

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

ANALYSE SPECTRALE ET APPROXIMATION DE FORMES QUADRATIQUES

C. GUEGUEN F. GIANNELLA

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS DEPARTEMENT SYSTEMES ET COMMUNICATIONS
46 RUE BARRAULT 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

De nombreux problèmes en analyse spectrale et en modélisation du signal sont sous-tendus par les formes de Toeplitz, formes quadratiques liées à la matrice d'auto-corrélation R de structure particulière. Si celles-ci sont bien connues en dimension infinie, le cas fini, dû au caractère lui-même fini des données disponibles en pratique, est plus complexe. Cette communication s'intéresse aux liens entre les diverses méthodes d'estimation spectrale (périodogramme lissé, cumulé, maximum d'entropie, maximum de vraisemblance) par le biais des formes quadratiques sous-jacentes. On montre comment les estimateurs spectraux et les estimateurs de la corrélation sont avantageusement exprimés en termes de formes quadratiques. Cette approche permet de comparer les techniques traditionnelles des maximum d'entropie et de vraisemblance et de concevoir de nouvelles méthodes intermédiaires (vraisemblance paramétrée) fondées sur une approximation de R^{-1} . De même, des liens sont explicités entre la vraisemblance et les modèles propres (dont la méthode de Pisarenko) qui offrent aussi des gradations dans l'approximation de R . Les résultats sont présentés sur des signaux réels (parole) et des exemples de simulation.

SUMMARY

A large number of problems in spectral analysis and signal modelling is governed by Toeplitz forms R . If the properties of these forms are well understood when the dimension is infinite, this is no longer the case for finite matrices. This paper consists in a comparative study of the standard spectral estimation methods through the use of quadratic forms. This approach gives some insight in the comparison of the maximum entropy and maximum likelihood methods, and yields a set of new intermediate techniques (parametrized likelihood) by approximating R^{-1} . Along the same lines, the relationships between eigen models (e.g. Pisarenko method) and maximum likelihood are emphasized and lead to various approximations of R . Results are given in case of real and simulated signals.



1. MOTIVATION

Considérant un processus stochastique discret, x_t stationnaire au sens large, supposé doté d'une densité spectrale de puissance $S(\Psi)$, le problème fondamental de l'analyse spectrale consiste à associer à un échantillon fini :

$$\{x_t\} : x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}$$

un spectre $\hat{S}(\Psi)$ estimé au mieux sur cet échantillon. Ceci peut être réalisé par des techniques non-paramétriques : périodogramme (PG), périodogramme lissé (PL), périodogrammes cumulés (PC)... réalisant le meilleur compromis entre biais et variance asymptotiques de l'estimation ; ou encore par des techniques paramétriques : modèles ARMA, maximum d'entropie (ME) ... où les paramètres d'un modèle estimé sur le signal définissent le spectre estimé. Dans chacune de ces approches, on rencontre les problèmes suivants, liés à la nature finie des données :

- Estimation des coefficients d'auto-corrélation r_i , ou mieux, globalement de la matrice d'auto-corrélation R . Cette meilleure estimée doit-elle être contrainte à la structure de Toeplitz ; quelle fenêtre de pondération des échantillons choisir ou comment prolonger les données $x_t \dots$?
- Analyse spectrale : quel spectre attacher à une matrice d'auto-corrélation finie, en particulier dans le cas où l'estimée n'est pas de Toeplitz ; Comment prolonger la corrélation r_i en dehors de la séquence estimée ... ?

Le présent papier n'a pas la prétention de répondre à ces diverses questions fondamentales, mais il tente cependant d'analyser les méthodes classiques de l'analyse spectrale sous l'angle des approximations de la matrice de corrélation théorique, dont la structure est Toeplitz infinie, par des formes quadratiques finies.

