

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

APPLICATION D'UNE TECHNIQUE NOUVELLE DE CALCULS DE DEVELOPPEMENTS FONCTIONNELS A LA DETERMINATION DE DISTORSIONS NON LINEAIRES.

Michel FLIESS et Moustanir LAMNABHI.

LABORATOIRE DES SIGNAUX ET SYSTEMES , CNRS-ESE, Plateau du Moulon - 91190 GIF SUR YVETTE.

RESUME

Les séries génératrices non commutatives permettent une meilleure compréhension du développement fonctionnel des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées. On applique cette technique, qui conduit à une généralisation non linéaire du calcul symbolique de Heaviside, à la détermination de distorsions non linéaires d'un circuit électronique modélisé par l'équation de Van der Pol. Comparaisons et discussions sont faites avec des publications récentes basées sur les séries de Volterra.

SUMMARY

Non-commutative generating power series allow a better understanding of functional developments of the solutions of nonlinear differential equations with forcing terms. This technique leads to a nonlinear generalization of Heaviside symbolic calculus and we use it to compute nonlinear distortions of an electronic circuit governed by Van der Pol equation. We discuss our results and compare them with those of recent publications which use Volterra series.



INTRODUCTION.

L'application des développements fonctionnels, c'est-à-dire, jusqu'à présent, des séries de Volterra et de Wiener, aux circuits non linéaires est déjà assez ancienne puisque la première tentative, due à Wiener [22], remonte à 1942. Depuis, un flot constant de publications a alimenté le sujet. Du côté théorique, mentionnons les notes de cours de Wiener [24] et la thèse de Barrett [2] qui, toutes les deux, datent de la fin des années cinquante. Pour l'électronique, notons les articles de Narayanan [19, 20], Crippa [8], Bedrosian et Rice [3], Bussgang, Ehrman et Graham [7], et Bouville et Dubois [4].

En 1980, la parution de deux livres, l'un général, dû à Schetzen [21], l'autre par Weiner et Spina [22], consacré aux circuits faiblement non linéaires, donnerait à penser que le sujet a atteint une certaine maturité. Ainsi, dans la préface de [22], il est écrit: "It has been our experience that the greatest impediment to learning about nonlinear circuit theory is the engineer's fear of the subject matter ... Typically, the engineer automatically assumes that difficult and sophisticated mathematics are involved ..." Et les auteurs de vouloir nous persuader que des calculs relativement élémentaires suffisent à la compréhension du sujet. Il n'en est rien. Les méthodes mises en oeuvre ignorent souvent des effets non linéaires qui peuvent être importants, même avec de petites non linéarités, comme la génération d'harmoniques autres que celles de la sinusoïde d'entrée. Les techniques de transformations de Fourier semblent généralement faire fi de la causalité et sont seulement peut-être valables en régime permanent. Leur validité n'est pas questionnée, alors qu'il s'agit d'un sujet voisin de celui des perturbations étudiées en mécanique céleste. Les calculs sur les séries de Volterra sont souvent pénibles et il n'est presque jamais dit si l'on a cherché à, ou pu les informatiser (une exception remarquable est fournie par [4]).

Le but de la présente communication est la mise en oeuvre, à propos de quelques exemples précis, d'un type nouveau de développements fonctionnels basé sur les séries génératrices non commutatives (voir [9]; en [10] on trouvera un résumé, peut être plus accessible). La nécessité de cette approche est confirmée par la formule particulièrement simple donnant la solution d'équations différentielles non linéaires forcées, problème soulevé depuis longtemps dans la littérature. Le lien avec les séries de Volterra conduit au calcul explicite des noyaux. Enfin, les indéterminées non commutatives permettent d'étendre au non linéaire le calcul symbolique de Heaviside et généralisent ainsi certaines des propriétés des transformations de Laplace et de Fourier.

Les calculs sont effectués à partir d'un circuit non linéaire, modélisé par l'équation de Van der Pol, excité par une entrée sinusoïdale. On détermine les noyaux de Volterra, la génération d'harmoniques et la distorsion de gain. Il s'agit de méthodes systématiques pouvant être reprises avec tout autre exemple.

Ce travail est la première manifestation d'un programme d'études, tant théoriques que pratiques, des circuits non linéaires.

