

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

CHOIX ENTRE LES DIFFERENTES METHODES QUADRATIQUES D'ESTIMATION DU SPECTRE
DE PUISSANCE.

Henri CLERGEOT

LABORATOIRE DES SIGNAUX ET SYSTEMES - C.N.R.S./E.S.E. - Plateau du Moulon - 91190 GIF SUR YVETTE.

RESUME

Une comparaison des méthodes quadratiques d'estimation de la densité spectrale est faite sur la base de matrice de la forme quadratique associée. Cette présentation permet de séparer nettement ce qui touche à la qualité d'estimation, liée à la forme de cette matrice et ce qui a trait aux modalités de calcul pour arriver à une même forme d'estimation.

Nous montrons que, pour une classe très générale de signaux, la variance minimale à fenêtre fréquence donnée est obtenue si la matrice d'estimation est de forme Toeplitz. Ce résultat simple constitue un moyen efficace pour faire un premier classement et éliminer des solutions inefficaces : le seul estimateur non Toeplitz retenu correspond à la méthode de Welch (moyennage de plusieurs périodogrammes), intéressante pour ses performances au point de vue calcul. Une comparaison détaillée, au point de vue estimation et complexité de calcul est faite avec la méthode de lissage du périodogramme sous sa forme classique ou dans une implémentation rapide plus récente.

La présentation adoptée permet de clarifier le choix des paramètres et d'éviter des erreurs courantes en particulier pour l'analyse sur un intervalle court.

SUMMARY

Comparison is made between the different methods of quadratic power spectrum estimation, based on the matrix of the associated quadratic form. With this approach, it is possible to make a clear distinction between estimation performance, connected to the structure of this matrix, and computation efficiency achieved for different implementations leading to similar matrix form.

We find that, for a very general class of signals, minimum estimation variance for a given spectral window is achieved if the estimation matrix is Toeplitz. This simple result is a powerful investigation tool allowing a priori elimination of obviously inefficient solutions. The single non Toeplitz estimator that is worth being considered is the Welch estimator (average of several modified periodograms), with respect to its potential computational efficiency. Detailed comparison is made between Welch method and the method of smoothing of a single periodogram, either in its classical implementation or in a newer one based on short DFTs.



INTRODUCTION.

La notion familière de fenêtre spectrale caractérise la résolution d'une méthode d'analyse spectrale mais elle est dans le cas général insuffisante pour déterminer la variance de l'estimée. Par contre un estimateur quadratique sera entièrement déterminé par la matrice [A] de la forme quadratique associée; c'est sur cette base que nous nous proposons de comparer les estimateurs les plus courants. A performances équivalentes au point de vue estimation un classement est fait ensuite au point de vue de la rapidité de calcul et du volume mémoire.

I. RAPPEL DES DEFINITIONS DES DIFFERENTES FENETRES.

Nous nous intéressons à l'analyse d'un signal aléatoire stationnaire x_n réel, discret en temps; l'intervalle entre échantillons sera pris comme unité de temps. La durée totale d'observation est T, qui représente en même temps le nombre total d'échantillons.

Nous rappellerons les définitions des différentes "fenêtres" couramment introduites en analyse spectrale, à partir de l'analyse d'une méthode particulière, le lissage du périodogramme modifié.

I.1. Fenêtre signal; autocorrélation d'échantillon.

Le signal x_n est observé pour $0 \leq n \leq T-1$; nous introduisons une "fenêtre signal" de pondération b_n^T vérifiant :

$$b_n^T = 0 \text{ si } n \notin [0, T-1], \quad (I.1)$$

$$\sum_n b_n^T = T.$$

Nous raisonnerons sur le signal tronqué et pondéré y_n^T :

$$y_n^T = x_n b_n^T. \quad (I.2)$$

Nous introduisons "l'autocorrélation d'échantillons" \hat{C}_n^T :

$$\hat{C}_n^T = \frac{1}{T} \sum_m y_m^T y_{m-n}^T = \frac{1}{T} \sum_m y_m^T * y_{-m}^T. \quad (I.3)$$

En désignant par Γ_n la fonction d'autocorrélation de x_n , $\Gamma_n = E[x_m x_{m-n}]$, nous obtenons :

$$\hat{C}_n^T = E[\hat{C}_n^T] = \frac{1}{T} \sum_m b_m^T b_{m-n}^T E[x_m x_{m-n}], \quad (I.4)$$

soit

$$\hat{C}_n^T = H_n^T \Gamma_n, \quad (I.5)$$

où l'on a posé

$$H_n^T = \frac{1}{T} \sum_m b_m^T b_{m-n}^T = \frac{1}{T} (b_n^T * b_{-n}^T). \quad (I.6)$$

Compte tenu de (I.1) remarquons que $H_0^T = 1$.