La plupart de ces estimateurs spectraux peuvent être écrits suivant Lacoss [1] sous forme quadratique. On définit le vecteur d'échantillons x , le vecteur de paramètres du modèle autorégressif (AR) de prédiction a , le vecteur spectral e et son complexe conjugué transposé e^* (wave number) par :

$$x^T = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}] \quad R = E [x x^T]$$

$$a^T = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_p] \quad e^T = [1 \ e^{j\Psi} \ \dots \ e^{j(n-1)\Psi}]$$

Dans ces notations les estimateurs principaux s'écrivent :

$$S_{PG} = \frac{1}{n^2} e^* x x^T e \quad (1) \quad S_{PM} = \frac{1}{n^2} e^* R e \quad (2)$$

$$S_{ME}^{-1} = e^* a a^T e \quad (3) \quad S_{MV}^{-1} = e^* R^{-1} e \quad (4)$$

Dans la suite, on rappellera comment l'algèbre des matrices de Toeplitz permet de représenter diverses versions du périodogramme (paragraphe 2), de même l'introduction de formes quadratiques choisies aide à l'estimation des coefficients de corrélation et plus généralement de la matrice R (paragraphe 3). On montre ensuite que la liaison entre les méthodes du maximum d'entropie et de vraisemblance est fondée sur une approximation spéciale de R^{-1} , celle-ci permet d'introduire des versions paramétriques du maximum de vraisemblance (paragraphe 4). Une autre approche consiste à expliciter les vecteurs propres et valeurs propres de R ; ceux-ci sont associés à des modèles propres (dont celui de Pisarenko) définissant des spectres de raies, l'approximation par quelques vecteurs propres choisis fournit alors de nouveaux estimateurs

spectraux (paragraphe 5).

2. ESTIMATION SPECTRALE ET FORMES QUADRATIQUES

L'algèbre de certaines matrices de Toeplitz est en isomorphisme avec l'anneau des polynômes en z et z^{-1} . Ainsi, explicitant sous forme de vecteurs les coefficients des différents degrés, le produit de deux polynômes $A(z)$ de degré p et $B(z)$ de degré q , s'exprime matriciellement par :

$$C = A b \quad C(z) = A(z) B(z) \quad (5)$$

en définissant avec des dimensions cohérentes :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_p & 0 \\ & a_0 & & a_1 & \dots & a_p \\ 0 & & & a_0 & & a_1 & \dots & a_p \end{bmatrix} \quad b^T = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_q]$$

$$c^T = [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{p+q}] \quad (6)$$

Cette notation est aisément généralisée à des matrices B et C définies comme A . La commutativité des polynômes entraîne celle des matrices correspondantes avec les dimensions adéquates. En particulier, on note que tout produit du type $A^T A$ est une matrice carrée de Toeplitz symétrique.

Le périodogramme est la base de l'analyse spectrale non paramétrique et de ses élaborations [2], il s'écrit sous la forme :

$$S_{PG}(\Psi) = \frac{1}{n^2} e^* x x^T e = \frac{1}{n^2} x^T e e^* x = \frac{1}{n^2} x^T C x \quad (7)$$

où C est une matrice de Toeplitz complexe dépendant de la fréquence. Le périodogramme moyen, espérance de S_{PG} , s'exprime alors :

$$S_{PM}(\Psi) = \frac{1}{n^2} e^* E [x x^T] e = \frac{1}{n^2} e^* R e \quad (8)$$

Le périodogramme cumulé résultant de la moyenne de m périodogrammes élémentaires de longueur l , avec ou sans recouvrement, se met sous forme quadratique en utilisant (13).

Les fenêtres spectrales de lissage, reviennent à interposer dans l'expression (7) une forme quadratique de Toeplitz Γ construite sur les coefficients d'autocorrélation γ_i de la fenêtre de réponse impulsionnelle f_i .

On a en particulier pour l'énergie du signal :

$$S_{PL}(0) = \frac{1}{n} x^T \Gamma x \quad \text{avec} \quad \Gamma = E^T E \quad (9)$$

La valeur à la fréquence Ψ s'obtient en multipliant γ_i par $e^{j(i\Psi)}$ pour obtenir une matrice Γ complexe. La factorization de la fenêtre peut être réalisée selon la version complexe de (9) ou encore en décomposant Γ en produit triangulaire de Choleski par un algorithme de Levinson complexe.

