

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

69



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

GEOMETRIE DES FONCTIONS D'AMBIGUITE ET DES REPRESENTATIONS
CONJOINTES DE VILLE : L'APPROCHE DE LA THEORIE DES CATASTROPHES

P. FLANDRIN

B. ESCUDIE

LABORATOIRE TRAITEMENT DU SIGNAL I.C.P.T. 25 rue du Plat, 69288 LYON CEDEX 1

RESUME

Dans le cas de signaux fortement modulés en fréquence, l'étude de la représentation conjointe (au sens de VILLE) et de la fonction d'ambiguïté en translation (SUSSMAN, WOODWARD...) peut-être envisagée dans le cadre formel de la théorie des catastrophes élémentaires. Ces deux descriptions, liées par transformation de FOURIER, s'interprètent alors comme singularités en temps t et fréquence ν dont la trace dans le plan (t, ν) est fonctionnellement dépendante de la loi de modulation $\nu_i(t)$. Dans les deux cas, on explicite, par construction géométrique du lieu des singularités, le comportement de ces fonctions. Le cadre théorique justifie que ces comportements se ramènent à un nombre fini de cas typiques simples. On confronte les résultats théoriques obtenus à l'étude pratique de cas réels ; ce faisant, on met en évidence des paramètres (caractéristiques des lois de modulation) précisant les conditions de validité du modèle.

SUMMARY

Joint representation (in VILLE's sens) and ambiguity function (SUSSMAN, WOODWARD) of highly modulated signals may be studied in the framework of catastrophe theory. These two ways of description, which form a FOURIER pair, are thus interpreted as singularities in time t and frequency ν . In both cases, the structure in the time-frequency plane depends explicitly on the modulation law $\nu_i(t)$ and an easy geometrical construction of this structure is proposed. The theoretical framework enables us to claim that all the possible structures reduce to a finite number of typical (generic) cases. Theoretical solutions and real calculations are compared ; therefore, we exhibit intrinsic signal parameters describing the validity area of the model.



I - La théorie des Catastrophes [1][2] :

une introduction.

Le modèle de la Théorie des Catastrophes (TC) [1] s'intéresse à des systèmes dont l'état est :

- décrit par un ensemble de variables internes, les variables d'état : $\alpha \in V$,
- paramétré par un ensemble de variables externes, les variables de contrôle : $x \in \mathbb{R}^p$.

La TC postule alors l'existence d'un potentiel $\phi(\alpha, x)$ régissant à lui seul le système : physiquement, cela signifie qu'à toute valeur x imposée aux paramètres externes, les variables internes α répondent en se plaçant sur un minimum local de ϕ . Cette hypothèse ne sera vérifiée que si la "dynamique externe" des paramètres est lente vis à vis de la "dynamique interne" du système : celui-ci est alors presque partout dans un état d'équilibre.

Les états possibles (observables) du système correspondront à des singularités stables du potentiel : par stabilité, on entend que la structure de la singularité ne doit pas être modifiée par une faible perturbation sur le potentiel. Pratiquement, cette notion de stabilité structurelle est reliée à celle de reproductibilité qui exige que de faibles perturbations sur les conditions expérimentales ne modifient que faiblement les observations.

Lorsqu'on ne s'intéresse qu'au comportement local de fonctions C^∞ , deux fonctions égales dans un voisinage assez petit de l'origine sont considérées comme un même objet, nommé germe de fonction. En appelant corang la dimension de l'espace des états et codimension celle de l'espace de contrôle, on peut montrer [1][2] que les germes de codimension inférieure ou égale à 4 sont de corang au plus égal à 2, ce qui réduit leur classification à celle des fonctions d'au plus deux variables.

