



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

ESTIMATION DE SPECTRES RATIONNELS NON-STATIONNAIRES

Y. GRENIER

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS DEPARTEMENT SYSTEMES ET COMMUNICATIONS
46 RUE BARRAULT 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

La définition d'un spectre pour un processus non-stationnaire est un problème délicat pour lequel diverses solutions ont été proposées. La définition de Mélard et Tjøstheim qui fournit un cadre utile à une estimation paramétrique, est rappelée : le spectre est le module de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle d'un filtre.

On étudie sous quelles conditions ce filtre est réalisable sous forme d'un modèle rationnel, et on en déduit la définition du spectre rationnel non-stationnaire. Le modèle est identifié par la méthode du maximum de vraisemblance, et un calcul exact de la vraisemblance et de son gradient est proposé. Ce calcul utilise les équations du filtre de Kalman estimant l'état du modèle markovien du signal, équivalent au modèle rationnel utilisé.

Une brève mention sera faite du choix d'une estimation initiale pour l'algorithme de gradient maximisant la vraisemblance. Des exemples sont proposés dans lesquels les coefficients variables sont estimés comme combinaisons linéaires de fonctions choisies a-priori.

SUMMARY

The problem of the definition of a spectrum in the case of a non-stationary stochastic process has received several solutions. Melard and Tjøstheim gave one which provides a useful framework for parametric estimation. The spectrum is the Fourier transform of the impulse response of a time-varying linear filter.

We study the conditions under which this filter can be realized as a rational model, and deduce the definition of the rational evolutionary spectrum. The model is identified by the maximum likelihood method, an algorithm is given : it ensures the computation of the exact likelihood and its gradient, through the use of the Kalman filter which estimates the state of the Markovian model of the signal equivalent to the rational model under study.

The choice of the initial estimate used by the gradient algorithm minimizing the likelihood, is briefly mentioned. Several examples follow, showing the estimation of models when the coefficients are restricted to finite sums of functions belonging to a known family.



1. INTRODUCTION

Les méthodes de traitement de signal font très souvent l'hypothèse que le signal est stationnaire même si, parfois de façon flagrante, ce n'est pas le cas (on parle alors de quasi-stationnarité). Les signaux non-stationnaires n'en sont pas pour autant absents de la littérature. L'estimation par des méthodes non paramétriques de spectres évolutifs a été largement traitée. Par contre leur estimation par des méthodes paramétriques (approche par modélisation) est beaucoup moins étudiée. C'est à ce genre de méthodes que ce papier est consacré.

Dans le paragraphe 2, nous passerons rapidement en revue les définitions du spectre évolutif, en insistant sur la définition issue de la décomposition canonique, dont nous soulignerons une faiblesse. Le paragraphe 3 énoncera une définition améliorant la précédente : le spectre évolutif rationnel qui reposera sur la réalisation sous forme d'équation d'état de la décomposition. Le paragraphe 4 étudiera les conditions d'existence de cette décomposition. Le paragraphe 5 discutera des possibilités d'estimation du spectre évolutif rationnel. Le paragraphe 6 sera consacré à l'estimation par le maximum de vraisemblance.

2. DEFINITIONS DU SPECTRE NON-STATIONNAIRE

Soit $\{y_t\}$ un processus non stationnaire, centré, pour lequel on recherche une représentation spectrale. Loynes [1] a exposé un ensemble de propriétés que devrait posséder une représentation spectrale d'un processus aléatoire, et qui sont vérifiées dans le cas de la représentation spectrale classique d'un processus stationnaire. Dans le même article il passe en revue cinq définitions différentes du spectre ; la plus utilisée d'entre elles, celle de Priestley [2] passe par la définition d'une classe de processus dénommés processus oscillatoires, dont la covariance $R_{s,t} = E(y_s y_t)$ peut se représenter sous la forme

$$R_{st} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t, \omega) A^*(s, \omega) e^{j\omega(t-s)} d\mu(\omega) \quad (1)$$

telle que $A(t, \omega)$ ait une transformée de Fourier présentant un maximum à la fréquence nulle. Le spectre est alors défini par la relation

$$d_{\omega} F(t, \omega) = |A(t, \omega)|^2 d\mu(\omega) \quad (2)$$

Cette représentation a l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à une classe de processus non-stationnaires réduite, et ce qui est plus grave, mal définie (une combinaison linéaire de processus oscillatoires n'est pas nécessai-

rement oscillatoire).

Mélard [3] et Tjøstheim [4] ont indépendamment introduit pour les processus à temps discret une représentation spectrale obtenue à partir de la représentation canonique du processus. Considérant des processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ purement non déterministes, Cramer [5] a montré qu'ils possèdent une décomposition canonique :

$$y_t = \sum_{u=-\infty}^t h_{tu} \varepsilon_u \quad (3)$$

où $\{\varepsilon_t\}$ est le processus d'innovation de $\{y_t\}$ tel que $E(\varepsilon_t \varepsilon_u) = \delta_{t-u}$. Cette décomposition est unique. Mélard [3] et Tjøstheim [4] proposent alors de définir le spectre évolutif comme :

$$f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{u=-\infty}^t h_{tu} e^{j\omega u} \right|^2 \quad (4)$$

Cette définition remplit un grand nombre des propriétés souhaitées par Loynes [1].