3. ESTIMATION DE LA CORRELATION ET FORMES QUADRATIQUES

Une remarque d'importance pour le calcul de formes quadratiques de Toeplitz du type (8) ou (9) est leur linéarité par rapport aux coefficients de la matrice. Soit par exemple à calculer $S_{PM}(\Psi)$, on a :

$$S_{PM}(\Psi) = \frac{1}{n^2} e^* R e = r^T E e \quad (10)$$

où E est la matrice de type (6) bâtie sur les coefficients $e^{-j(i\Psi)}$ et

$$r^T = [r_n \ r_{n-1} \ \dots \ r_1 \ r_0 \ r_1 \ \dots \ r_{n-1} \ r_n]$$

Se fondant sur cette remarque, Anderson [3] a

introduit une technique d'estimation des r_i particulièrement utile, dite méthode des formes quadratiques. Un estimateur classique de r_i est donné par :

$$r_i = x^T H_i x \tag{11}$$

ou H_i est définie en (12). Cet estimateur présente l'inconvénient que les H_i ne sont pas diagonalisables dans une même base. D'où l'idée de remplacer H_i par une séquence de Q_i , proches de H_i , possédant cette propriété. La condition est que Q_i s'exprime en un polynôme d'une matrice élémentaire Q_1 , divers choix sont alors possibles parmi lequel celui de forme circulante :

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Ce choix accélère considérablement le calcul d'expressions du type (10), en appliquant directement sur les données x la matrice de diagonalisation des Q_i .

Mais dans de nombreux problèmes, c'est globalement la matrice R qui doit être estimée par opposition aux r_i indépendamment (préservation du caractère défini positif de R lié à la stabilité des prédicteurs par exemple). L'approche précédente peut être généralisée en introduisant un estimateur de R sous la forme :

$$R = X^T W X \tag{13}$$

Le choix de $W = I$ correspond à un estimateur classique de R où, fondamentalement, les données extérieures à la fenêtre de mesure $[0, n-1]$ sont forcées à zéro. Les conditions initiales et finales sont connues pour leur influence déterminante sur la stabilité des modèles établis (même pour des fenêtres relativement longues) par la prédiction linéaire ou selon le maximum d'entropie. Le choix convenable d'une matrice W de Toeplitz, proche de I , joue, au niveau matriciel, le rôle d'une pondération assurant la transition souple des conditions de bord. Certains choix ($W = I + H_n$ par exemple) assurent la coincidence avec les estimateurs scalaires de Anderson.

4. MAXIMUM D'ENTROPIE ET MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE PARAMETRE

La méthode du maximum d'entropie introduite par Burg [4] [5] et abondamment commentée dans la littérature, tire son origine d'un argument non-paramétrique. Il s'agit de construire le spectre le plus neutre (le plus plat) par rapport aux données non mesurées. Le résultat en est, a posteriori, un modèle AR paramétrique, obtenu en résolvant des conditions d'orthogonalité classiques (équations normales). Le spectre correspondant est donné par (3).

La méthode du maximum de vraisemblance est prouvée par un argument paramétrique où l'on bâtit le filtre MA adapté à la détection d'une sinusoïde dans le bruit, conservant à la sortie l'énergie du signal d'origine. Son résultat est donné par (4) et s'exprime de façon entièrement non-paramétrique. L'analogie avec le périodogramme cumulé est frappante en assimilant (à tort car R^{-1} n'est pas de Toeplitz en dimension finie) l'inverse de la matrice de corrélation ... à la corrélation du processus de spectre inverse.