Ainsi, en prenant un développement polynômial (ce qui est toujours possible si l'on travaille en codimension finie), le théorème de THOM établit qu'il n'existe que 7 potentiels élémentaires (si $p \leq 4$) susceptibles de satisfaire au modèle envisagé. Par définition, on appelle ensemble de catastrophes le lieu des singularités de ces potentiels. Le tableau ci-dessous donne la liste et les dénominations des cinq plus simples (corang 1) :

Codimension	0	x^2	minimum simple
	1	$\frac{x^3}{3} + \mu x$	pli
	2	$\frac{x^4}{4} + \mu \frac{x^2}{2} + \nu x$	fronce
	3	$\frac{x^5}{5} + \mu \frac{x^3}{3} + \nu \frac{x^2}{2} + \omega x$	queue d'arande
	4	$\frac{x^6}{6} + \mu \frac{x^4}{4} + \nu \frac{x^3}{3} + \omega \frac{x^2}{2} + \nu x$	papillon

II - Intégrales oscillantes [2][3]

1°) Formulation générale

On s'intéresse à des intégrales de la forme :

$$\mu_{\text{osc}}(\alpha, \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} a(\alpha, x, \mu) e^{i\mu\phi(\alpha, x)} dx; \alpha \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^p(1)$$

Pour de grandes valeurs de μ , le comportement asymptotique de (1) ne dépend que des jets de α et de ϕ sur la variété critique C_ϕ :

$$C_\phi = \left\{ (\alpha, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial}{\partial \alpha} \phi(\alpha, x) = 0 \right\} \quad (2)$$

En termes de TC, on est en présence :

- d'une variable d'état : $\alpha \in \mathbb{R}^n$;
- d'une variable de contrôle : $x \in \mathbb{R}^p$;
- d'un potentiel $\mu\phi$ dont la variété critique

C_ϕ définit l'ensemble de catastrophes.

L'intérêt d'un tel formalisme est de nous permettre de mettre l'intégrale (1) sous forme standard et, ainsi, de réduire l'étude de ses propriétés à un petit nombre de cas.

La projection $\pi : C_\phi \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, projection de la variété critique dans l'espace de contrôle, permet, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^p$, de distinguer trois cas :

- a) la "zone d'ombre" : pas de points critique ;
- b) la "zone éclairée" : points critiques mais MORSE ($\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \phi|_{\alpha_0} \neq 0$) ;
- c) la "caustique" : points critiques dégénérés.

Le cas a) correspondant à une décroissance rapide avec μ et b) étant justiciable de la méthode de la phase stationnaire [12], c'est au cas c) que l'on va maintenant s'intéresser.

2°) Caustiques et déploiements universels

La caustique C correspond par définition aux points α au-dessus desquels le germe $\alpha \mapsto \varphi(\alpha, \alpha)$ admet un point critique dégénéré. Le théorème de THOM établit alors qu'avec $\text{codim} \leq 4$, le nombre de caustiques génériques est égal à 7.

Si l'on considère, $\forall \alpha_0 \in \mathbb{R}^p$, la phase φ comme étant un déploiement [2] du germe $g: \alpha \mapsto g(\alpha) = \varphi(\alpha_0, \alpha)$, on peut montrer [3] que l'étude du comportement asymptotique de (1) se réduit à celle de l'intégrale :

$$G(y, \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mu \psi(y, \alpha)} d\alpha \quad (3)$$

où $\psi(y, \alpha) = g(\alpha) + \sum_{i=1}^k y_i g_i(\alpha)$ est une catastrophe élémentaire mise sous sa forme standard. En corang $n=1$, on a la forme polynomiale :

$$\psi(y, \alpha) = \frac{\alpha^{p+2}}{p+2} + \sum_{i=1}^k y_i \alpha^i ; p \leq 4 \quad (4)$$

ce qui, en codimension 1 ou 2 conduit aux deux catastrophes élémentaires les plus simples : le pli et la fronce.

3°) Solutions au voisinage des caustiques pli et fronce :

On dit que l'on a une singularité pli en $\alpha_0 \in \mathbb{R}^p$ ssi il existe une phase $\varphi(\alpha, \alpha)$ à un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha_0, \alpha) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(\alpha_0, \alpha) = 0 ; \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3}(\alpha_0, \alpha) \neq 0 \quad (5)$$