I.2. Fenêtres spectrales dans le domaine temps.

Le spectre sera déterminé dans cette méthode à partir d'une estimée de la fonction d'autocorrélation définie par :

$$\hat{\Gamma}_n^T = F_n^T \hat{C}_n^T. \quad (I.7)$$

La fonction de pondération F_n^T sera désignée par "fenêtre spectrale apparente", dans la représentation temporelle. Elle est normée par la condition :

$$F_0^T = 1. \quad (I.8)$$

En général F_n^T sera une fonction décroissante de $|n|$, son rôle étant de minimiser la contribution de la portion de \hat{C}_n^T correspondant aux fortes valeurs du retard $|n|$, pour lesquelles la variance est la plus grande.

Calculons l'espérance mathématique; de (I.5) et (I.7) il résulte :

$$\hat{\Gamma}_n^T = E[\hat{\Gamma}_n^T] = F_n^T \cdot H_n^T \Gamma_n \triangleq \phi_n^T \Gamma_n. \quad (I.9)$$

Nous désignerons la fonction $\phi_n^T = F_n^T H_n^T$ ainsi introduite par "fenêtre spectrale effective", dans la représentation temporelle. Nous obtenons la relation entre fenêtre signal et fenêtres spectrales apparente et effective :

$$\phi_n^T = F_n^T \cdot \left(\frac{1}{T} b_n^T * b_{-n}^T \right). \quad (I.10)$$

Remarquons que, compte tenu de (I.8) et (I.1)

$$\phi_0^T = 1. \quad (I.11)$$

Remarquons que dans le cas particulier $b_n^T = 1$ ($x_n^T = x_n$), $H_n^T = 1 - \frac{|n|}{T}$.

I.3. Passage dans le domaine fréquence.

I.3.a) Interprétation des relations fréquentielle

(Tableau I)

Par transformation de Fourier continue toutes les relations précédentes se trouvent dans le domaine fréquence. Les transformées de b_n^T , F_n^T , ϕ_n^T , soient $b^T(\nu)$, $f^T(\nu)$, $\phi^T(\nu)$ seront désignées respectivement par fenêtre signal, fenêtre spectrale apparente, fenêtre spectrale effective dans la représentation fréquentielle. Les correspondances sont résumées dans le Tableau I.

	Domaine temps	Domaine fréquence
CAS CONTINU		
		IF
fenêtre signal	$\Gamma_n = E[x_n x_{p-n}]$	$\longleftrightarrow \gamma(\nu)$
	b_n^T	$\longleftrightarrow b^T(\nu)$
	$H_n^T = b_n^T * b_{-n}^T$	$\longleftrightarrow h^T(\nu) = b^T(\nu) ^2$
fenêtre spectrale apparente	$y_n^T = x_n b_n^T$	$\longleftrightarrow Y^T(\nu)$
	$\hat{C}_n^T = \frac{1}{T} y_n^T * y_{-n}^T$	$\longleftrightarrow \hat{C}^T(\nu) = \frac{1}{T} Y^T(\nu) ^2$
	$\hat{C}_n^T = \frac{1}{T} H_n^T \Gamma_n$	$\longleftrightarrow \hat{C}^T(\nu) = \gamma(\nu) * \left(\frac{1}{T} h^T(\nu)\right)$
	F_n^T	$\longleftrightarrow f^T(\nu)$
fenêtre spectrale effective	$\hat{\Gamma}_n^T = F_n^T \hat{C}_n^T$	$\longleftrightarrow \hat{\gamma}^T(\nu) = I^T(\nu) * f^T(\nu)$
	$\phi_n^T = F_n^T H_n^T$	$\longleftrightarrow \phi^T(\nu) = f^T(\nu) * h^T(\nu)$
fenêtre spectrale associée à ν_0	$\hat{\gamma}_n^T = \phi_n^T \Gamma_n$	$\longleftrightarrow \hat{\gamma}^T(\nu) = \phi^T(\nu) * \gamma(\nu)$
	$\hat{\Gamma}_n^T = \phi_n^T \cos(2\pi \nu_0 n)$	$\longleftrightarrow \hat{d}_n^T = \frac{1}{2} (\phi^T(\nu - \nu_0) + \phi^T(\nu + \nu_0))$
CAS DISCRET		
		DFT
	y_n^T	$\longleftrightarrow Y_p^{2T} = Y^T\left(\frac{p}{2T}\right)$
	$\hat{C}_n^T = \frac{1}{T} y_n^T * y_{-n}^T$	$\longleftrightarrow \hat{C}_p^{2T} = \hat{C}^T\left(\frac{p}{2T}\right)$
	$\hat{\Gamma}_n^T = F_n^T \cdot \hat{C}_n^T$	$\longleftrightarrow \hat{\gamma}_p^{2T} = \frac{1}{2T} F_p^{2T} * \hat{C}_p^{2T}$
Remarque : $\hat{\gamma}_p^{2T}$ désigne la convolution discrète circulaire sur 2T points.		