La liaison entre ces deux estimateurs a été explicitée par Burg [6] qui a montré que, si l'on désigne par $S_{ME}^1(\psi)$ le maximum d'entropie pour un ordre p , on a :

$$\frac{1}{S_{MV}^n(\psi)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{S_{ME}^i(\psi)} \tag{14}$$

Le spectre inverse du MV ne serait donc qu'une version floue de la superposition des spectres ME inverses d'ordres successifs. L'arbitrage entre ces deux approches n'est cependant pas si clair du fait de la spécificité opposée des signaux considérés (spectre continu ou discret, pôles intérieurs ou sur le cercle unité). D'où l'idée de considérer une famille d'estimateurs, dénommé ici maximum de vraisemblance paramétré, effectuant la transition entre les deux extrêmes.

Soit $\{r_0, r_1, \dots, r_p, \dots, r_n\}$ la séquence d'auto-corrélation estimée. Le calcul du facteur de Choleski $R^{-1/2}$ produit une suite de blanchisseurs d'ordre croissant, variables dans le temps, appliqués aux données x_0, \dots, x_{n-1} . Le spectre à associer à cette suite de filtres variables n'est pas évident ; la méthode du ME choisit le filtre le plus long, i.e. d'ordre n . Mais, si l'ordre n est sur-dimensionné, le spectre en question est distordu par la présence de pics parasites. On peut alors profiter de l'effet de lissage du MV en appliquant la méthode du ME jusqu'à l'ordre p (ce qui calcule $R^{-1/2}$) et en prolongeant la matrice par un prédicteur constant. La matrice $R_n^{-1/2}$ est alors approximée selon (15).

$$R_n^{-1/2} = \begin{bmatrix} \text{---} & & & & \\ & \text{---} & & & \\ & & \text{---} & & \\ & & & \text{---} & \\ & & & & \text{---} \end{bmatrix} \quad a^T = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_p] \tag{15}$$

A $R_p^{-1/2}$

Coefficients du prédicteur d'ordre p .

Le cas limite $p = n$ est la méthode du MV. L'élimination de $R_p^{-1/2}$ donne une approximation :

$$R^{-1} \approx A A^T \tag{16}$$

qui fait coïncider MV et ME. On note par ailleurs que c'est cette même approximation qui permet l'équivalence (approximative) des critères du maximum de vraisemblance et des moindres carrés en prédiction linéaire. Les figures 1, 2 et 3 montrent les résultats observés sur un signal synthétique obtenu en faisant transiter un bruit blanc dans un modèle AR (hypothèse défavorable au MV si les pôles sont internes). La figure 1 compare le spectre du MV à celui du ME à l'ordre n pour un processus d'ordre $p \approx n$, le spectre MV manque de résolution comme attendu par (14). Mais sur la figure 2, la même comparaison est entreprise pour $p < n$, alors le spectre ME est distordu par un ordre excessif et l'effet de lissage du spectre MV est favorable. La figure 3 montre différents intermédiaires réalisés selon (15) pour diverses valeurs de p et n .

5. MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE ET MODELES PROPRES

Une autre façon d'approximer R est d'utiliser la décomposition en vecteurs propres et valeurs propres :

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u_i u_i^T \quad u_i \text{ vecteur propre associé à } \lambda_i \tag{17}$$

qui permet d'accéder aux fonctions de la matrice R , dont R^{-1} est un exemple particulier. On a :

$$R^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} u_i u_i^T \tag{18}$$



Cette décomposition est associée à un ensemble de modèles propres utilisant comme prédicteur les coefficients de u_1 . Ceux-ci apparaissent dans de nombreux contextes et une résolution rapide peut être envisagée [7]. Ils résultent en particulier de l'application du critère du M.V. à un signal déterministe entaché de bruit additif [8]. Leur propriété essentielle dans le cas stationnaire ici considéré (R est Toeplitz) est de posséder, pour la plupart, des zéros sur le cercle unité. Ils sont donc associés à des spectres de raies. La méthode de Pisarenko [9] en est un exemple particulier important qui conserve pour modèle u_0 vecteur associé à la valeur propre minimale λ_0 .

