

SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

ROBUSTESSE DES EGALISEURS AUTOADAPTATIFS,
TRANSVERSAUX ET RECURSIFS

Albert BENVENISTE ; Maurice GOURSAT

I.R.I.S.A., Avenue du Gal Leclerc, B.P. 25A
35042 RENNES Cédex

I.R.I.A. - LABORIA, Domaine de Voluceau, B.P. 105,
78150 LE CHESNAY

RESUME

On considère un système linéaire stationnaire S excité par une suite de variables aléatoires de loi connue. On cherche à identifier S dans le cas où l'on n'a pas l'hypothèse que S est à phase minimale. Ceci est le cas par exemple en transmission de données pour l'accrochage d'un égaliseur de voie directement sur le flot de données. On rappelle ici quelques résultats théoriques et on présente différents algorithmes pour égaliseurs transversaux ou récursifs. On donne enfin des résultats numériques pour les différents cas.

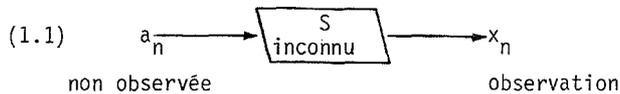
SUMMARY

Consider an unknown linear time invariant system S driven by random variables with known distribution. We want to identify S without the major assumption that S is minimum phase. This problem is arising in particular for data transmission systems if we want to realize a settling phase of the equalizer directly based upon the output of the channel. We recall here some theoretical results and present algorithms for recursive or transversal equalizers. In the last part we give numerical results for different cases.



1. PRESENTATION DU PROBLEME. QUELQUES POINTS THEORIQUES.

On considère le système suivant (cf. [3] et [7] pour une présentation plus complète du problème).



- (a_n) suite stationnaire de variables aléatoires indépendamment distribuées de loi ν connue ; c'est par exemple une séquence de données à transmettre .
- $S = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ système stationnaire ; S est par exemple une ligne téléphonique, les (s_k) représentant la réponse impulsionnelle échantillonnée ; S est inconnu.
- $x_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k a_{n-k}$ est la sortie du système S. C'est par exemple le message reçu et donc la seule observation dont on dispose.

Dans tout ce qui suit on fait les hypothèses :

- H1 : (i) ν est symétrique de variance finie.
(ii) S et S^{-1} d'énergie finie i.e.

$\Lambda = (\Lambda_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ avec $\Lambda_{ij} = E(x_i x_j)$ Λ opérateur borné défini positif sur ℓ^2 espace des suites de carré sommable.

Problème : trouver un système $\Theta = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de sorte que $T = \Theta_0 S = \pm$ identité (à un décalage en temps près) (i.e. $T = (t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $\exists k_0$ $t_{k_0} = 1$ et $t_k = 0 \ \forall k \neq k_0$)

Remarques :

1. on ne peut faire mieux que \pm identité car $(+a_n)$ et $(-a_n)$ ont même loi.
2. le décalage en temps est sans importance. Θ est évidemment non causal ; cela se traduit en pratique par un retard dans la reconstruction de la suite (a_n) .

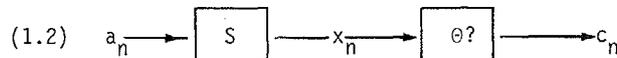
Le problème difficile est l'identification de la phase de la ligne S (l'identification du gain est standard) ; c'est le problème important en égalisation, d'autant plus que les distorsions dans un canal téléphonique sont souvent essentiellement dues aux distorsions de temps de groupe.

Pour l'étude théorique on fait alors l'hypothèse suivante :

H2 : on a l'une ou l'autre des hypothèses :

- (i) ν est uniforme sur $[-\ell, +\ell]$
- (ii) $\nu(dx) = k e^{-g(x)} dx$, g paire, g(x) et $\frac{g'(x)}{x}$ strictement croissantes sur R_+ .

Le système que nous considérons est donc maintenant :



Théorème 1.1.(cf. [3])

On considère un système $\Theta = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que la loi de $c = \sum_k h_k x_{-k}$ est encore ν avec l'hypothèse H2. Alors $T = \pm$ identité.

On va donc obtenir la solution de notre problème en ajustant les coefficients de Θ de telle sorte que la loi instantanée de c_n converge vers ν .

Pour ce faire, on va définir une fonctionnelle particulière dont la minimisation nous donnera le point cherché.