A2) La variance du processus s'écrit

$$E(y_t^2) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t, \omega) d\omega \quad (5)$$

A5) $f(t, \omega)$ coïncide dans le cas stationnaire avec la fonction de densité spectrale.

A1) Le spectre évolutif est une fonction réelle et positive de t et ω .

B1c) Si $\{y_t\}$ est un processus réel, $f(t, \omega) = f(t, -\omega)$

A8) Multiplier $\{y_t\}$ par l'exponentielle $e^{-j\omega_0 t}$ revient à décaler (modulo 2π) son spectre de ω_0 :

$$f(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega + \omega_0)$$

B10) Si $y_t^{(2)} = y_{t+h}^{(1)}$ alors $f_2(t, \omega) = f_1(t+h, \omega)$ (la numérotation de ces propriétés est celle de l'article de Loynes [1]).

Attardons nous sur la dernière propriété montrée par Mélard [3] :

A6) Si $\{y_t^{(1)}\}$ et $\{y_t^{(2)}\}$ sont deux processus purement non déterministes, soit $\{y_t\}$ le processus tel que

$$\begin{cases} y_t = y_t^{(1)} & \text{si } t \leq 0 \\ y_t = y_t^{(2)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $\{y_t^{(1)}\}$ et $\{y_t^{(2)}\}$ admettent les mêmes innovations $\{\varepsilon_t\}$ (ou des innovations proportionnelles) alors

$$\begin{cases} f(t, \omega) = f_1(t, \omega) & \text{si } t \leq 0 \\ f(t, \omega) = f_2(t, \omega) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Si, au contraire, les processus $\{y_t^{(1)}\}$ et $\{y_t^{(2)}\}$ sont non corrélés, alors la projection orthogonale de $y_t = y_t^{(2)}$ pour $t > 0$ sur $L^2(y_s^{(2)}, t-1)$ se réduit à celle sur $L^2(\{y_s^{(2)}, s=1 \dots t-1\})$ car :

$$L^2(y, t-1) = L^2(y^{(1)}, 0) + L^2(\{y_s^{(2)}, s=1 \dots t-1\}) \quad (6)$$



ESTIMATION DE SPECTRES RATIONNELS NON-STATIONNAIRES

et $y_t^{(2)}$ est orthogonal à $L^2(y^{(1)}, 0)$. Supposons alors que $\{y_t^{(2)}\}$ soit un processus autorégressif tel que

$$y_t^{(2)} + a_1 y_{t-1}^{(2)} + \dots + a_p y_{t-p}^{(2)} = \varepsilon_t^{(2)}$$

où $\varepsilon_t^{(2)}$ est l'innovation de $\{y_t^{(2)}\}$, il est évident alors que pour $t > p$ on a l'égalité $\varepsilon_t = \varepsilon_t^{(2)}$.

Ce raisonnement fait par Mélard [3] dans le cas où $\{y_t^{(2)}\}$ est stationnaire est valable également dans le cas non stationnaire.

Mélard montre que $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t, \omega) - f_2(t, \omega)) = 0 \quad \forall \omega$. On

rencontre alors le paradoxe d'innovations identiques pour $t > p$ et de spectres qui ne deviennent identiques que pour $t \rightarrow +\infty$. Ceci provient du fait que la décomposition canonique de Wold-Cramer réalise une moyenne mobile (moving-average) sur un horizon infini.

Cette constatation suggère la possibilité d'améliorer la définition du spectre évolutif en remplaçant la réponse-impulsionnelle infinie $\{h_{t\tau}\}$ par une équation aux différences du type ARMA (autorégressive-moving average) d'ordre fini, chaque fois que cela sera possible. Le paragraphe 3 est consacré à la définition du spectre évolutif rationnel et à l'étude de ses propriétés, tandis que le paragraphe 4 donnera une condition nécessaire et suffisante pour qu'un spectre évolutif soit rationnel.

3. DEFINITION, PROPRIETES DU SPECTRE EVOLUTIF RATIONNEL

Etant données la décomposition canonique d'un processus $\{y_t\}$, et donc son innovation $\{\varepsilon_t\}$, la fonction de Green $\{h_{t\tau}\}$ définit un système non-stationnaire dont l'entrée est $\{\varepsilon_t\}$ et la sortie $\{y_t\}$. L'inconvénient de cette représentation est comme nous l'avons vu la durée infinie de la réponse impulsionnelle que nous cherchons donc à remplacer par une représentation finie sous forme d'équation d'état. Ceci nous amène à redéfinir le spectre évolutif de la façon suivante :

1) si la fonction de Green ou réponse impulsionnelle généralisée n'admet pas de représentation sous forme d'état de dimension finie, conserver la définition du spectre évolutif.