Cette capacité de modélisation n'est pas réservée à u surtout quand les valeurs minimales sont proches, mais aux u_i associés à ces valeurs pourvu que stable [10]. On remarque sur les figures 4 et 5 un exemple de signal de parole (voyelle u) où la modélisation pour u_2 (troisième vecteur) est supérieure pour la détermination des fréquences de formants. L'énergie [11] et la phase [12] de chaque sinusoïde composante peut être extraite pour déduire l'amplitude des raies correspondantes (l'application de la FFT sur u n'est qu'une approximation).

Dans le même esprit, on peut songer à représenter le spectre par l'ensemble des modèles u_i associés aux valeurs minimales. La liaison avec le spectre du MV réside dans l'approximation de R^{-1} par p valeurs :

$$R^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\lambda_i} u_i u_i^T \quad (19)$$

Le spectre résulte alors de la superposition des modèles propres pondérés par la valeur propre. Pour $p \neq 0$, le spectre est lisse et constitue selon la figure 6 une bonne modélisation du spectre original.

Le spectre du ME associé au prédicteur optimal a s'exprime lui aussi en termes de vecteurs propres pondérés :

$$a = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{w_i}{\lambda_i} u_i$$

avec α énergie de l'erreur de prédiction, w_i première coordonnée de u_i . Le même type d'approximation s'applique en conservant seulement les valeurs propres minimales. Le cas $\lambda_0 = 0$ unifie ME et modèle propre (Pisarenko).

6. CONCLUSIONS

On a montré dans ce papier que les techniques traditionnelles de l'analyse spectrale : estimation des coefficients et matrices de corrélation, diverses expressions du périodogramme ... peuvent être reformulées par l'intermédiaire de formes quadratiques de Toeplitz. L'intérêt en est de jeter les bases d'une approximation dans le cas fini. Elle a entraîné la mise en évidence d'estimateurs intermédiaires utiles, entre les estimateurs traditionnels : maximum de vraisemblance paramétré, superposition de modèles propres. Le développement de ce travail devrait se faire dans l'optique de critères quantitatifs définissant des distances : entre matrices de Toeplitz ou d'une matrice quelconque à une matrice de Toeplitz. Ces problèmes ont fait l'objet d'une attention soutenue dans la littérature mais n'ont pas atteint un achèvement satisfaisant. Le premier est lié à l'éternel problème des critères de blancheur spectrale (distance de R à l'identité), il pourrait être avantageusement abordé par des techniques d'inverses généralisées associées aux formes de Toeplitz non carrées. Le deuxième a déjà

permis la définition d'indices structurels, limités à des valeurs discrètes, mesurant le caractère proche de Toeplitz (rang de déplacement [13]) mais cette caractéristique gagnerait à être affinée par une notion de distance moins restrictive.

Remerciements : les auteurs remercient L.S. SCHARF (CSU) et T. PARKS (Rice Univ.) ainsi que les membres du Département SYC (ENST) pour d'intéressantes discussions sur le sujet de cet article.