TABLEAU I : Correspondances temps fréquence.

CHOIX ENTRE LES DIFFERENTES METHODES QUADRATIQUES D'ESTIMATION DU SPECTRE DE PUISSANCE.

Le périodogramme $I^T(v)$, transformée de Fourier de l'autocorrélation d'échantillon \hat{C}_n^T se calcule dans le domaine fréquence à partir de $Y^T(v)$, transformée de Fourier de Y_n^T : $I^T(v) = (1/T) |Y^T(v)|^2$.

On voit que l'estimée du spectre, $\hat{\gamma}(v)$, s'obtient par lissage du périodogramme par convolution avec la fenêtre spectrale apparente $f^T(v)$.

Pour une fréquence v_0 donnée :

$$\hat{\gamma}(v_0) = \int_{-1/2}^{1/2} I^T(v) f^T(v-v_0) dv ; \quad (I.12)$$

$\hat{\gamma}(v)$ apparaît comme une intégrale pondérée du périodogramme, la fenêtre apparente de pondération se déduisant par translation de $f^T(v)$ (désignée parfois par l'appellation de fenêtre translatable).

On établit facilement pour l'espérance $\hat{\gamma}(v_0)$ de l'estimée :

$$\hat{\gamma}(v_0) = \int \gamma(v) \phi^T(v-v_0) dv = \int \gamma(v) d^T(v) dv, \quad (I.13)$$

où l'on a introduit la fonction paire $d^T(v)$:

$$d^T(v) = \frac{1}{2} [\phi^T(v-v_0) + \phi^T(v_0-v)] . \quad (I.14)$$

La fonction $d^T(v)$ est la fenêtre spectrale de pondération associée à la fréquence v_0 . Nous désignerons par D_n^T sa transformée de Fourier inverse :

$$D_n^T = \phi_n^T \cos(2\pi v_0 n) . \quad (I.15)$$

I.3.b) Raisonement en fréquence discrète.

Le calcul fréquentiel sur ordinateur ne peut se faire qu'en fréquence discrète; le plus souvent le calcul se fait à partir de la DFT du signal sur T points, ce qui revient à discrétiser v avec un espacement 1/T. Le fait d'utiliser une DFT sur un nombre de point Q supérieur à T est souvent cité comme une éventualité utile ou souhaitable [1], mais sans argument ou règle précise.

En fait il est facile de définir des conditions dans lesquelles le calcul en fréquence discrète peut se faire sans approximation [2]. Le théorème d'échantillonnage s'applique, en échangeant le rôle des domaines temps et fréquence. Après échantillonnage fréquentiel, la DFT inverse redonne non pas le signal initial, mais sa répétition périodique de période Q : si le support temporel est de portée inférieure à Q il n'y a pas repliement et le signal est restitué intégralement.

Dans notre cas toutes les grandeurs temporelles ont un support inférieur ou égal à 2T : le calcul peut être fait rigoureusement sur les DFT sur 2T points. Nous avons indiqué (tableau I 2ème partie) sur trois exemples l'extension des correspondances au cas discret.