$$f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^t h_{tn} e^{j\omega n} \right|^2 \quad (4)$$

2) sinon, déterminer la représentation d'état sous la forme canonique observable :

$$\begin{cases} x_t = \begin{bmatrix} -a_1(t) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -a_n(t) & 1 \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} b_0(t) \\ \vdots \\ b_{n-1}(t) \end{bmatrix} \varepsilon_t \\ y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \end{bmatrix} x_t \end{cases} \quad (7)$$

Le spectre évolutif sera dit "rationnel" et évalué comme :

$$f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{B(t, z) B(t, z^{-1})}{A(t, z) A(t, z^{-1})} \right]_{z=e^{j\omega}} \quad (8)$$

où $A(t, z)$ et $B(t, z)$ sont définis comme :

$$\begin{cases} A(t, z) = 1 + a_1(t)z^{-1} + \dots + a_n(t)z^{-n} \\ B(t, z) = b_0(t) + b_1(t)z^{-1} + \dots + b_{n-1}(t)z^{-n+1} \end{cases} \quad (9)$$

Le coefficient $\frac{1}{2\pi}$ assure que la variance de y_t est l'intégrale sur $\omega \in [-\pi, +\pi]$ de $f(t, \omega)$.

On peut interpréter le spectre évolutif rationnel comme le spectre du processus stationnaire "tangent" à l'instant t au processus non-stationnaire étudié en ce sens que la représentation markovienne (différence première \Leftrightarrow tangente) des deux processus coïncide à l'instant t .

Reprenons alors la propriété A6 de Loynes [1], il est possible de montrer que le spectre évolutif rationnel se comporte de façon plus satisfaisante que le spectre évolutif.

Si en effet le processus non-stationnaire $\{y_t\}$ est identique au processus $\{y_t^{(1)}\}$ rationnel pour les temps négatifs, et au processus $\{y_t^{(2)}\}$ purement autorégressif d'ordre p pour les temps positifs strictement, alors :

$$\begin{cases} f(t, \omega) = f_1(t, \omega) & \forall t \leq 0 \\ f(t, \omega) = f_2(t, \omega) & \forall t > p \end{cases} \quad (10)$$

lorsque les processus $\{y_t^{(1)}\}$ et $\{y_t^{(2)}\}$ ne sont pas corrélés. Cette propriété est vraie alors même que les processus $\{y_t^{(1)}\}$ et $\{y_t^{(2)}\}$ sont non-stationnaires, et à fortiori lorsqu'ils sont stationnaires. Le spectre évolutif défini précédemment ([3],[4]) n'assurait qu'une convergence de $f(t, \omega)$ vers $f_2(\omega)$ pour t tendant vers l'infini. Les autres propriétés établies par Mélard restent valables.

4. REALISATION D'UN SYSTEME NON-STATIONNAIRE

La décomposition de Wold-Cramer définit la relation entrée-sortie $\{h_{t\tau}\}$ que l'on cherche à réaliser sous la forme d'équation d'état :

$$\begin{cases} x_t = F(t) x_{t-1} + G(t) \varepsilon_{t-1} \\ y_t = H(t) x_t \end{cases} \quad (11)$$



ESTIMATION DE SPECTRES RATIONNELS NON-STATIONNAIRES

Dans cette équation, il n'y a pas de transmission instantanée entre l'entrée et la sortie, contrairement à la décomposition (3). Nous éliminons cette difficulté en posant $\epsilon_t = e_{t-1}$, ce qui nous donne la forme canonique utilisée par Harvey et Phillips [13] :

$$\begin{cases} x_t = F(t) x_{t-1} + G(t) \epsilon_t \\ y_t = H(t) x_t \end{cases} \quad (12)$$

Nous travaillerons avec la relation (11) pour définir une condition nécessaire et suffisante de réalisabilité, et sur la relation (12) pour l'estimation effective du spectre rationnel.

Un calcul rapide montre que si $x_{-\infty} = 0$, on peut exprimer y_t comme :

$$y_t = \sum_{i=-\infty}^t H(t) \left[\prod_{j=i+2}^t F(j) \right] G(i+1) e_i \quad (13)$$

Cette relation complexe est simplifiée par Kamen et Hafez [6]. Ceux-ci donnent une théorie de la réalisation des systèmes non-stationnaires reposant sur les modules construits sur l'anneau \mathcal{A} des fonctions à valeur réelle définies sur \mathbb{Z} avec les opérations :

$$\begin{cases} [f_1 + f_2](t) = f_1(t) + f_2(t) \\ [f_1 \cdot f_2](t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \end{cases} \quad (14)$$