Le germe $\alpha \mapsto \varphi(\alpha_0, \alpha)$ étant équivalent à $-\alpha^3/3$, (4) et (3) conduisent à la solution :

$$G(y, \mu) = \mu^{-1/3} Ai(\mu^{2/3} y) \quad (6)$$

où $Ai(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\beta^3/3 - z\beta)} d\beta$ est la fonction d'AIROY [2]. La variété critique C_ψ et la caustique C sont alors caractérisées par :

$$C_\psi = \{(y, \alpha) | \alpha^2 = y\} ; C : y = 0 \quad (7)$$

Si l'on passe maintenant en codimension 2, la fronce correspond aux relations :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha_0, \alpha) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(\alpha_0, \alpha) = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3}(\alpha_0, \alpha) = 0 ; \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4}(\alpha_0, \alpha) \neq 0 \quad (8)$$

Une démarche analogue à la précédente conduit à exprimer les solutions à l'aide de la fonction de PEARCEY [2] :

$$Ie(y_1, y_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\beta^4/8 - y_1 \beta^2/2 + y_2 \beta)} d\beta \quad (9)$$

On a alors :

$$C_\psi = \{(y_1, y_2, \alpha) | \alpha^3 + y_1 \alpha + y_2 = 0\} \quad (10)$$

$$C : 4y_1^3 + 27y_2^2 = 0$$

III - La représentation Conjointe de WIGNER-VILLE comme catastrophe dans le temps-fréquence [5].

En écrivant le signal analytique $Z(t) = A(t) e^{i\Phi(t)}$, la représentation conjointe de WIGNER-VILLE [4][9] :

$$P_Z^w(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} Z(t + \frac{\tau}{2}) Z^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad (11)$$

s'écrit :

$$P_Z^w(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} [A(t + \frac{\tau}{2}) A(t - \frac{\tau}{2})] e^{i[\Phi(t + \frac{\tau}{2}) - \Phi(t - \frac{\tau}{2}) - 2\pi\nu\tau]} d\tau \quad (12)$$

Ainsi, sous réserve que Z satisfasse aux conditions dites "asymptotiques" [7] (essentiellement forte modulation de fréquences sous une enveloppe lentement variable), on se trouve en présence d'une intégrale oscillante du type (1) avec :

$$\alpha = A(t + \frac{\tau}{2}) A(t - \frac{\tau}{2}) ; \mu\varphi = \Phi(t + \frac{\tau}{2}) - \Phi(t - \frac{\tau}{2}) - 2\pi\nu\tau \quad (13)$$

soit : - une variable d'état : $\tau \rightarrow$ corang $n=1$
 - deux variables de contrôle : t, ν : codim $p=2$
 et les seules possibilités dans le plan (t, ν) sont :

- points réguliers ;
- catastrophes de pli ;
- catastrophes de fronce.

1°) Catastrophes de pli :

En introduisant la fréquence instantanée :

$$\nu_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \dot{\Phi}(t), \text{ la relation (5) se traduit, pour (13), par :}$$

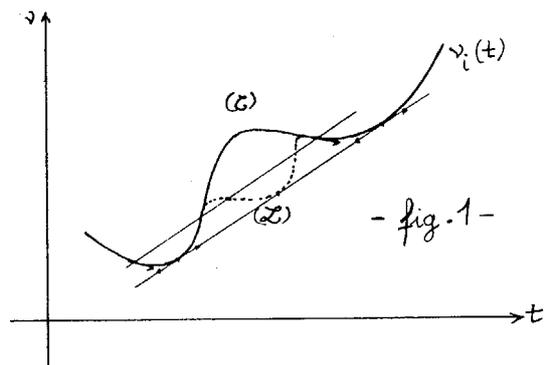
$$\nu = \frac{1}{2} [\nu_i(t + \frac{\tau}{2}) + \nu_i(t - \frac{\tau}{2})] ; \dot{\nu}_i(t + \frac{\tau}{2}) = \dot{\nu}_i(t - \frac{\tau}{2}) \quad (14a)$$

$$\ddot{\nu}_i(t + \frac{\tau}{2}) + \ddot{\nu}_i(t - \frac{\tau}{2}) \neq 0 \quad (14b)$$

(14a) fournit pour solutions les points milieux des segments joignant des points de fréquence instantanée pour lesquels la pente de modulation est la même.

(14b) interdit que les courbures en ces points soient égales et opposées. Il y a donc deux types de solutions : [5]

- le cas $\tau=0 \rightarrow \nu = \nu_i(t)$ (courbe (E)) ;
- le cas $\tau \neq 0 \rightarrow$ lois "fantôme" (courbe (L)).