En pratique la fenêtre apparente F_n^T a souvent un support temporel $[-M, +M]$ où $M < T$: il nous suffit alors d'avoir les M premiers points de \hat{C}_n^T sans repliement. On peut donc se limiter à une DFT sur $Q=T+M$ points.

Par contre l'utilisation de DFT sur T points présente toujours une approximation; quels inconvénients en résulte-t-il ? On peut montrer [2] qu'il en résulte une légère augmentation de la variance. D'autre part

le repliement peut entraîner un biais dans l'éventualité où Γ_n garderait une valeur notable pour des retards de l'ordre de T; encore faut-il remarquer que c'est \hat{C}_n^T qui est replié : H_n^T , en général fonction décroissante de $|n|$ atténue le biais. Il faut sans doute voir dans cet effet de H_n^T l'origine du préjugé selon lequel une fenêtre signal b_n^T atténuant les limites de l'intervalle $[0, T]$ est indispensable pour une bonne estimation [3]. Effectivement, la fenêtre H_n^T correspondante va atténuer efficacement l'effet de repliement. Mais c'est un mauvais palliatif, la contrepartie étant, comme nous le verrons au paragraphe III.1.a), d'augmenter la variance par une mauvaise utilisation du signal.

II. FORMULATION GENERALE DE L'ESTIMATION QUADRATIQUE.

Dans toute méthode quadratique l'estimée $\hat{\gamma}(v_0)$ du spectre à la fréquence v_0 pourra se formuler à partir du vecteur observation $\underline{x}_{-T}^T = [x_0, \dots, x_{T-1}]$ sous la forme :

$$\hat{\gamma}(v_0) = W = \underline{x}_{-T}^T [A] \underline{x}_{-T} . \quad (II.1)$$

Remarquons que deux éléments symétriques A_{ij} et A_{ji} n'interviennent que par leur somme dans le coefficient de $x_i x_j$: nous pouvons toujours nous ramener à une matrice symétrique, ce qui sera supposé dans la suite.

II.1. Espérance mathématique.

On obtient :

$$\hat{\gamma}(v_0) = E[\hat{\gamma}(v_0)] = \underline{t}_r [A] E[\underline{x}_{-T}^T \underline{x}_{-T}] = \underline{t}_r ([A][\Gamma]), \quad (II.2)$$

$[\Gamma]$ étant la matrice Toeplitz de corrélation d'éléments $\Gamma_{ij} = \Gamma_{i-j}$.

Notons D_n^T la somme des éléments de $[A]$ le long de la n^{ème} parallèle à la diagonale principale.

$$D_n^T = \sum_{i-j=n} A_{ij} . \quad (II.3)$$

On obtient d'après (II.2) :

$$\hat{\gamma}(v_0) = \sum_n D_n^T \Gamma_n , \quad (II.4)$$

ou, en appliquant la relation de Parseval :

$$\hat{\gamma}(v_0) = \int_{-1/2}^{+1/2} d^T(v) \gamma(v) dv = 2 \int_0^{1/2} d^T(v) \gamma(v) dv. \quad (II.5)$$

Ainsi $\hat{\gamma}(v)$ s'exprime, dans le cas le plus général, comme une intégrale pondérée de la densité spectrale, la fenêtre de pondération étant $d^T(v)$, transformée de Fourier de D_n^T définie par (II.3) à partir de $[A]$.

En vue de l'estimation du spectre pour v_0 donné, on s'efforce naturellement d'obtenir une fenêtre $d^T(v)$ présentant un pic suffisamment étroit autour de v_0 , de telle sorte que si $\gamma(v)$ varie peu sur la largeur du pic on obtienne :

$$\hat{\gamma}(v_0) \approx 2 \int_0^{1/2} d^T(v) \gamma(v) dv \approx 2\gamma(v_0) \left[\int_0^{1/2} d^T(v) dv \right]. \quad (II.6)$$

On est ainsi conduit à normaliser la fenêtre par la condition :

CHOIX ENTRE LES DIFFÉRENTES METHODES QUADRATIQUES D'ESTIMATION DU SPECTRE DE PUISSANCE.

$$2 \int_0^{1/2} d^T(v) dv = \int_{-1/2}^{1/2} d^T(v) dv = D_n^T(0) = 1. \quad (II.7)$$

Pour définir la largeur B du pic présenté par $d^T(v)$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$, nous utiliserons la notion classique de bande passante équivalente pour la puissance; compte tenu de la normalisation (II.7) on obtient :

$$\frac{1}{B} = \int_0^{1/2} (2 d^T(v))^2 dv = 2 \int_{-1/2}^{1/2} d^T(v)^2 dv = 2 \sum_{-T-1}^{T-1} (D_n^T)^2. \quad (II.8)$$

II.2. Variance (dans le cas gaussien).