En définissant les opérateurs sur \mathcal{A} :

$$\sigma = \text{retard} : \forall f \in \mathcal{A} \quad [\sigma f](t) = f(t-1) \quad (15)$$

et sur \mathcal{A}^n :

$$S \text{ associé à } F : \forall u \in \mathcal{A}^n \quad [Su](t) = F(t) \cdot u(t-1) \quad (16)$$

ils réécrivent la relation (13) sous la forme :

$$y_t = \sum_{u=1}^{\infty} [HS^{-u}G](t) e_{t-u} \quad (17)$$

Si nous réécrivons (3) sous la forme

$$y_t = \sum_{u=1}^{\infty} \varphi_u(t) e_{t-u} \quad (18)$$

obtenue en posant $\begin{cases} \varphi_u(t) = h_{t,t-i+1} \\ e_i = \epsilon_i + 1 \end{cases}$

nous obtenons l'égalité formelle dans \mathcal{A} :

$$\varphi_i = HS^{i-1}G \quad \forall i > 0 \quad (19)$$

Cette relation est exactement celle que l'on rencontre dans le cas des systèmes stationnaires, mais les valeurs sont alors des réels (paramètres de Markov).

Sontag [7] donne une théorie des systèmes définis sur un anneau commutatif qui a été adaptée par Kamen et Hafez [6] au cas étudié ici, la difficulté principale est due à la semi-linéarité de S (S n'est pas linéaire à cause de l'opération de décalage de u dans (16)).

Il est cependant possible de définir la cyclicité de S comme dans le cas stationnaire. Le système est alors réalisable (de dimension finie) si et seulement

si S est cyclique. On peut montrer [15] que c'est le cas si et seulement si la matrice de Hankel des fonctions

$\varphi_i \in \mathcal{A}$ est de rang fini :

$$\{\varphi_i\} \text{ réalisable} \Leftrightarrow \exists n \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathcal{A} :$$

$$\forall t > n \quad \varphi_t + \alpha_1 \varphi_{t-1} + \dots + \alpha_n \varphi_{t-n} = 0 \quad (20)$$

La réalisation sous forme d'état du système donne alors

$$\begin{cases} x_t = \begin{bmatrix} -a_1(t) & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} b_0(t) \\ \vdots \\ b_{n-1}(t) \end{bmatrix} \epsilon_t \end{cases} \quad (21-a)$$

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x_t \quad (21-b)$$

Les fonctions $a_i(t)$ et $b_i(t)$ sont liées à $\varphi_i(t)$ et $\alpha_i(t)$ par les relations

$$a_i(t) = \alpha_i(t+i) \quad i = 1 \dots n \quad (22-a)$$

$$b_i(t) = \varphi_{i+1}(t+i) \quad i = 0 \dots n-1 \quad (22-b)$$

On vérifie aisément que pour un système initialement au repos, cette équation d'état correspond à l'équation récurrente non-stationnaire :

$$y_t + a_1(t-1)y_{t-1} + \dots + a_n(t-n)y_{t-n} =$$

$$b_0(t)\epsilon_t + b_1(t-1)\epsilon_{t-1} + \dots + b_{n-1}(t-n+1)\epsilon_{t-n+1} \quad (23)$$

5. ESTIMATION DU SPECTRE EVOLUTIF RATIONNEL

Nous nous plaçons dans le cas où il est souhaitable d'obtenir une estimation du spectre évolutif rationnel à partir d'une réalisation unique du processus $\{y_t\}$. La forme paramétrique du modèle (22) ou (23) permet une identification, dans l'hypothèse où le signal est gaussien, par le maximum de vraisemblance. Nous donnerons au paragraphe suivant l'expression exacte de la vraisemblance, et de son gradient lorsque les fonctions a_i et b_i sont fixées. Cette méthode est tout à fait générale et permet d'étudier n'importe quel type d'évolution des paramètres (a_i, b_i) au cours du temps.

Nous donnons ici des exemples dans lesquels chaque coefficient $a_i(t)$ ou $b_i(t)$ est obtenu comme combinaison linéaire (dont les coefficients sont les paramètres à identifier) de fonctions $f_j(t)$ de base, connues et déterministes :

$$\begin{cases} a_i(t) = \sum_{j=0}^d a_{ij} f_j(t) & i = 1 \dots n \quad (24-a) \\ b_i(t) = \sum_{j=0}^d b_{ij} f_j(t) & i = 0 \dots n-1 \quad (24-b) \end{cases}$$

Ce type de modèles a déjà été utilisé par Liporace [8] qui utilise $f_j(t) = t^j$, par Kozin [9], Kozin et Nakajima



ESTIMATION DE SPECTRES RATIONNELS NON-STATIONNAIRES

[10], Hinich et Roll [11] qui utilisent des polynômes de Legendre. Une comparaison pour un modèle AR(4) est proposée (figure 1) entre les bases définies par

$$f_1(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^i \quad \text{et} \quad f_2(t) = \left(1 - \cos \frac{t}{T}\right)^i.$$

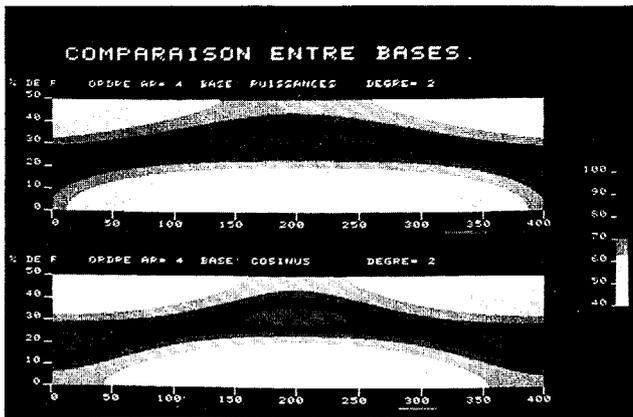


fig.1 : Modèles projetés sur f_0, f_1, f_2
 en haut : $f_1(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^i$
 en bas : $f_2(t) = \left(1 - \cos \frac{t}{T}\right)^i$.
 Les deux modèles coïncident par construction aux instants $0, \frac{T}{2}$ et T .