REFERENCES

- 1 Y. LECOURTIER, B. PICINBONO : Interprétation des méthodes non paramétriques d'analyse spectrale, Annales des Télécommunications, Vol 33, n° 9/10, pp 315-330, 1978
- 2 R.T. LACOSS : Data adaptive spectral analysis methods, Geophysics, Vol 36, n° 4, pp 661-675, Aug. 1971
- 3 T.W. ANDERSON : The statistical analysis of time series, Chap. 6 "Serial Correlation", Wiley Series in Probability and Math. Statistics, 1958
- 4 J.P. BURG : Maximum entropy spectral analysis, 37th Meeting Soc. Exp. Geophysicists, pp 34-41, 1967
- 5 T.J. ULRICH, T.N. BISHOP : Maximum entropy spectral analysis and auto-regressive decomposition, Reviews of geophysics and space physics, Vol 13, n° 1, pp 183-200, Feb. 1975
- 6 J.P. BURG : The relation between maximum entropy and maximum likelihood spectra, Geophysics, Vol 37, n° 2, pp 353-354, June 1972
- 7 F. GIANNELLA, C. GUEGUEN : Extraction des vecteurs propres des matrices de Toeplitz, GRETSI, 1981, Ce volume
- 8 M. AOKI, P. YUE : On a priori error estimates of some identification methods, IEEE Trans. on AC, Vol AC-15, n° 5, pp 541-548, Oct. 1970
- 9 V.F. PISARENKO : The retrieval of harmonics from a covariance function, Geophysics J. Roy. Astr. Soc., Vol 33, pp 347-366, 1973
- 10 C. GUEGUEN : Linear prediction in the singular case and the stability of eigen-models, 1981 ICASSP Proceedings, Vol 2, pp 881-885, April 81
- 11 C. GUEGUEN : La prédiction linéaire modifiée et son application à la modélisation du signal de parole, GRETSI, 1975, Papier 75, Nice 1975
- 12 J. LE ROUX, F. GIANNELLA : Whiteness criteria for ARMA models identification, To appear ECCTD 81
- 13 M. MORF, B. FRIEDLANDER, T. KAILATH, L. LJUNG : New inversion formulas for matrices classified in terms of their distances from Toeplitz matrices, Linear algebra and its applications, Vol 27, pp 31-60, 1979

ANALYSE SPECTRALE ET APPROXIMATION DE FORMES QUADRATIQUES



Signal Analysé

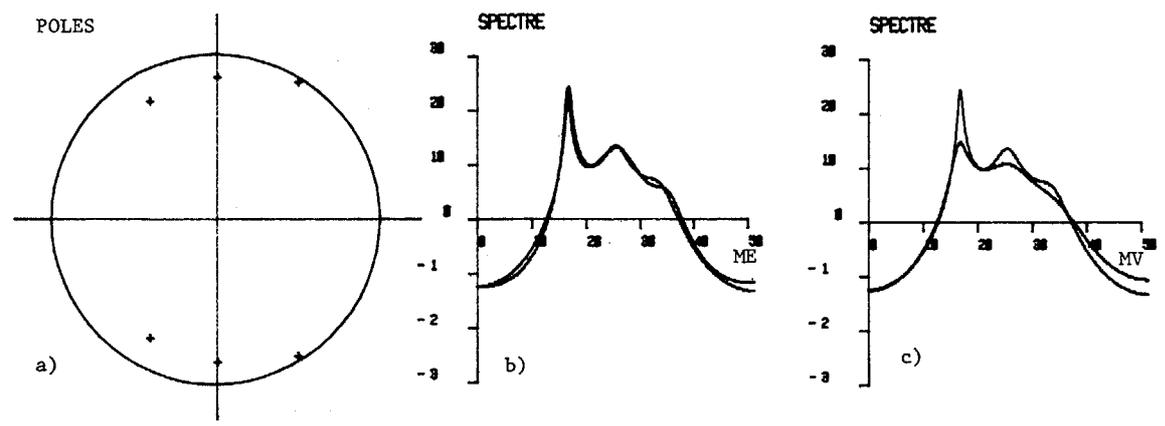


FIGURE 1 : a) Pôles du modèle Ordre $p = 6$ b) Spectre ME vs modèle Dimension $n = 31$ c) Spectre MV vs modèle