On établit sans difficulté [2] que la variance est donnée par :

$$\Delta W^2 = E[\hat{\gamma}(v_0)^2] - \gamma(v_0)^2 = 2 t_r((\Gamma A)^2). \quad (II.9)$$

Nous ferons pour la suite l'hypothèse assez générale que les coefficients d'intercorrélation entre composantes de la DFT sur T points du signal x_n sont négligeables. On peut montrer [2], [4] que pour un signal gaussien stationnaire cette approximation est justifiée dès que le temps de corrélation devient petit devant T, ou que la variation relative de $\gamma(v)$ est faible pour $\Delta v = 1/T$ (spectre pseudo-blanc [4]).

Dans ces conditions on trouve [2] que la variance minimale à fenêtre fréquence $d^T(v)$ donnée est pratiquement atteinte si la matrice [A] est de forme Toeplitz sous l'hypothèse supplémentaire que $\gamma(v)$ varie peu sur la largeur B de la fenêtre spectrale $d^T(v)$, on obtient une expression simplifiée de la variance :

$$\Delta W^2 = 2 \gamma(v_0)^2 \cdot t_r [A^2]. \quad (II.10)$$

Pour une suite D^T arbitraire, il existe une matrice de Toeplitz et une seule, soit [A'] admettant D_n^T comme fenêtre associée; d'après (II.3) ses éléments seront donnés par :

$$A'_{i \ i-n} = \frac{1}{T-|n|} D_n^T. \quad (II.11)$$

Soit [A] la matrice d'un estimateur quelconque, [A'] la matrice de Toeplitz ayant même fenêtre associée D_n^T ; on établit sans difficulté que :

$$T_r(A^2) = T_r[A'^2] + T_r[(A-A')^2]. \quad (II.12)$$

Dans cette relation, compte tenu de (II.11), $t_r(A'^2)$ peut s'exprimer en fonction de la fenêtre spectrale D_n^T seule :

$$T_r(A'^2) = \sum_{n=-T+1}^{T-1} (D_n^T)^2 / (T-|n|). \quad (II.13)$$

Sur la forme simplifiée (II.10) de la variance il ressort de façon évidente d'après (II.12) et (II.13) que la variance est minimale à fenêtre spectrale D_n^T donnée si $[A] - [A'] = [0]$ c'est à dire si la matrice de l'estimateur à la forme Toeplitz.

Dans (II.13) remarquons que pour réduire la variance on est conduit à prendre pour D_n^T une fenêtre de largeur temporelle petite devant T. Dans ces conditions pour les valeurs du retard n où D_n^T est différent de zéro, T-n est voisin de T. Avec cette approximation, compte tenu de la définition de la largeur équivalente B de la fenêtre on obtient :

$$t_r(A'^2) \approx 1/2 BT. \quad (II.14)$$

Compte tenu de (II.10), (II.12), (II.14) la variance relative sur l'estimation de $\gamma(v_0)$ est donnée par :

$$\Delta W^2 / \gamma^2(v_0) = 1/2BT + 2 T_r [(A-A')^2]. \quad (II.15)$$

Nous caractérisons l'augmentation de variance pour un estimateur quelconque par rapport à l'estimateur Toeplitz correspondant par le rapport :

$$v = \text{Tr}[A^2] / T_r[A'^2] \geq 1. \quad (II.16)$$

III. COMPARAISON DES ESTIMATEURS.

III.1. Matrice [A] associée aux estimateurs usuels.

a) Méthode d'autocorrélation et méthode de lissage du périodogramme. (périodogramme modifié, ou normal).