5. CALCUL DE LA VRAISEMBLANCE EXACTE

Le modèle que nous utilisons est le modèle (21) dans lequel les coefficients $a_i(t)$ et $b_i(t)$ dépendent de paramètres θ , (par exemple par l'intermédiaire des relations (24) auquel cas $\theta^T = [a_{00} \dots a_{nd} \quad b_{00} \dots b_{n-1,d}]$, mais la méthode exposée dans ce paragraphe est plus générale). Une réalisation du processus $\{y_t\}$ est donnée sur l'intervalle $[0, T]$. La vraisemblance de θ est :

$$L(y_0 \ y_1 \ \dots \ y_T) = 2 \text{ Log } p(y_T \ \dots \ y_0 | \theta) \quad (25)$$

Lorsque le processus $\{y_t\}$ est gaussien, la vraisemblance peut s'exprimer de façon récursive sur T (Schweppe [12]), avec une formulation voisine du filtre de Kalman, au moyen de la règle de Bayes :

$$p(y_T \ \dots \ y_0 | \theta) = p(y_T | y_{T-1} \ \dots \ y_0, \theta) \cdot p(y_{T-1} \ \dots \ y_0 | \theta) \quad (26)$$

Si \hat{y}_T est l'estimation de y_T connaissant les observations précédentes, $\hat{y}_T = E(y_T | y_{T-1} \ \dots \ y_0, \theta)$, la variable $y_T - \hat{y}_T = \varepsilon_T$ est l'innovation, qui est centrée, non corrélée avec les y_i ($i < T$), de variance R_T qui sera évaluée ci-dessous. Sous l'hypothèse gaussienne, on a donc :

$$p(y_T | y_{T-1} \ \dots \ y_0, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_T}} \exp\left(-\frac{1}{2R_T} \varepsilon_T^2\right) \quad (27)$$

Harvey et Phillips [13] puis Pearlman [14] ont appliqué ce résultat au cas d'un processus ARMA en utilisant la forme canonique (21), dans le cas stationnaire.

Soient A_t, B_t et C les matrices intervenant dans (21) :

$$\begin{cases} x_t = A_t x_{t-1} + B_t e_t \\ y_t = C x_t \end{cases} \quad (28)$$

Les innovations $\hat{\varepsilon}_t$ et leur variance R_t se calculent au moyen du filtre de Kalman

$$\begin{cases} \varepsilon_t = y_t - C\hat{x}_t & \text{(innovation)} & (29-a) \\ K_t = A_t P_t C^T & \text{(gain du filtre)} & (29-b) \\ R_t = C P_t C^T & \text{(variance de } \varepsilon_t) & (29-c) \\ P_t = A_t P_{t-1} A_t^T - K_t K_t^T / R_t + B_t B_t^T & \text{(variance de l'état)} & (29-d) \\ \hat{x}_{t+1} = A_t \hat{x}_t + K_t (R_t)^{-1} \varepsilon_t & \text{(estimation de l'état)} & (29-e) \end{cases}$$

Dans ces équations \hat{x}_t est l'estimation de l'état x_t à l'instant t connaissant les mesures jusqu'à l'instant $t-1$, la matrice P_t est la covariance de l'erreur sur l'estimation de l'état :

$$P_t = E((x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^T) \quad (30)$$

Ces équations nécessitent la connaissance à priori de \hat{x}_0 et P_0 . Aucune information n'étant disponible à l'instant 0 sur le passé du processus, la valeur de \hat{x}_0 choisie est nécessairement nulle, car l'état x_0 a une répartition gaussienne centrée. Quant à P_0 , la relation (30) indique que si $\hat{x}_0 = 0$, P_0 doit être égal à la variance de l'état du système :

$$P_0 = E(x_0 x_0^T) \quad (31)$$

Dans le cas stationnaire, P_0 est solution de l'équation de Lyapunov :

$$P_0 = A P_0 A^T + B B^T \quad (32)$$

Dans le cas non-stationnaire, plusieurs possibilités se présentent, suivant les hypothèses faites sur le passé du processus, les deux principales étant :

1) le processus est stationnaire pour $t < 0$

$$\text{alors} \quad \begin{cases} A_t = A_0 \\ B_t = B_0 \end{cases} \quad \forall t < 0 \quad \text{et} \quad P_0 \text{ est solution}$$

de l'équation de Lyapunov

$$P_0 = A_0 P_0 A_0^T + B_0 B_0^T$$

2) aucune information n'est disponible sur le passé du processus et la covariance de l'état peut être quelconque, il faut alors choisir pour P_0 une borne supérieure de cette covariance, donc $P_0^{-1} = 0$.