La solution, déduite de (6), s'exprime alors par :

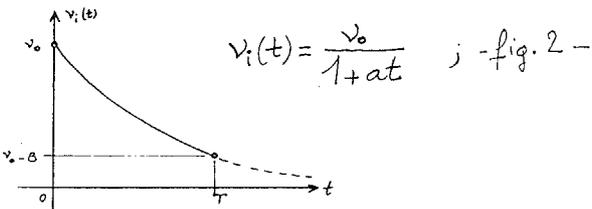
$$\rho_z^w(t, \nu) = k \operatorname{Ai} \left[\left(\frac{32 \pi^2}{\dot{\nu}_i(t)} \right)^{\frac{1}{3}} (\nu - \nu_i(t)) \right] \quad (15)$$

où k satisfait à la propriété : $\int_R \rho_z^w(t, \nu) d\nu = A^2(t)$
 Ainsi, le comportement est décrit par une fonction d'AIKY se déroulant du côté de la concavité de (\mathcal{C}) à partir des points $\nu = \nu_i(t)$. On peut montrer qu'il en est de même pour les courbes (\mathcal{L}) moyennant l'introduction d'un terme de battement dit "haute fréquence" [5]. De même, un calcul classique montre que si $\dot{\nu}_i \rightarrow 0$, les fonctions d'AIKY dégènèrent en sinus cardinaux [8].

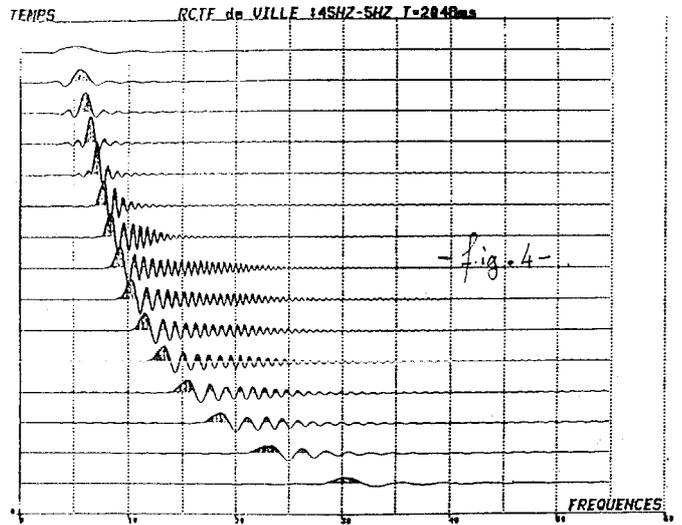
2°) Catastrophes de fronce

Il est clair, au vu de (14a) et (14b), qu'elles ne peuvent apparaître en une courbe du type (\mathcal{C}) . Elle ne peuvent correspondre qu'à des rebroussements de lois du type (\mathcal{L}) [5]. Nous n'approfondirons pas ce point ici [5] [12].

3°) Modulation hyperbolique en fréquence (MHF)



L'exemple calculé (fig. 4) est en bon accord avec cette expression asymptotique :

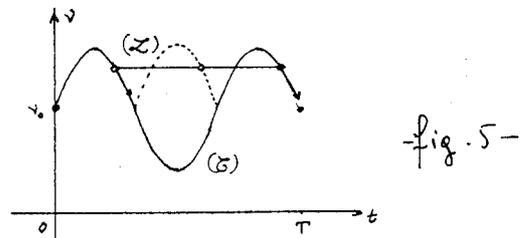


- (i) homothétie des sections à t fixé
- (ii) $t \uparrow \Rightarrow \dot{\nu}_i \downarrow \Rightarrow \operatorname{Ai} \rightarrow \operatorname{sinc}$
- (iii) la situation asymptotique est caractérisée par $\frac{\nu_0}{a} \gg \frac{1}{4\pi}$

Or $\frac{\nu_0}{a} = BT \left[\left(\frac{\nu_0}{B} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]$ ce qui confirme le fait que le seul produit BT ne peut chiffrer le caractère asymptotique d'un signal. Ici, $BT = 82$ et $\lambda = \frac{\nu_0}{a} = 11,5 \sim BT/7$. La situation est bien asymptotique ($4\pi\lambda \sim 140 \gg 1$) mais diffère de presque un ordre de grandeur de ce que le seul BT laissait prévoir.