I. RAPPELS SUR LES SERIES GENERATRICES NON COMMUTATIVES (cf. [9, 10])

a) Fonctionnelles causales analytiques

Soit la série formelle

$$\underline{g} = \underline{g}(1) + \sum_{v \geq 0} \sum_{j_0, \dots, j_v=0,1} (\underline{g}, x_{j_v} \dots x_{j_0}) x_{j_v} \dots x_{j_0} \quad (1)$$

Les coefficients $(\underline{g}, 1)$, $(\underline{g}, x_{j_0} \dots x_{j_v})$ sont réels. Les indéterminées x_0, x_1 ne commutent pas : les monômes $x_0 x_1$ et $x_1 x_0$ diffèrent.

Considérons l'entrée $u_1 : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ supposée, pour simplifier, continue. Définissons alors l'intégrale itérée $\int_0^t d\xi_{j_v} \dots d\xi_{j_0}$ par récurrence sur la longueur.

$$\xi_0(\tau) = \tau, \quad \xi_1(\tau) = \int_0^\tau u_1(\sigma) d\sigma,$$

$$\int_0^t d\xi_j = \xi_j(t) \quad (j = 0, 1),$$

$$\int_0^t d\xi_{j_v} \dots d\xi_{j_0} = \int_0^t d\xi_{j_v}(\tau) \int_0^\tau d\xi_{j_{v-1}} \dots d\xi_{j_0} \quad (\text{intégrale de Stieltjes})$$

En (1), remplaçons le mot $x_{j_v} \dots x_{j_0}$ par l'intégrale itérée correspondante $\int_0^t d\xi_{j_v} \dots d\xi_{j_0}$. Sous réserve de convergence, on obtient

$$y(t) = (\underline{g}, 1) + \sum_{v \geq 0} \sum_{j_0, \dots, j_v=0,1} (\underline{g}, x_{j_v} \dots x_{j_0}) \int_0^t d\xi_{j_v} \dots d\xi_{j_0} \quad (2)$$

expression qui décrit y comme fonctionnelle causale de u_1 , c'est-à-dire dépendant des valeurs de $u_1(\tau)$ pour $0 \leq \tau \leq t$.

La fonctionnelle (2) est dite *analytique*. La série (1) est sa *série génératrice*.

b) Equations différentielles forcées.

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{q}_k(t) (= dq_k/dt) = \theta_0^k(q_1, \dots, q_N) + u_1(t) \theta_1^k(q_1, \dots, q_N) \\ y(t) = h(q_1, \dots, q_N) \end{cases} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3)$$

L'état $q = (q_1, \dots, q_N)$ appartient à \mathbb{R}^N ; l'état initial $q(0)$ est donné. Les fonctions $\theta_0^k, \theta_1^k, h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sont analytiques, définies dans un voisinage de $q(0)$.

Avec une notation et une terminologie plus modernes (cf. Arnold [1]), on associe à (3) les deux *champs de vecteurs*, c'est-à-dire les opérateurs différentiels linéaires

$$A_0(q) = \sum_{k=1}^N \theta_0^k(q_1, \dots, q_N) \frac{\partial}{\partial q_k},$$

$$A_1(q) = \sum_{k=1}^N \theta_1^k(q_1, \dots, q_N) \frac{\partial}{\partial q_k}.$$

On montre que la sortie y de (3) est une fonctionnelle causale analytique de série génératrice

$$\underline{g} = h|_0 + \sum_{v \geq 0} \sum_{j_0, \dots, j_v=0,1} A_{j_0} \dots A_{j_v} h|_0 x_{j_v} \dots x_{j_0} \quad (4)$$

La barre $|_0$ indique l'évaluation en $q(0)$. Notez l'ordre inverse des suites $x_{j_v} \dots x_{j_0}$ et $A_{j_0} \dots A_{j_v}$.

Exemple. Soit le système régulier (ou bilinéaire)

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = (B_0 + u_1(t) B_1) q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \end{cases}$$

APPLICATION D'UNE TECHNIQUE NOUVELLE DE CALCULS DE DEVELOPPEMENTS FONCTIONNELS A LA DETERMINATION DE DISTORSIONS NON LINEAIRES.