ESTIMATION DE SPECTRES RATIONNELS NON-STATIONNAIRES

La vraisemblance s'obtient ensuite comme :

$$L(y_0, y_1, \dots, y_T) = (T+1) \log 2\pi - \sum_{t=0}^T \left(\log R_t + \frac{\epsilon_t^2}{R_t} \right) \quad (34)$$

Il est possible de calculer le gradient de la vraisemblance : soit μ un des paramètres à estimer $\frac{\partial L}{\partial \mu}$ s'obtient par dérivation des équations (29) et (34).

$$\frac{\partial \epsilon_t}{\partial \mu} = -C \frac{\partial \hat{x}_t}{\partial \mu} \quad (35-a)$$

$$\frac{\partial K_t}{\partial \mu} = \frac{\partial A_t}{\partial \mu} \cdot P_t C^T + A_t \frac{\partial P_t}{\partial \mu} C^T \quad (35-b)$$

$$\frac{\partial R_t}{\partial \mu} = C \frac{\partial P_t}{\partial \mu} C^T \quad (35-c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial \mu} &= \frac{\partial A_t}{\partial \mu} (I - K_t C) \cdot P_t A_t^T - A_t \frac{\partial K_t}{\partial \mu} P_t A_t^T \\ &+ A_t (I - K_t C) \left(\frac{\partial P_t}{\partial \mu} A_t^T + P_t \frac{\partial A_t^T}{\partial \mu} \right) \\ &+ \frac{\partial B_t}{\partial \mu} B_t^T + B_t \frac{\partial B_t^T}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (35-d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}_{t+1}}{\partial \mu} &= \frac{\partial A_t}{\partial \mu} \hat{x}_t + A_t \frac{\partial \hat{x}_t}{\partial \mu} + \frac{\partial K_t}{\partial \mu} \cdot \frac{\epsilon_t}{R_t} + \frac{K_t}{R_t} \frac{\partial R_t}{\partial \mu} \epsilon_t \\ &+ \frac{K_t}{R_t} \frac{\partial \epsilon_t}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (35-e)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = - \sum_{t=0}^T \left(\left(\frac{1}{R_t} - \frac{\epsilon_t^2}{R_t^2} \right) \frac{\partial R_t}{\partial \mu} + 2 \frac{\epsilon_t}{R_t} \cdot \frac{\partial \epsilon_t}{\partial \mu} \right) \quad (36)$$

Nota : la relation (35-d) s'obtient à partir de la relation

$$P_{t+1} = A_t (I - K_t C) P_t A_t^T + B_t B_t^T \quad (37)$$

qui est équivalente à la relation (29-d).

Certaines simplifications interviennent lorsque les relations (22) exprimant les coefficients a_i et b_i , car μ est un des paramètres a_{ij} et b_{ij} . Si μ est un des a_{ij} alors $\frac{\partial B_t}{\partial \mu} = 0$ et inversement si μ est un des b_{ij} alors $\frac{\partial A_t}{\partial \mu} = 0$; l'équation (35-d) a ainsi au plus 4 termes non-nuls. Par ailleurs les matrices $\frac{\partial A_t}{\partial \mu}$ et $\frac{\partial B_t}{\partial \mu}$ sont creuses (1 seul élément est non nul !). La programmation des relations (35) conduit donc à un filtre beaucoup plus simple qu'il n'y paraissait de prime abord !

Cet algorithme fournit un moyen de maximiser la vraisemblance des données par un algorithme de gradient déterministe. Une difficulté subsiste cependant : une estimation initiale des paramètres à identifier doit être connue tant pour diminuer le chemin à parcourir

pour le coûteux algorithme du gradient de la vraisemblance, que pour assurer que la convergence se fait vers la bonne solution et non sur un minimum local de la vraisemblance éloigné du minimum absolu. Nous ne faisons ici qu'indiquer une possibilité pour ce faire, nous réservant d'y revenir ultérieurement [15]. Il est aisé d'identifier un modèle autorégressif évolutif (Liporace [8], Kozin [9]). Effectuant alors un filtrage inverse du signal par ce modèle estimé, nous obtenons si l'ordre du modèle est élevé une approximation de l'innovation du processus ARMA. Il est alors simple d'identifier le modèle ARMA dont l'entrée est ce résidu, et la sortie le signal initial ; nous utiliserons par exemple une estimation au sens des moindres carrés.

