dans les deux cas on voit apparaître l'estimateur de la corrélation introduit en 5.1 :

$$\begin{aligned} I_{XY}^T(f) &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} e^{-2\pi j f \theta} \left[\int_{-\frac{T}{2}+\frac{|\theta|}{2}}^{+\frac{T}{2}-\frac{|\theta|}{2}} X(t+\frac{\theta}{2}) Y(t-\frac{\theta}{2}) dt \right] d\theta \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \rho_{XY}^T(\theta) e^{-2\pi j f \theta} d\theta = S_{XY}^T(f) \end{aligned}$$

La méthode par transformation de Fourier directe est donc équivalente à la transformation de Fourier de la corrélation ρ introduite en 5.1. On a donc en particulier :

$$\begin{aligned} \text{COV}[I_{XY}^T(f_1), I_{XY}^T(f_2)] &= S_{XX}(f_1) S_{YY}(-f_1) W^+ + S_{XY}(f_1) \\ &\cdot S_{YX}(-f_1) W^- \end{aligned}$$

Pour $f_1 = f_2$, $W^- = 1$. Comme en pratique la F.F.T. donne les fréquences en $f = \frac{n}{T}$, on a en plus $W^+ = 0$:

$$\text{VAR}[I_{XY}^T(\frac{n}{T})] = S_{XY}(\frac{n}{T}) S_{YX}(-\frac{n}{T}) = S_{XY}^2(\frac{n}{T})$$

Dans le cas particulier où l'on estime un signal S , partie corrélée de X et Y (Cf. § 2), on obtient, toujours avec les mêmes notations (Cf. § 5.1) :

$$\frac{\text{VAR}[R_e[I_{XY}^T(\frac{n}{T})]]}{S_{SS}^2(\frac{n}{T})} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta_{B_1}(\frac{n}{T})} + \frac{1}{\eta_{B_2}(\frac{n}{T})} \right) + \frac{1}{2\eta_{B_1}(\frac{n}{T}) \cdot \eta_{B_2}(\frac{n}{T})}$$

Si l'on pondère X et Y par une fenêtre symétrique $f_d(t)$ avant transformation de Fourier, cela revient à convoluer I_{XY}^T par $|F_d(v)|^2/T = W(f)$.

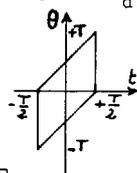
L'introduction d'une telle fenêtre multiplie donc le résultat précédent par $\frac{1}{2T \text{Be}q_2(F_d)}$.

6. - EXPERIMENTATION.

Au moyen d'un analyseur spectral par F.F.T. à deux voies, Hewlett-Packard 5451C, on a mesuré le bruit thermique en tension d'une résistance à travers deux voies de mesure comportant le bruit des préamplificateurs, de même puissance sur les deux voies.

En faisant K fois le calcul par FFT et en supposant les résultats indépendants, la variance relative calculée est multipliée par $\frac{1}{K}$. L'estimation expérimentale de cette variance se fait par rapport à la valeur théorique du bruit thermique.

Les points expérimentaux sont en très bon accord avec les courbes théoriques, qui s'avèrent donc en particulier ne pas correspondre à une majoration très importante de l'erreur (Cf. 3.1).



ERREUR D'ESTIMATION INTERVENANT DANS L'ANALYSE DE FLUCTUATIONS ACCESSIBLES
SOUS DE FAIBLES RAPPORTS SIGNAL SUR BRUIT

Ecart type relatif $\sqrt{\frac{\text{VAR}(\text{Estimateur})}{(\text{Valeur théorique})^2}}$ de l'erreur

d'estimation due au temps de mesure fini pour l'auto-spectre corrigé (A) et pour l'interspectre (B), ou de même pour l'autocorrélation corrigée et pour l'inter-corrélation d'un signal perturbé par le bruit d'une ou deux voies indépendantes en fonction du rapport signal sur bruit η .

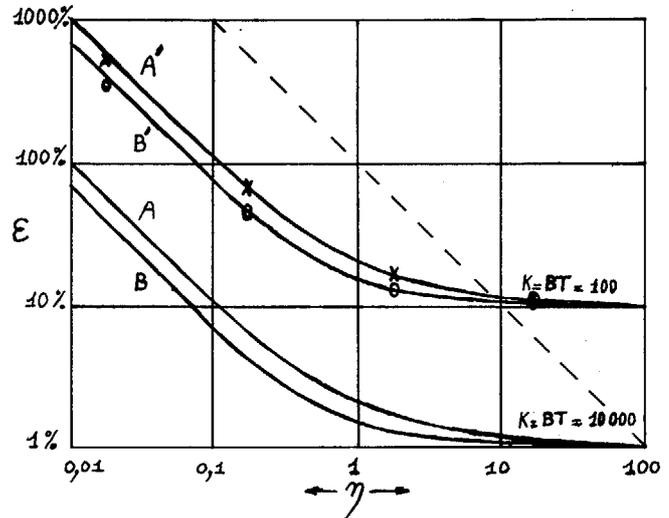
A et B : $K = BT = 10000$

A' et B' : $K = BT = 100$

En pointillé, l'erreur systématique d'un autospectre, ou d'une autocorrélation non corrigée.

X : points expérimentaux de l'autospectre corrigé

O : points expérimentaux de l'interspectre



7. - CONCLUSION.

L'étude comparée des estimateurs de corrélation ou de spectre montre que la notion de bande équivalente du second ordre, ou bande statistique équivalente, se retrouve dans toutes les méthodes, mais correspond à une interprétation différente : forme du spectre à mesurer, filtre réel, filtre équivalent à une fenêtre.

D'autre part, dans le cas très important en pratique où l'on cherche à estimer un signal perturbé par deux bruits indépendants, on montre que l'influence du rapport signal sur bruit, global pour la corrélation et en fonction de la fréquence pour le spectre, nécessite de façon identique d'augmenter le temps de mesure T pour garder la même précision.

LISTE DES REFERENCES

- [1] RAILLON L. "Etude de la précision d'analyse des faibles fluctuations électriques d'un système stationnaire, application au bruit électrochimique autour de l'équilibre" Thèse D.I. 3.7.79, Univ. P. et M. Curie, Paris
- [2] MAX J. "Erreurs dans les mesures de fonctions de corrélations et de densités spectrales" Note LETI 73 - 723 - B.C.T.E.
- [3] PAPOULIS A. "Probability, random variables and stochastic processes" Mc Graw Hill 1965
- [4] CARPENTIER H. "Radars, concepts nouveaux" Dunod 1966
- [5] BLANC-LAPIERRE A., PICINBONO B. "Propriétés statistiques du bruit de fond" Masson 1961
- [6] VAN DER ZIEL "Noise : sources, characterization, Measurement" PrenticeHall 1970
- [7] BLANC-LAPIERRE A., FORTET R. "Théorie des fonctions aléatoires" Masson 1953
- [8] BENDAT J.S., PIERSOL A.G. "Random data : analysis and measurement procedures" Wiley 1971
- [9] JENKINS G.M., WATTS D.G. "Spectral analysis and its applications" Holden Day, San Francisco.