B_0, B_1 et λ sont, respectivement, des matrices carrées et ligne d'ordre N . La série génératrice est rationnelle :

$$g = q(0) + \sum_{j_0=0}^{\infty} \dots \sum_{j_v=0}^{\infty} \lambda^{j_0} B_{j_0} \dots B_{j_v} q(0) x_{j_0} \dots x_{j_v}$$

c) Liens avec les séries de Volterra.

Jusqu'à présent, le développement fonctionnel le plus courant était donné sous forme de série de Volterra, comme

$$y(t) = w_0(t) + \int_0^t w_1(t, \tau_1) u_1(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^{\tau_2} w_2(t, \tau_2, \tau_1) u_1(\tau_2) u_1(\tau_1) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \int_0^t \int_0^{\tau_n} \dots \int_0^{\tau_2} w_n(t, \tau_n, \dots, \tau_1) u_1(\tau_n) \dots u_1(\tau_1) d\tau_n \dots d\tau_1 + \dots$$

où $t \geq \tau_n \geq \dots \geq \tau_2 \geq \tau_1 \geq 0$. Les noyaux sont, ici, sous forme triangulaire.

Si les noyaux w_n sont des fonctions analytiques, on montre que (4) est une fonctionnelle causale analytique, qui est donc définie par une série génératrice non commutative. Développons w_n non en fonction des variables t, τ_n, \dots, τ_1 , mais $t - \tau_n, \dots, \tau_2 - \tau_1, \tau_1$:

$$w_n(t, \tau_n, \dots, \tau_1) = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0} \frac{(t - \tau_n)^{\alpha_n} \dots (\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_1} \tau_1^{\alpha_0}}{\alpha_n! \dots \alpha_1! \alpha_0!}$$

La série génératrice correspondante est

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0} w_{n, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} x_0^{\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_0^{\alpha_1} x_1^{\alpha_0}$$

Reprenons le système différentiel (3). La formule (4) et ce qui précède permettent d'écrire la solution comme série de Volterra triangulaire (5), où les noyaux ont pour expression

$$w_0(t) = \sum_{\alpha \geq 0} A_0 h |_0 \frac{t^\alpha}{\alpha!} = e^{tA_0} h |_0$$

$$w_1(t, \tau_1) = \sum_{\alpha_0, \alpha_1 \geq 0} A_0^{\alpha_0} A_1 A_0^{\alpha_1} h |_0 \frac{(t - \tau_1)^{\alpha_1} \tau_1^{\alpha_0}}{\alpha_1! \alpha_0!} = e^{\tau_1 A_0} A_1 e^{(t - \tau_1) A_0} h |_0$$

$$w_n(t, \tau_n, \dots, \tau_1) = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0} A_0^{\alpha_0} A_1 A_0^{\alpha_1} A_1 \dots \dots A_1 A_0^{\alpha_n} h |_0 \frac{(t - \tau_n)^{\alpha_n} \dots (\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_1} \tau_1^{\alpha_0}}{\alpha_n! \dots \alpha_1! \alpha_0!} = e^{\tau_1 A_0} A_1 e^{(\tau_2 - \tau_1) A_0} A_1 \dots A_1 e^{(t - \tau_n) A_0} h |_0$$

Remarque. Ces formules sont beaucoup plus simples et explicites que celles obtenues dans les années récentes par Brockett [6], Gilbert [12], Krener et Lesiak [13].

d) Calcul symbolique non commutatif.

La détermination effective de la série génératrice se fait par un calcul symbolique que nous allons

explicitier à l'occasion d'un exemple. Prenons l'équation de Duffing :

$$\dot{y}(t) + ay(t) + by(t) + cy^3(t) = u_f(t) \tag{6}$$

Le calcul symbolique usuel de Heaviside bute sur le terme cubique y^3 .