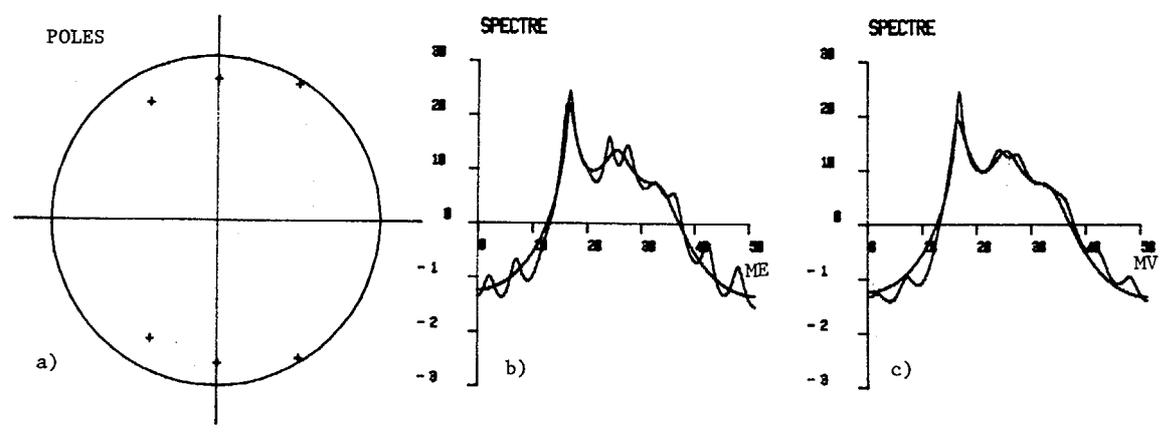


FIGURE 2 : a) Pôles du modèle Ordre $p = 30$ b) Spectre ME vs modèle Dimension $n = 31$ c) Spectre MV vs modèle

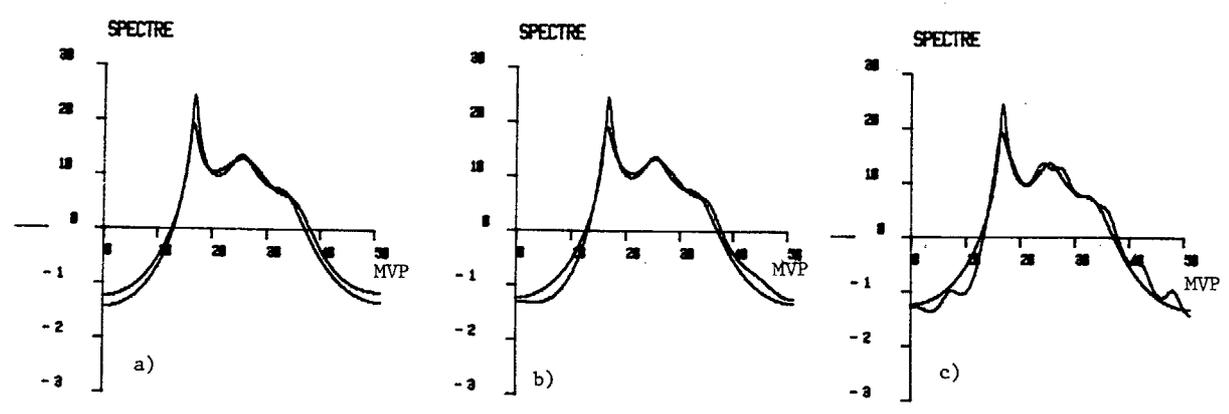


FIGURE 3 : Spectres du Maximum de Vraisemblance Paramétré
 a) $p = 10$ $n = 31$ b) $p = 14$ $n = 31$ c) $p = 26$ $n = 31$

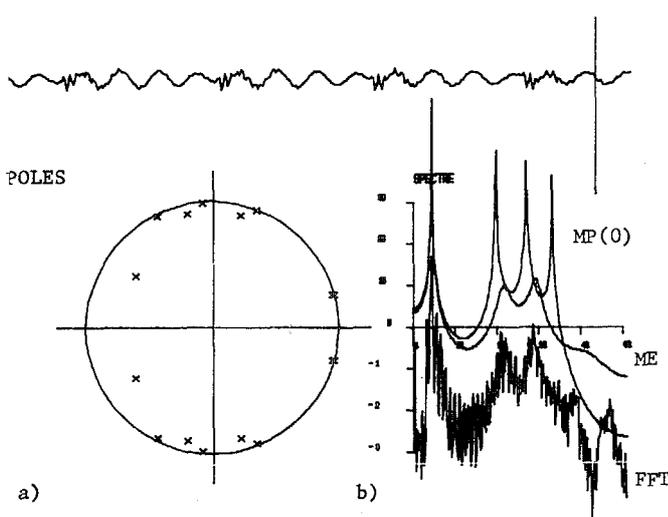


FIGURE 4 : a) Position relative des poles
b) Spectres correspondants
pour MP(0) Modèle Propre associé à λ_0 (Pisarenko)