Nous avons vu que ces méthodes conduisent à la même forme de l'estimée, donnée par (I.12); en appliquant la relation de Parseval, compte tenu de la symétrie de \hat{C}_n^T on obtient :

$$\hat{\gamma}(v_0) = \sum_n \hat{C}_n^T F_n^T \cos(2\pi v_0 n). \quad (III.1)$$

Soit en développant \hat{C}_n^T compte tenu de (I.3) et (I.2) :

$$\hat{\gamma}(v_0) = \sum_n \sum_m b_m^T b_{m-n}^T F_n^T \cos(2\pi v_0 n) x_m x_{m-n}, \quad (III.2)$$

d'où l'élément général de la matrice d'estimation :

$$A_{ij} = b_i^T b_j^T F_{i-j}^T \cos 2 v_0(i-j). \quad (III.3)$$

On constate que, dans le cas du périodogramme normal ($b_i^T = b_j^T = 1$), la matrice d'estimation à la forme Toeplitz.

Par contre, l'utilisation d'une fenêtre signal b_n^T non constante, fait perdre le caractère Toeplitz et conduit à une variance augmentée. Nous avons vu en I.3.b), que le vrai remède au biais que peut introduire l'estimation fréquentielle par DFT, consiste à augmenter le nombre de points de la DFT, et non à jouer sur la fenêtre b_n^T : l'introduction d'une pondération sur le signal x_n est une complication, qui ne peut que nuire à la qualité d'estimation; on doit donc l'éviter dans l'analyse d'un signal stationnaire.

b) Méthode de moyennage de périodogrammes modifiés (méthode de Welch [5]).

L'intervalle total d'estimation T, est découpé en Q sous intervalles de longueur N, espacés de $K < N$; pour chaque intervalle partiel, on calcule le périodogramme modifié (utilisation d'une même fenêtre signal b_n^T sur chaque intervalle), et on moyenne les Q périodogrammes.

Chaque périodogramme est une forme quadratique sur le vecteur observation correspondant, de dimension N; la matrice [AN] de cette forme quadratique est donnée par l'équivalent de (III.3) (en l'absence de lissage $F_n^T = 1$) :

$$A_{ij}^N = b_i^N b_j^N \cos 2 v_0(i-j). \quad (III-4)$$

De façon évidente la matrice [A] globale d'estimation s'obtient en superposant les blocs relatifs à chaque segment :



CHOIX ENTRE LES DIFFERENTES METHODES QUADRATIQUES D'ESTIMATION DU SPECTRE DE PUISSANCE.

- lissage par passage en temps

$$y_1 = (3/2) (T+M) \log_2(T+M) + T + 2M + P \log_2(2P) .$$

$$v_1 = T + M .$$

- lissage direct (fenêtre trapézoïdale)

$$y_2 = (T+M) \log_2 (T+M) + T + M + P ,$$

$$v_2 = T + M .$$

b) Autocorrélation directe.

Les M premières valeurs de \hat{C}_n^T sont calculées directement, puis multipliées par la fenêtre apparente; $\hat{\gamma}$ est obtenu par DFT sur 2P points (séquence paire); on obtient :

$$y_3 = M (T+1) + P \log_2 (2P) ,$$

$$v_3 = \text{Max} (P, 2M) .$$

c) Autocorrélation par algorithme rapide.

Le calcul de \hat{C}_n^T pour $n \leq M$ peut être fait par un algorithme dû à Radër [6], utilisant un découpage de l'intervalle T en intervalles adjacents de longueur M , et des DFT partielles; la suite du calcul est la même qu'en b); on obtient :

$$y_4 = 2(T+M) \log_2(2M) + 4T + M + P \log_2(P) ,$$

$$v_4 = \text{Max} (P, 4M) .$$

d) Banc de P filtres.

La méthode est décrite en III.1.c). La solution envisagée pour l'évaluation est celle de P filtres autorégressifs d'ordre 4; on obtient alors :

$$y_5 = 6 (T+M) P$$

$$v_5 = 6 P$$

e) Méthode de Welch.

La largeur des segments est prise égale à M, on prend $K/M = 0,5$ et une fenêtre en cosinus, ou voisine pour que la variance approche le minimum.

Remarquons que la largeur B est alors de l'ordre de $1/M$ (pour la fenêtre en cosinus $B = \frac{4}{3M}$); nous avons vu que pour obtenir une bonne définition du spectre on doit prendre $2P \gtrsim 2/B \sim 2M$; pour respecter cette condition il ne faudrait pas utiliser de DFT sur moins de 2M points.