On définit $\mathcal{J}(\theta)$

(1.3)
$$\mathcal{J}(\theta) = E[\psi(c_n)] = E(c_n^2 - 2\alpha |c_n|) \text{ avec } \alpha = \frac{E a_n^2}{E |a_n|}$$

On a alors le résultat :

Théorème 1.2. (cf. [3])

Sous les hypothèses H1 et H2 les seuls minima locaux (et globaux) de \mathcal{J} sont les systèmes $\pm S^{-1}$.

On réalise alors la minimisation de \mathcal{J} par un algorithme de gradient stochastique, ce qui donne :

(1.4)
$$\begin{cases} \theta^{n+1} = \theta^n - \tau X_n \psi(c_n) & \theta_n = (h_k^n)_{-N \leq k \leq N}, \theta^0 \text{ donné} \\ c_n = \sum_{k=-N}^{+N} h_k^n x_{n-k}, & t X_n = (x_{n+N}, \dots, x_n, \dots, x_{n-N}) \end{cases}$$

où ψ est la dérivée de ψ et τ le pas du gradient.

Remarques :

1. le passage de $k \in \mathbb{Z}$ à $-N \leq k \leq N$ nécessite évidemment une justification (cf. [3])
2. il faut également un résultat assurant la convergence de (1.4)
3. En transmission de données les (a_n) sont équiréparties sur un ensemble fini de valeurs, $\{\pm 1\}$ ou $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$ par exemple. Pour savoir si un couple (ψ, ν) est convenable, on dispose de conditions nécessaires "raisonnablement suffisantes" par l'analyse des trois points suivants :

- (i) rotation: $\beta \rightarrow E [\psi(X \cos \beta + Y \sin \beta)]$ avec (X, Y) de loi $\nu \times \nu$
- (ii) comportement le long de l'axe: $\rho \rightarrow E(\psi(\rho X))$
- (iii) loin de la solution : $E[\psi(\text{Gauss})] \geq \int \psi dv$

Remarque : comme dans le cas du minimum de phase, on peut écrire (cf. [2]) une version de l'algorithme sans filtrer (analogue à ELS cf. [4], [5], [8]) analogue au récursif avec décision dans la boucle.

2. LES DIFFERENTS ALGORITHMES.

2.1. Forme MA.

C'est l'algorithme (1.4) qui s'écrit donc :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \theta^{n+1} = \theta^n - \tau x_n (c_n - \alpha \text{sgn } c_n) \\ c_n = \sum_{k=-N}^{+N} h_k^n x_{n-k} \end{cases}$$

2.2. Forme ARMA.

Si on note la fonction de transfert :

$$(2.2) \quad S(z^{-1}) = \frac{g P_1(z^{-1}) P_2(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \quad \begin{matrix} P_1 \text{ et } Q \text{ stables,} \\ P_2 \text{ instable} \end{matrix}$$

S est à non minimum de phase et donc P_2 n'est pas constant et pour inverser S il faut donc développer $\frac{1}{P_2(z^{-1})}$ en série de Laurent et tronquer :

$$\frac{1}{P_2(z^{-1})} = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k \quad \text{ce qui donne}$$

$$\frac{1}{S(z^{-1})} = \frac{1}{g} \frac{Q(z^{-1})(\sum \alpha_k z^k)}{P_1(z^{-1})}$$

et on peut donc prendre θ sous la forme $\frac{H}{1-K}$:

$$(2.3) \quad \begin{cases} c_n = k_1 c_{n-1} + \dots + k_p c_{n-p} + h_{-N} x_{n+N} + \dots + h_N x_{n-N} \\ c_n = \frac{H(z^{-1})}{1-K(z^{-1})} x_n \end{cases} \quad \text{les zéros de } 1-K \text{ étant à l'extérieur du cercle unité.}$$

Notations :

- (y_n) étant une suite stationnaire (y_n^K) désigne la suite filtrée par $\frac{1}{1-K}$:

$$(2.4) \quad y_n^K = \frac{1}{1-K(z^{-1})} y_n$$

- $t_\theta = (k_1, \dots, k_p; h_{-N}, \dots, h_N)$

- $t_\phi_n = (c_{n-1}, \dots, c_{n-p}; x_{n+N}, \dots, x_{n-N})$

Le calcul de $\mathcal{J}'(\theta)$ donne $E[\psi_n^K(c_n - \alpha \text{sgn } c_n)]$ et on obtient l'algorithme :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \theta^{n+1} = \theta^n - \tau \phi_n^K (c_n - \alpha \text{sgn } c_n) \\ c_n = t_\theta^n \phi_n \\ c_n^K = k_1^K c_{n-1}^K + \dots + k_p^K c_{n-p}^K + c_n \\ x_{n+N}^K = k_1^K x_{n+N-1}^K + \dots + k_p^K x_{n+N-p}^K + x_{n+N} \end{cases}$$