Introduisons le mélange⁽¹⁾, noté ω , entre séries génératrices et, d'abord, entre mots (c'est-à-dire suites, éventuellement vides, de lettres). Posons par récurrence sur la longueur :

$$1 \omega 1 = 1, \quad 1 \omega x_j = x_j \omega 1 = x_j \quad (j=0,1),$$

$$(x_{j_0} \dots x_{j_v}) \omega (x_{k_0} \dots x_{k_\mu}) = x_{j_0} [(x_{j_1} \dots x_{j_v}) \omega (x_{k_0} \dots x_{k_\mu})] + x_{k_\mu} [(x_{j_0} \dots x_{j_v}) \omega (x_{k_1} \dots x_{k_{\mu-1}})]$$

On a un problème homogène de degré $v + \mu + 2$, soit la somme des longueurs des mots $x_{j_0} \dots x_{j_v}$ et $x_{k_0} \dots x_{k_\mu}$.

Le mélange des deux séries

$$g_i = \sum \{ (g_i, w) w \mid w \in X^* \} \quad (i = 1, 2),$$

où X^* désigne l'ensemble des mots formés à partir de x_0 et x_1 , est la série

$$g_1 \omega g_2 = \sum \{ (g_1, w_1) w_1 \omega w_2 \mid w_1, w_2 \in X^* \}$$

Ces constructions combinatoires sont justifiées par la propriété fondamentale suivante.

- Le produit de deux fonctionnelles causales analytiques est une fonctionnelle de même nature dont la série génératrice est le mélange des séries génératrices.

Revenons à (5) que l'on met sous forme d'équation intégrale :

$$y(t) + a \int_0^t y(\tau) d\tau + b \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1 + c \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} y^3(\tau_1) d\tau_1 = \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} u_1(\tau_1) d\tau_1 + \alpha t + \beta \tag{7}$$

où α et β sont des constantes dépendant des conditions initiales. Les liens entre les lettres x_0, x_1 et les intégrales itérées conduisent à réécrire (7) de la manière suivante :

$$g + a x_0 g + b x_0^2 g + c x_0^2 g \omega g \omega g = x_0 x_2 + \alpha x_0 + \beta$$

$$g_{i+1} + a x_0 g_i + b x_0^2 g_i + c x_0^2 g_i \omega g_i \omega g_i = x_0 x_1 + \alpha x_0 + \beta$$

programmable sur ordinateur (cf. Bonhour et Foucherot [5], Lamnabhi-Lagarrigue [14], Lamnabhi [16])

Cas linéaire. Avec l'équation $\dot{y} + by = u_1$, on aboutit, si $\alpha = \beta = 0$, à $g + b x_0^2 g = x_0 x_1$ qui donne

$$g = (1 + b x_0^2)^{-1} x_0 x_1$$

A un changement élémentaire de variables près, on retrouve la fonction de transfert $\frac{1}{p^2 + b}$. On a bien une généralisation du calcul symbolique de Heaviside.

(1) En anglais le terme consacré est *shuffle product*. Dans la littérature française, on trouve aussi *produit de Hurwitz*.

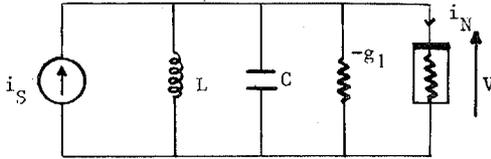


II. APPLICATIONS

a) Préliminaires.

Considérons l'oscillateur de Van der Pol où la résistance non linéaire est supposée de la forme

$$i_N = g_3 v^3, g_3 > 0$$



Le comportement de ce circuit électronique est décrit par l'équation intégrodifférentielle suivante

$$C \frac{dv}{dt} - g_1 v + \frac{1}{L} \int v dt + g_3 v^3 = i_s(t)$$

La série génératrice G associée à la sortie $v(t)$ est solution de l'équation (cf. § I.d).

$$G = -k_3(1-k_1x_0+k_2x_0^2)^{-1}x_0 G \omega G \omega G + (1-k_1x_0+k_2x_0^2)^{-1}x_1 \quad (8)$$

où $k_1=g_1/C$, $k_2=1/LC$, $k_3=g_3/C$ et x_1 représente l'entrée $i_s(t)/C$.

Le développement (5) en série de Volterra de la sortie $v(t)$ est "équivalent" au développement

$$G = G_0 + G_1 + G_2 + \dots$$

de la série génératrice dans lequel G_i est défini par

$$G_i = \sum_{w \in X^*} (G, w) w \quad |w|_{x_1} = i$$

($|w|_{x_1}$ est le nombre d'occurrences de la lettre x_1 dans le mot w).