7. CONCLUSION

Une méthode d'estimation spectrale paramétrique pour des signaux non-stationnaires est proposée. La représentation de ces signaux purement non déterministe est celle d'un système dont l'entrée est un bruit blanc et la sortie, le signal étudié. Le modèle non-stationnaire utilisé est du type ARMA ou équation d'état. Un estimateur du maximum de vraisemblance est utilisé avec un modèle initial estimé par un modèle autorégressif d'ordre élevé non-stationnaire. On trouvera sur les figures 2, 3, et 4 des exemples de cette estimation initiale. Un modèle non-stationnaire est sélectionné, son spectre est représenté en haut de chaque figure. En bas se trouve l'estimation réalisée à partir d'un signal synthétisé à l'aide du modèle choisi. Les figures 5, 6 et 7 montrent une comparaison entre cette méthode d'estimation et la méthode par modèle autorégressif adaptatif.

Sur toutes les figures, l'axe horizontal est celui du temps, vertical celui des fréquences.

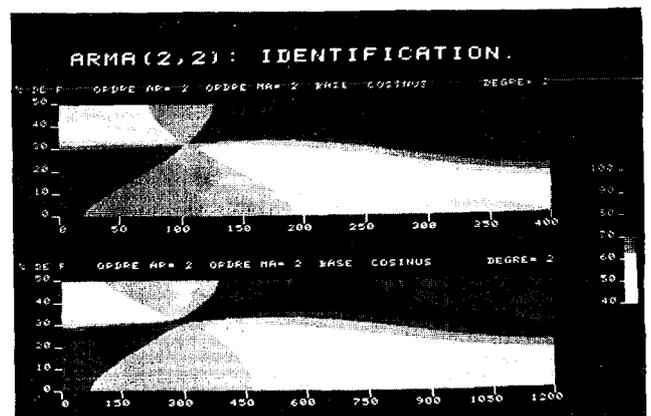


Figure 2. Estimation d'un modèle ARMA (2,2)
En haut : le modèle exact
En bas : estimation sur le signal synthétique.

ESTIMATION DE SPECTRES RATIONNELS NON-STATIONNAIRES

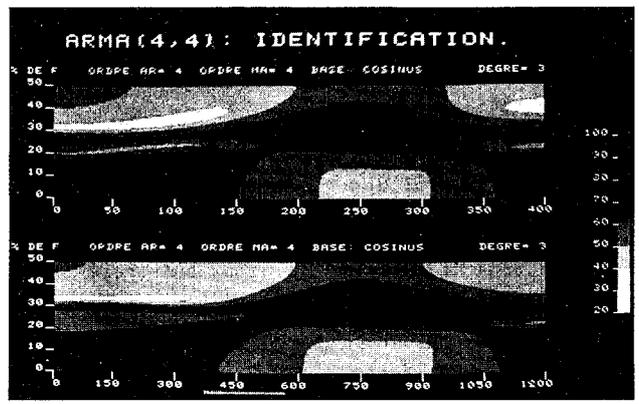


Figure 3 : estimation d'un modèle ARMA (4,4)
 En haut : le modèle exact
 En bas : estimation sur le signal synthétique.

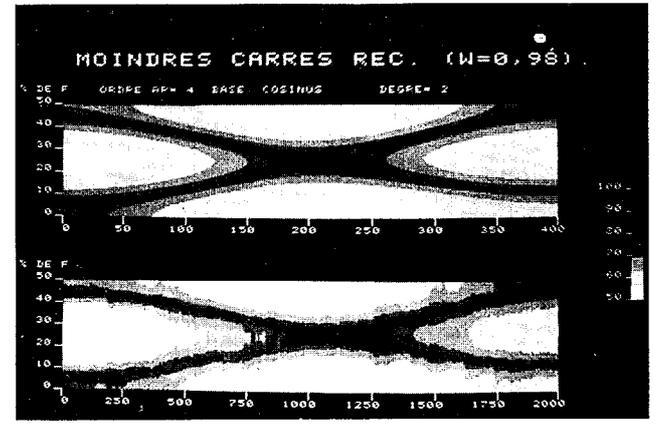


Figure 6 : estimation par un modèle AR adaptatif
 En haut : le modèle exact
 En bas : estimation par un modèle AR, méthode des moindres carrés récursifs avec oubli en $(0.98)^t$

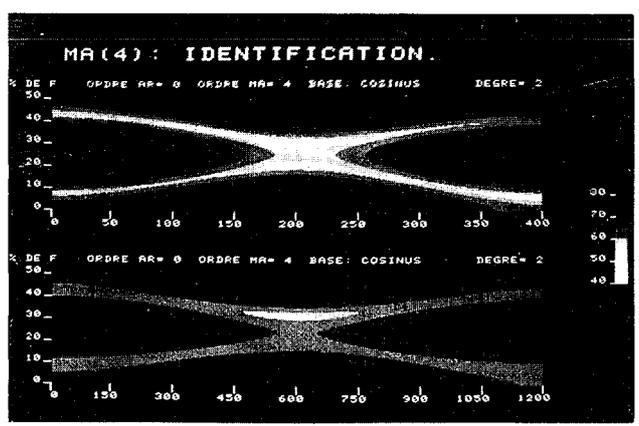


Figure 4 : estimation d'un modèle MA (4)
 En haut : le modèle exact
 En bas : estimation sur le signal synthétique.