4°) Modulation sinusoïdale en fréquence

Avant, dans ce cas : $\nu_i(t) = \nu_0 - \frac{B}{2} \sin 3\pi \frac{t}{T}$; $t \in [0, T]$
 le tracé des courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{L}) correspond à la fig. 5 :

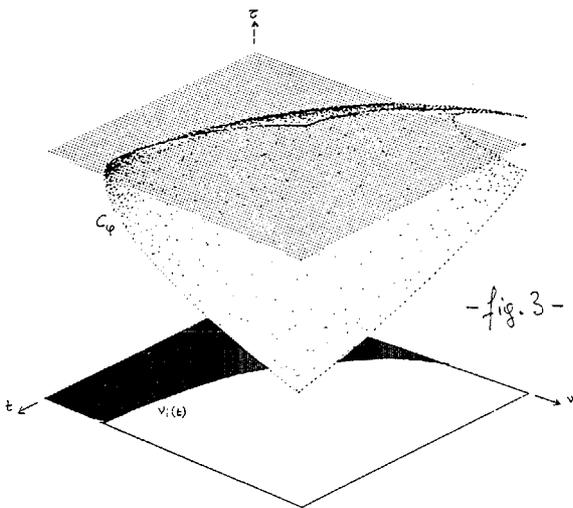


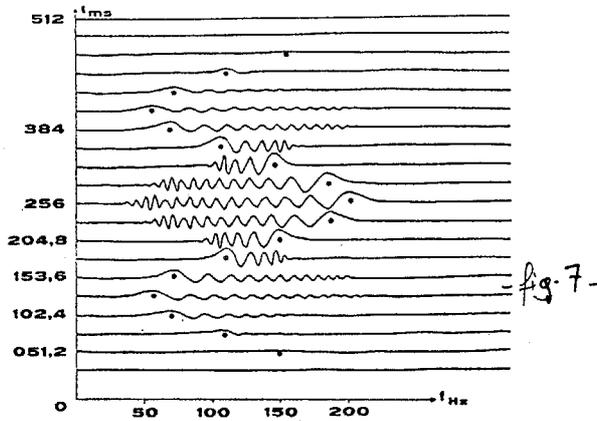
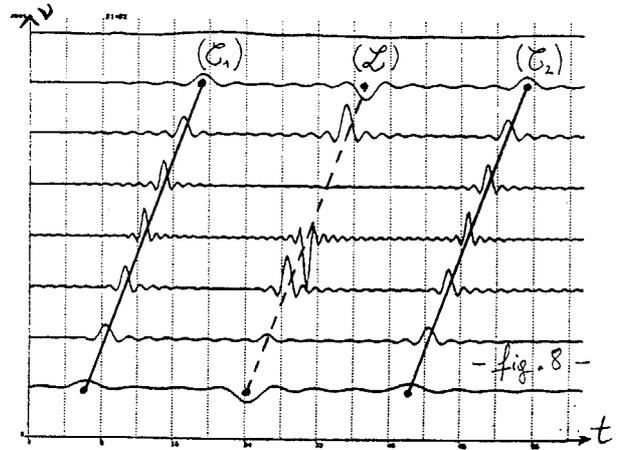
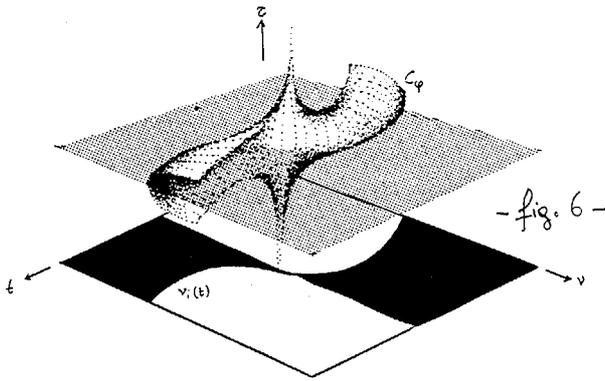
On observe alors un retournement de la variété critique aux points d'inflexion (fig. 6). Le résultat calculé [6], porté sur la fig. 7, illustre bien les caractéristiques théoriques :

- fonction d'AIKY tournée vers la concavité
- loi fantôme modulée HF.