Les règles combinatoires du mélange (cf. [15]) permettent de déduire les G_i récursivement de (8)

$$G_1 = (1-k_1x_0 + k_2x_0^2)^{-1} x_1$$

$$G_3 = -k_3(1-k_1x_0+k_2x_0^2)^{-1} x_0 G_1 \omega G_1 \omega G_1$$

$$G_5 = -3k_3(1-k_1x_0+k_2x_0^2)^{-1} x_0 G_1 \omega G_1 \omega G_3$$

La forme algébrique de ces expressions permet une mise en oeuvre facile sur ordinateur. Les résultats numériques pour G_3 et G_5 sont donnés dans le tableau 1;

si $(1-k_1x_0+k_2x_0^2)^{-1} = B_1(1-\gamma_1x_0)^{-1} + B_2(1-\gamma_2x_0)^{-1}$, le schéma

6	X	Y	Y	Y	
0	3	2	1	0	
1	0	0	0	0	

dans G_3 sera lu

$$-6 k_3 B_1^3 B_2 (1-\gamma_2 x_0)^{-1} x_0 (1-3\gamma_1 x_0)^{-1} x_1 (1-2\gamma_1 x_0)^{-1} x_1 (1-\gamma_1 x_0)^{-1} x_1.$$

Remarque : A partir des G_i , il est facile de déduire l'expression explicite des noyaux de Volterra w_i sous forme triangulaire. En outre, cette approche nous permet d'éviter les problèmes d'association de variables (cf. [11], [17]) liés à l'utilisation de la transformée de Laplace multidimensionnelle (cf. [16]).

b) Calcul de distorsions.

Nous nous intéressons ici à deux types particuliers de distorsions non linéaires : la distorsion de gain et la génération d'harmoniques.

α) Génération d'harmoniques :

Prenons pour entrée à un système faiblement non linéaire

$$e(t) = |E_1| \cos \omega_1 t$$

la réponse comportera une partie périodique de la forme

$$|A_0| + |A_1| \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + |A_2| \cos(2\omega_1 t + \alpha_2) + |A_3| \cos(3\omega_1 t + \alpha_3) + \dots$$

L'amplitude des diverses harmoniques est peu significative. Par contre leur rapport à l'amplitude de la fréquence fondamentale peut servir comme mesure de distorsion. On définit le rapport de distorsion de la k ème harmonique par

$$\frac{|A_k|}{|A_1|}$$

Ce rapport se calcule de façon aisée à partir des termes de G_k . Par exemple, dans le cas de l'oscillateur de Van der Pol, on a pour le rapport de troisième harmonique (cf. [16]).

$$A_1 = \frac{x_0}{1-k_1 x_0 + k_2 x_0^2} \Big|_{x_0 = \frac{1}{j\omega}}$$

$$A_3 = -\frac{6k_3 B_1^3 B_2}{2} (1-\gamma_2 x_0)^{-1} x_0 (1-3\gamma_1 x_0)^{-1} [1-(2\gamma_1 + j\omega)x_0]^{-1} x_0 [1-(\gamma_1 + 2j\omega_1)x_0]^{-1} x_0 \Big|_{x_0 = \frac{1}{j\omega}} + \dots$$

Les calculs numériques ont été faits sur ordinateur. Les valeurs du 3ème rapport de distorsion harmonique ont été reportés sur la figure 2 pour $C=1$, $g_1=0.1$, $g_3 = 1/30$ et $E_1 = 1/3$.

β) Distorsion de gain.

Prenons toujours pour entrée

$$e(t) = |E_1| \cos \omega_1 t$$

et soit $y_1(t)$ la réponse à la fréquence fondamentale

$$y_1(t) = |A_1| \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$

Nous savons que pour un système linéaire

$$A_1 = E_1 H_1(j\omega_1)$$

où H_1 est la fonction de transfert. Le rapport suivant est une définition classique du gain linéaire

$$\frac{|A_1|}{|E_1|} = |H_1(j\omega)|$$

Toutefois pour un système non linéaire, les contributions à la fréquence fondamentale des noyaux d'ordre supérieur à un sont non nulles. Le gain, pour une fréquence de l'entrée fixée, n'est plus alors constant, mais est fonction de l'amplitude de l'entrée. On a (cf. [22]) .

$$\frac{|A_1|}{|E_1|} = |H_1(j\omega_1) + \frac{3}{4} |E_1|^2 H_3(-j\omega_1, j\omega_1, j\omega_1) + \dots|$$

H_3 étant ici le noyau de Volterra d'ordre 3 symétrique.