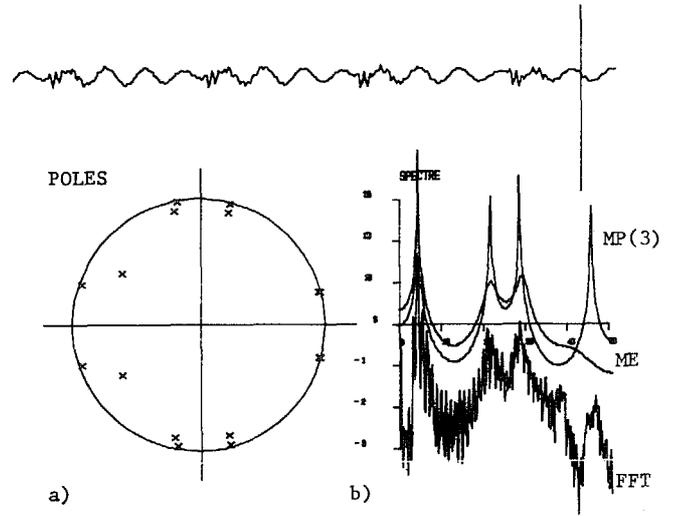


FIGURE 5 : a) Position relative des poles
b) Spectres correspondants
pour MP(2) Modèle Propre associé à λ_2



Signal Analysé : Signal de parole , voyelle u

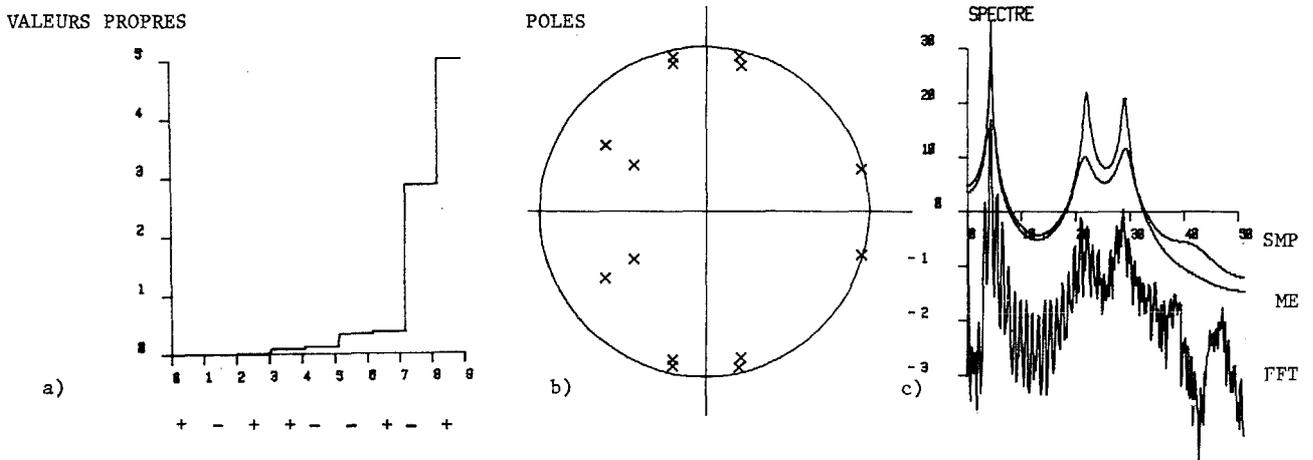


FIGURE 6 : Superposition des modèles propres $MP(i)$ associés aux valeurs propres minimales
a) Etallement des valeurs propres et symétrie du vecteur propre
c) Comparaison des spectres de FFT, du ME et de superposition de MP (SMP)