Dans ce cas (figure 3), (15) conduit à :

$$\rho_z^w(t, \nu) \propto \operatorname{Ai} \left[\left(4\pi \frac{\nu_0}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\nu}{\nu_i(t)} - 1 \right) \right] \quad (16)$$





IV - La fonction d'ambiguïté en termes de catastrophes

Sous sa forme symétrique (dite de SUSSMAN), la fonction d'ambiguïté en translation s'écrit :

$$\chi_z^*(n, \tau) = \int_{\mathbb{R}} Z(u + \frac{\tau}{2}) Z^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{i2\pi n u} du \quad (17)$$

et on a la relation : $\chi_z^* \xrightarrow[n]{\tau} \rho_z^w$ [10]

Il est clair que (17) est justiciable d'un traitement semblable à celui effectué précédemment. La caractérisation des zones catastrophiques (de pli) s'écrit ici :

$$n = v_i(u - \frac{\tau}{2}) - v_i(u + \frac{\tau}{2}) \quad (18a)$$

$$\dot{v}_i(u - \frac{\tau}{2}) = \dot{v}_i(u + \frac{\tau}{2}) \quad (18b)$$

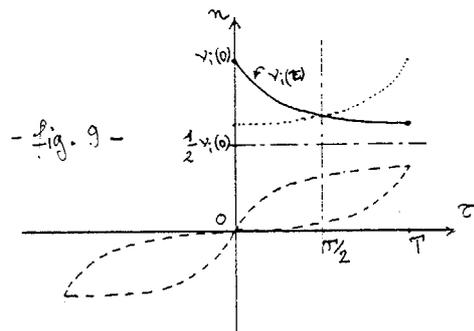
$$\ddot{v}_i(u - \frac{\tau}{2}) \neq \ddot{v}_i(u + \frac{\tau}{2}) \quad (18c)$$

En utilisant le fait que $v_i(\theta)$ est défini pour $0 \leq \theta \leq T$, on est conduit à considérer comme catastrophique l'ensemble des points du plan (n, τ) limité par les courbes d'équations :

$$n_1 = v_i(0) - v_i(\tau) ; n_2 = v_i(T - \tau) - v_i(T) \quad (19)$$

On complète alors la structure en écrivant que χ_z^* possède la symétrie hermitique [10]. La construction géométrique de (19) est donc simple :

- symétrie de $v_i(\tau)$ par rapport à $\frac{1}{2} v_i(0)$;
 - symétrie de $v_i(\tau) - v_i(T)$ par rapport à $\frac{1}{2} T$
- Deux exemples sont donnés aux figures 9 et 10.

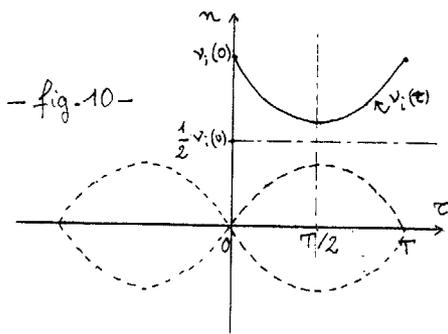


Cet exemple met clairement en évidence le fait qu'il peut exister des zones catastrophiques qui ne sont pas directement caractéristiques de la loi de modulation du signal, mais qui ne sont dues qu'à la structure de la représentation elle-même.