Nos techniques nous permettent aussi de déduire systématiquement ce gain à partir des G_i . Dans le cas de l'oscillateur de Van der Pol, on a :

$$\begin{aligned} \frac{|A_1|}{|E_1|} &= \left| \frac{x_0}{1 - k_1 x_0 + k_2 x_0^2} \right|_{x_0 = \frac{1}{j\omega}} \\ &= \frac{6k_3 B_1^3 B_2 |E_1|^2 x_0^4}{4 (1 - \gamma_2 x_0)(1 - 3\gamma_1 x_0) [1 - (2\gamma_1 + j\omega)x_0] (1 - \gamma_1 x_0)} \Big|_{x_0 = \frac{1}{j\omega}} \\ &= \frac{6k_3 B_1^3 B_2 |E_1|^2 x_0^4}{4 (1 - \gamma_2 x_0)(1 - 3\gamma_1 x_0) [1 - (2\gamma_1 + j\omega)x_0] (1 - \gamma_1 x_0)} \Big|_{x_0 = \frac{1}{j\omega}} \\ &= \frac{6k_3 B_1^3 B_2 |E_1|^2 x_0^4}{4 (1 - \gamma_2 x_0)(1 - 3\gamma_1 x_0) [1 - (2\gamma_1 + j\omega)x_0] [(1 - \gamma_1 + 2j\omega)x_0]} \Big|_{x_0 = \frac{1}{j\omega}} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Ces résultats sont représentés sur la figure 3.

Appendice : un phénomène non linéaire.

La réponse, d'un système même faiblement non linéaire à une entrée harmonique peut contenir d'autres harmoniques que celles de l'entrée. Les techniques, développées dans la littérature à partir de la transformée de Fourier, ne permettent pas de mettre en évidence ce phénomène, ni de tenir compte du régime transitoire. Notre approche, tout en permettant d'avoir des résultats facilement exploitables par des moyens informatiques, répond favorablement à ces questions. Toutefois, pour le calcul des solutions périodiques, nous nous trouvons confrontés à un problème de divergence de ce type de développements pour des temps grands; problème connu depuis longtemps en mécanique céleste et dû à la présence de termes dits *séculaires*.

Considérons le système faiblement non linéaire régi par l'équation différentielle

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u - \varepsilon(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3) = E(t)$$

qui est, à un changement de variables près ($v = 3 \dot{u}$), celle de l'oscillateur de Van der Pol.

Nayfeh et Mook [20] ont montré, que dans le cas d'une entrée harmonique

$$E(t) = K \cos \Omega t$$

où Ω est choisi différent de ω_0 , $1/3 \omega_0$ et $3 \omega_0$ pour éviter les cas de première résonance, la solution au premier ordre s'écrit

$$u(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \beta) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos \Omega t + O(\varepsilon)$$

où β est une constante et $a(t)$ donné par

$$a^2(t) = \frac{4\eta}{\omega_0^2 + \left(\frac{4\eta}{a_0^2} - \omega_0^2\right) \exp(-\eta t)}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{2} \Omega^2 K^2 (\omega_0^2 - \Omega^2)^{-2},$$

a_0 est l'amplitude initiale.