On obtient pour cette méthode :

$$y_6 = \frac{2T}{M} (M+P+2P \log_2(2P)) ,$$

$$v_6 = 2P .$$

III.4. Comparaison.

Nous avons porté fig. 1 a, b, c les nombres de multiplications correspondant aux différents estimateurs, fonction de T, à valeur donnée de T/M et T/P.

Sur la figure 1a ($T/M = 16, P = M/2$) la méthode de filtrage (y_5) et la méthode d'autocorrélation directe (y_3) apparaissent nettement plus lentes. La méthode de Welch (y_6) paraît assez avantageuse : elle est toujours meilleure que la méthode d'autocorrélation rapide (y_4) et meilleure que le lissage du périodogramme (y_1) si $T < 10^4$. Mais c'est la méthode de lissage direct (y_2) qui est encore la plus rapide.

Cependant, nous avons souligné que pour $P=M/2$, pour la méthode de Welch, la définition du spectre est mauvaise. Or (Fig. 1b) on constate que si on augmente

$P(P=M)$ pour la même valeur de T/M, les courbes demeurent pratiquement inchangées, sauf la courbe y_6 correspondant à la méthode de Welch, qui se classe maintenant dans les plus lentes.

En gardant $M = P$ nous avons repris le tracé avec une valeur plus grande de T/M (fig. 1c, $T/M = 64$), dans le but de mettre en évidence un éventuel avantage des méthodes utilisant des DFT partielles (y_6, y_4).

Cet effet se manifeste effectivement du côté des T courts mais il n'apparaît pas cependant de gain très décisif; pour T inférieur à 10^4 la méthode d'autocorrélation rapide (y_4) devient meilleure que la méthode de lissage (y_1), mais reste toujours plus lente que la méthode de lissage direct (y_2).