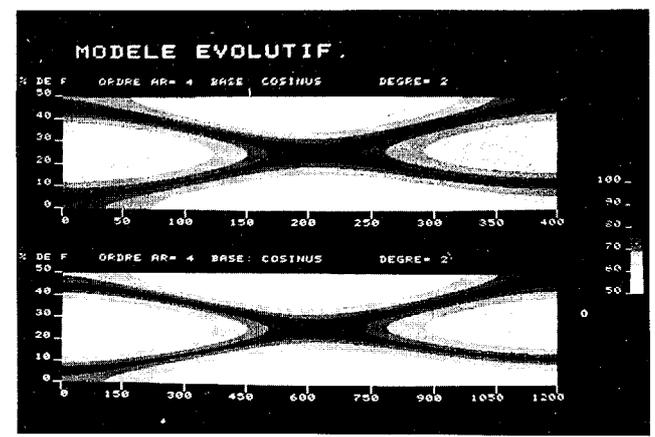


Figure 7 : estimation par la méthode décrite
 En haut : le modèle exact
 En bas : estimation sur un signal synthétique.

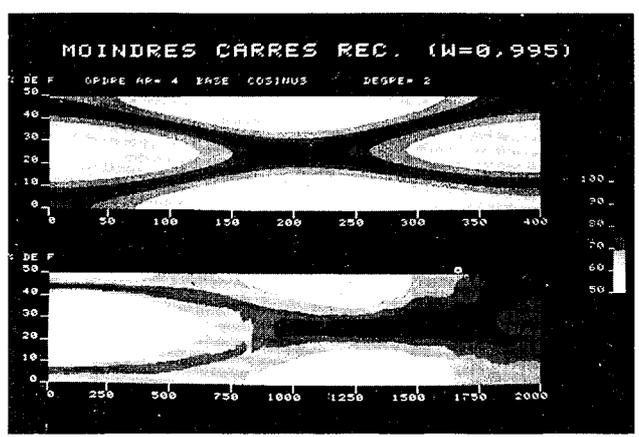


Figure 5 : estimation par un modèle AR adaptatif
 En haut : le modèle exact
 En bas : estimation par un modèle AR, moindres carrés récursifs avec oubli en $(0.995)^t$.



ESTIMATION DE SPECTRES RATIONNELS NON-STATIONNAIRES

- [1] R.M. Loynes
On the concept of the spectrum for non-stationary processes.
J. of the Royal Statist. Soc., Series B, Vol 30 n° 1 (1968) pp 1-30.
- [2] M.B. Priestley
Evolutionary spectra and non-stationary processes.
J. of the Royal Statist. Soc., Series B, Vol 27 n° 2 (1965) pp 204-237.
- [3] G. Melard
Propriétés du spectre évolutif d'un processus non-stationnaire.
Ann. Inst. H. Poincaré, Section B, Vol 14 n° 4 (1978) pp 411-424.
- [4] D. Tjøstheim
Spectral generating operators for non-stationary processes.
Adv. Appl. Prob. Vol 8 (1976) pp 831-846.
- [5] H. Cramer
On some classes of non-stationary stochastic processes.
Proc. of the 4th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability. Vol 2, Univ. of California Press (1961).
- [6] E.W. Kamen, K.M. Hafez
Algebraic theory of linear time-varying systems.
SIAM J. on Control and Optimization. Vol 17 n° 4 (1979) pp 500-510.
- [7] E.D. Sontag
Linear systems over commutative rings : a survey.
Ricerche di Automatica. Vol 7 n° 1 (1976) pp 1-34.
- [8] L.A. Liporace
Linear estimation of non-stationary signals.
JASA Vol 58 n° 6 (1975) pp 1288-1295.
- [9] F. Kozin
Estimation and modelling of non-stationary time series.
Symp. on Appl. of Computer Methods in Engineering. Los Angeles. Vol 1 (1977) pp 603-612.
- [10] F. Kozin, F. Nakajima
The order determination problem for linear, time varying AR models.
IEEE on AC. Vol 25 n° 2 (1980) pp 250-257.
- [11] M.J. Hinich, R. Roll
Measuring non-stationarity in the parameters of a linear model with applications to asset returns
Report AD.A. 042137.
- [12] F.C. Schweppe
Evaluation of likelihood functions for Gaussian signals.
IEEE Trans. on IT Vol 11 (1965) pp 61-70.
- [13] A.C. Harvey, G.D.A Phillips
Maximum likelihood estimation of regression models with autoregressive moving average disturbances.
Biometrika Vol 66 n° 1 (1979) pp 49-58.
- [14] J.G. Pearlman
An algorithm for the exact likelihood of a high order autoregressive moving average process.
Biometrika Vol 67 n° 1 (1980) pp 232-233.
- [15] Y. Grenier
Rational time-varying spectrums and their estimation.
First ASSP Workshop on Spectral Estimation, Mc Master University, Hamilton, Ontario (17-18 août 1981).