En particulier, pour $\eta > 0$, cette solution donne, pour t grand :

$$u(t) = 2\omega_0^{-1} \eta \cos(\omega_0 t + \beta) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos \Omega t + O(\varepsilon)$$

le régime permanent consiste donc, au 1er ordre, en la superposition d'un régime forcé et d'un régime libre. Nos développements révèlent, qu'aux ordres supérieurs, apparaîtront des termes dus, par effet non linéaire, au mélange de la fréquence propre ω_0 du système avec celle de l'entrée Ω .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.I. ARNOLD, Equations différentielles ordinaires (traduit du russe) MIR, Moscou, 1974.
- [2] J.F. BARRETT, The use of functionals in the analysis of nonlinear physical systems, J. Electronics Control, 15, 1963, p. 567-615.
- [3] E. BEDROSIAN et S.O. RICE, The output properties of Volterra systems (nonlinear systems with memory) driven by harmonic and gaussian inputs, Proc. IEEE, 59, 1971, p. 1688-1707.
- [4] C. BOUVILLE et J.L. DUBOIS, Analyse des réseaux faiblement non linéaires par les développements en série de Volterra. Application aux montages à transistors bipolaires, Ann. Télécommunic., 33, 1978, p. 213-224.
- [5] R. BONHOUR et N. FOUCHEROT, Mise en oeuvre informatique d'une nouvelle méthode de calcul en automatique non linéaire, Thèse 3ème Cycle, Université Paris VII, Paris, 1977.
- [6] R.W. BROCKETT, Volterra series and geometric control theory, Automatica 12, 1976, p. 167-176.
- [7] J.J. BUSSGANG, L. EHRMAN et J.S. GRAHAM, Analysis of nonlinear systems with multiple inputs, Proc. IEEE, 62, 1974, p. 1088-1119.
- [8] G. CRIPPA, Evaluation of distortion and intermodulation in nonlinear transmission systems by means of Volterra series expansion, Alta Frequenza, 38, 1969, p. 332-336.
- [9] M. FLIESS, Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, Bull. Soc. Math. France, 109, 1981, n° 1.
- [10] M. FLIESS, Développements fonctionnels et calcul symbolique non commutatif, in "Géométrie Différentielle, Algèbres de Lie, Séries Formelles, Application à la Commande des Systèmes non Linéaires", Coll. RCP 567, Aussois, 1980 (I.D. Landau, ed.), C.N.R.S., Paris, 1981.
- [11] D.A. GEORGE, Continuous nonlinear systems, M.I.T. Research Lab. of Electronics, Tech. Rep. 355, Cambridge, MA, 1959.
- [12] E. GILBERT, Functional expansions for the response of nonlinear differential systems, IEEE Trans. Autom. Contr., 22, 1977, p. 909-921.
- [13] A.J. KRENER et C. LESIAK, The existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems, IEEE Trans. Autom. Contr., 23, 1978, p. 1090-1095.
- [14] F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, Application des variables non commutatives à des calculs formels en statistique non linéaire, Thèse 3ème cycle, Université Paris XI, Orsay 1980.
- [15] F. LAMNABHI-LAGARRIGUE et M. LAMNABHI, Détermination algébrique des noyaux de Volterra associés à certains systèmes non linéaires, Recherche di Automatica, 10, 1979, p. 17-26.
- [16] M. LAMNABHI, Séries de Volterra et séries génératrices non commutatives, Thèse Docteur-Ingénieur, Université Paris XI, Orsay 1980.



APPLICATION D'UNE TECHNIQUE NOUVELLE DE CALCULS DE DEVELOPPEMENTS FONCTIONNELS A LA DETERMINATION DE DISTORSIONS NON LINEAIRES.

- [17] J.K. LUBBOCK et V.S. BANSAL, Multidimensional Laplace transforms for solution of nonlinear equations, Proc. IEEE, 166, 1969, p. 2075-2082.
- [18] S. NARAYANAN, Transistor distortion analysis using Volterra series representation, Bell System Technical J., 46, 1967, p. 991-1024.
- [19] S. NARAYANAN, Application of Volterra series to intermodulation distortion analysis of a transistor feedback amplifier, IEEE Trans. Circuit Theory, 17, 1970, p. 518-527.
- [20] A. NAYFEH et D.T. MOOK, Nonlinear oscillations, Wiley, New York, 1979.
- [21] M. SCHETZEN, The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems, Wiley, New York, 1980.
- [22] D.D. WEINER et J. SPINA, Sinusoidal analysis and modeling of weakly nonlinear circuits, Van Nostrand, New York, 1980.
- [23] N. WIENER, Response of a nonlinear device to noise, Radiation Lab. Techn. Rep. 129, MIT, Cambridge, MA, 1942.
- [24] N. WIENER, Nonlinear problems in random theory, Wiley, New York, 1958.