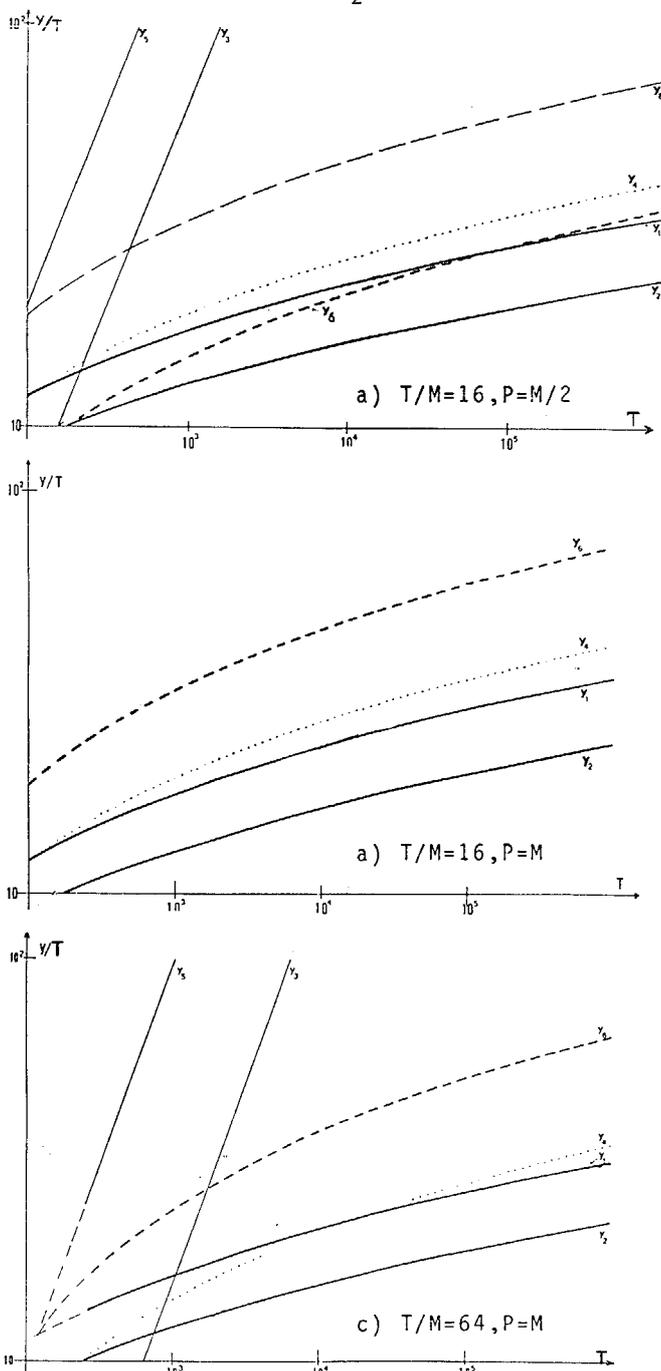


Fig. 1 : Nombre de multiplications fonction de T (ordonnée : Y/T).



CHOIX ENTRE LES DIFFERENTES METHODES QUADRATIQUES D'ESTIMATION DU SPECTRE DE PUISSANCE.

IV. CONCLUSION

Au point de vue estimation, il ressort clairement qu'il n'y a pas à chercher d'amélioration par rapport aux méthodes classiques d'autocorrélation ou lissage du périodogramme : elles permettent de réaliser une fenêtre spectrale ϕ_n^T arbitraire, avec la variance d'estimation minimum. Du fait des algorithmes de FFT, la méthode fréquentielle est la plus rapide des deux; nous avons noté que le biais pouvant résulter du travail en fréquence discrète était supprimé en utilisant la DFT sur $2T$ points (ou $T+M$), mais que par contre l'utilisation d'une fenêtre $b_n^T \neq 1$ était à rejeter (augmentation de la variance).

Les méthodes basées sur des DFT sur intervalles partiels, sont au mieux équivalentes aux deux précédentes au point de vue estimation. Si l'on s'impose des conditions identiques nous avons vu qu'elles n'apportent pas de réduction des calculs : le seul avantage est une réduction importante de l'occupation en mémoire. Notons que l'on perd en souplesse d'utilisation, surtout dans la méthode de Welch où la largeur B de la fenêtre spectrale doit être choisie au départ, de l'ordre de $1/M$.

Pour l'analyse d'un signal stationnaire la méthode de lissage du périodogramme apparaît la plus intéressante pour la qualité d'estimation (variance minimale), la souplesse (possibilité de changer la largeur B facilement ou même d'utiliser un critère de choix automatique [7], [8], [9]), la rapidité (en particulier si on lisse par convolution directe avec une fenêtre rectangulaire ou trapézoïdale). Ce n'est que si la longueur T devient prohibitive que l'on peut envisager un fractionnement pour limiter l'occupation en mémoire.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] PARZEN (E.), Modern empirical spectral analysis. NATO advanced study institute on underwater acoustics and signal processing in denmark. (August 80) pp. 37-1, 37-29.
- [2] CLERGEOT (H.), Choix entre les différentes méthodes quadratiques d'estimation du spectre de puissance. Soumis pour publication (1981).
- [3] BINGHAM (C.), GOFREY (M.D.), TUCKEY (J.W.), Modern techniques of power spectrum estimation. IEEE Trans Audio. Electroacoust., Vol. AU-15, pp. 55-66, Juin 1967.
- [4] HODGKISS (W.S.), NOTTE (L.W.), Covariance between Fourier coefficients representing the time waveform observed from an array of sensors. J. Acoust. Soc. Am. 59, 3, March 76.
- [5] WELCH (P.), The use of fast Fourier Transform for the estimation of power Spectra. IEE Trans. Audio. Electroacoust., Vol. AU-15, pp. 70-73, Juin 1967.
- [6] RADER (C.M.), An improved algorithm for high speed autocorrelation with applications to spectral estimation. IEEE Trans. Audio. Electroacoust., Vol AU-18, N° 4, Décembre 1970, pp. 493-441.
- [7] WAHBA (G.), Automatic smoothing of the logperiodogram. Journ. Amer. Statistical Assn. n 75, pp. 122-123, (1980).
- [8] GRAY (R.M.), BUZO (A.), MATSUYAMA (Y.), Distortion measures for speech processing. IEE Trans. ASSP, Vol. ASSP.-28, N° 4, Août 1980, pp.367-376.
- [9] CLERGEOT (H.), Méthode d'analyse spectrale basée sur le cepstre du signal. Soumis pour publication (1981).