5°) Signaux multicomposantes [12]

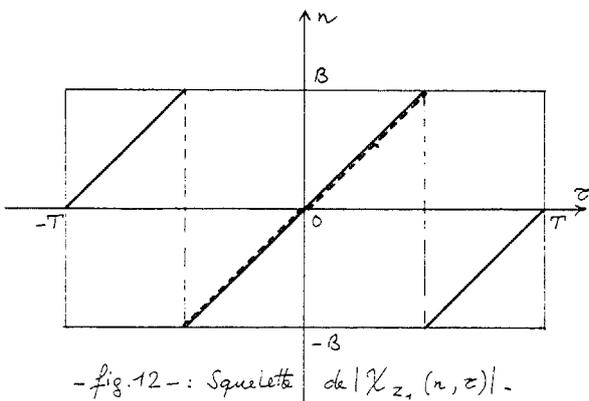
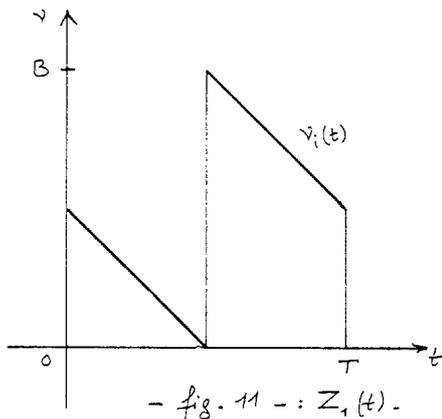
Dans le cas de signaux à deux composantes (ou plus prises deux à deux), l'analyse de (14a) et (14b) conduit à identifier éventuellement une loi fantôme pouvant exister en dehors du domaine d'existence temporelle et/ou fréquentielle de chacune des composantes. Ceci traduit le fait que ρ_z^w s'exprime comme forme hermitienne du signal analytique Z . Un tel exemple est fourni par la fig. 8.

Là encore, le résultat de l'analyse dépend non seulement des caractéristiques propres du signal mais encore de la structure même de la représentation, ce qui attire l'attention sur la difficulté d'interprétation, d'une représentation de WIGNER-VILLE dans un tel cas [12].



Dans le cas général, (18b) et (18c) ne sont pas satisfaites si ce n'est en $\tau = 0 \Rightarrow \nu = 0$. A l'origine du plan (ν, τ) , on observe donc une singularité d'ordre supérieur : le module de la fonction d'ambiguïté y sera maximum. Ailleurs, la non dégénérescence des singularités fera intervenir des fonctions de FRESNEL dans l'expression des solutions.

Cependant, un cas dégénéré est encore fourni par des motifs linéaires parallèles dans le plan temps-fréquence. En effet, dans ce cas, (18a) (18b) et (18c) sont simultanément satisfaites. Un tel exemple est fourni par la loi de la fig. 11 pour laquelle (19) conduit à la structure représentée sur la fig. 12. Ce résultat est en excellent accord avec les calculs effectifs [11].



CONCLUSION

Dans les cas asymptotiques, la théorie des catastrophes permet une compréhension simple et profonde de la structure des représentations conjointes et des fonctions d'ambiguïté (en translation) en termes de singularités dans le plan temps-fréquence. Cette approche s'avère en bon accord avec les résultats obtenus par simulation sur ordinateur : elle apporte en outre des informations sur la caractérisation et la validation des hypothèses asymptotiques.

- [1] R. THOM : "Stabilité structurelle et morphogénèse". Benjamin, Paris 1972
- [2] T. POSTON, I. STEWART : "Catastrophe theory and its applications" Pitman, Londres 1978
- [3] J. CHAZARAIN : Rencontres de Cargèse, Univ. Nice, p. 43-78, 1975
- [4] E.P. WIGNER : Phys. Rev. 40, 749, 1932
- [5] M.V. BERRY : Phil. Trans. Roy. Soc. A, 287, 237-271, 1977
- [6] B. BOUACHACHE : Communication privée, 1980
- [7] P. FLANDRIN et al : EUSIPCO'80, II, 25-26, Lausanne, 1980
- [8] S.A. KRAMER : Proc. IEEE, 55, 5, 627-637, 1967
- [9] J. VILLE : Câbles et transmissions, 2, 1, 61-74, 1948
- [10] B. ESCUDIE : Ann. Télécom., 35, 3-4, 101-111 1979
- [11] A.W. RIHACZEK : "Principles of High-Resolution Radar", Mc Graw Hill, 1969
- [12] P. FLANDRIN : Rapport interne ICPI TS 1980

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier les participants de la RCP 445 (CNRS) pour leurs critiques et suggestions.