MOTS DE LONGUEUR 4

6 XYXY	0	3	2	1	0	
0	1	0	0	0	0	
6 XYXY	0	2	1	0	0	
0	1	1	1	0	0	
6 XYXY	0	2	1	1	0	
0	1	1	1	0	0	
6 XYXY	0	2	2	1	0	
0	1	0	0	0	0	
6 XYXY	0	1	0	0	0	
0	1	2	2	1	0	
6 XYXY	0	1	1	0	0	
0	1	2	1	1	0	
6 XYXY	0	1	1	1	0	
0	1	2	1	0	0	
6 XYXY	0	0	0	0	0	
0	1	3	2	1	0	
6 XYXY	0	1	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	
6 XYXY	0	2	1	0	0	
0	1	1	1	0	0	
6 XYXY	0	2	1	1	0	
0	1	1	1	0	0	
6 XYXY	0	2	2	1	0	
0	1	0	0	0	0	
6 XYXY	0	1	0	0	0	
0	1	2	2	1	0	
6 XYXY	0	1	1	0	0	
0	1	2	1	1	0	
6 XYXY	0	1	1	1	0	
0	1	2	1	0	0	
6 XYXY	0	0	0	0	0	
0	1	3	2	1	0	

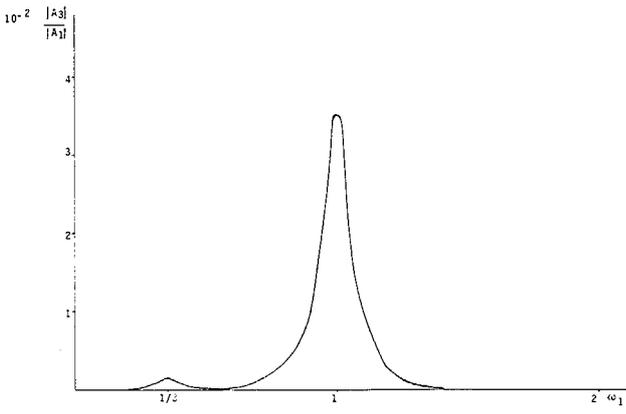


Fig.2-Distorsion harmonique d'ordre 3.Oscillateur de Van der Pol.

MOTS DE LONGUEUR 7

36 XYXYXY	1	2	1	0	3	2	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
144 XYXYXY	0	2	1	4	3	2	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
360 XYXYXY	0	2	5	4	3	2	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
36 XYXYXY	0	2	1	0	2	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
144 XYXYXY	0	2	1	3	2	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
144 XYXYXY	0	2	1	3	2	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
360 XYXYXY	0	2	4	3	2	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
360 XYXYXY	0	2	4	3	2	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
360 XYXYXY	0	2	4	3	2	2	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
36 XYXYXY	0	2	1	0	2	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
144 XYXYXY	0	2	1	3	3	2	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
360 XYXYXY	0	2	4	4	3	2	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
36 XYXYXY	0	2	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	2	2	1	0	0
144 XYXYXY	0	2	1	2	1	0	0	0
0	1	1	2	2	2	1	0	0
144 XYXYXY	0	2	1	2	1	1	0	0
0	1	1	2	2	1	1	0	0
144 XYXYXY	0	2	1	2	1	1	0	0
0	1	1	2	2	1	1	0	0

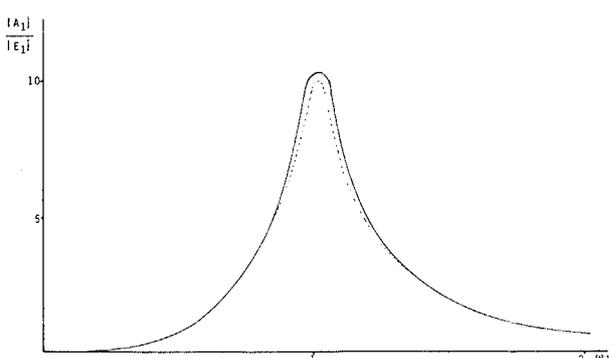


Fig.3- Gain non linéaire.Oscillateur de Van der Pol. (----) Gain linéaire.