2.3. Filtre en treillis.

Il peut être intéressant, pour avoir un bon conditionnement, de blanchir les signaux que l'on reçoit. On peut utiliser pour cela un filtre en treillis (cf. [6]) économique au point de vue volume de calcul ; l'algorithme est le suivant :

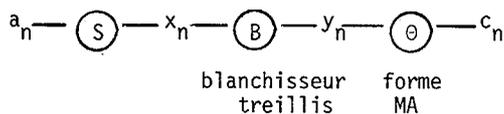
$$(2.6) \quad \begin{cases} \epsilon_0^+(n) = x_n \\ \left. \begin{aligned} \epsilon_j^+(n) &= \epsilon_{j-1}^+(n) - \alpha_j(n) \epsilon_{j-1}^-(n-1) \\ \epsilon_j^-(n) &= -\alpha_j^+(n) \epsilon_{j-1}^+(n) + \epsilon_{j-1}^-(n-1) \end{aligned} \right\} \quad 0 < j \leq 2N \\ \alpha_j(n) &= \frac{\beta_j(n)}{\gamma_j(n)} \\ \left. \begin{aligned} \beta_j(n) &= (1-\tau) \beta_j(n-1) + \tau \epsilon_{j-1}^+(n) \epsilon_{j-1}^-(n-1) \\ \gamma_j(n) &= (1-\tau) \gamma_j(n-1) + \frac{\tau}{2} [\epsilon_{j-1}^2(n) + \epsilon_{j-1}^2(n-1)] \end{aligned} \right\}$$

3. APPLICATIONS NUMERIQUES

3.1. Comportement du filtre en treillis.

La figure 1 représente le canal S, la séquence d'entrée étant des v.a. équiréparties sur $\{+1, +3, +5, +7\}$; la figure 2 donne S^{-1} (que l'on a calculé avec des données connues par l'algorithme de Robbins - Monro). Pour l'identification en aveugle (directement sur la sortie) de S^{-1} on a utilisé les deux procédures suivantes :

- a) on commence par blanchir les signaux reçus par l'algorithme (2.6), puis on utilise (2.1) ((2.6) et (2.1) étant évidemment simultanés)



- b) on utilise directement (2.5). Pour l'erreur quadratique moyenne $(\frac{1}{N} \sum (c_n - a_n)^2)$ par paquet de 250 signaux a) et b) donnent respectivement les courbes 1 et 2 de la figure 3.

On peut écrire l'innovation de (x_n) :

(3.1) $y_n = \lambda(x_n - E(x_n/x_{n-1}, x_{n-2}, \dots))$ avec $E(\dots)$ estimateur aux moindres carrés, ce qui donne directement un algorithme de blanchisseur que nous comparons avec (2.6). La figure 4 donne l'évolution de deux coefficients du blanchisseur pour les deux algorithmes :



1 et 2 correspondent à (2.6)

3.2. Comportement de l'algorithme en ARMA (2.5).

On prend un système à minimum de phase pour comparer l'algorithme (2.5) avec l'algorithme RML (cf. [5]) :

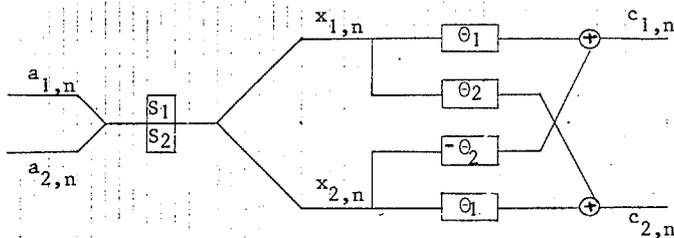
$$(3.2) : x_n - 0,8x_{n-1} + 0,5x_{n-2} = a_n + 0,7a_{n-1} + 0,4a_{n-2} - k_1 \quad h_1$$

((a_n) de même loi qu'en 3.1)

Sur la figure 5, on a représenté l'évolution de l'erreur quadratique moyenne pour chaque algorithme et sur la figure 6, la convergence des estimés de k₁ et h₁.

3.3. Accrochage d'un égaliseur.

On prend un cas concret de transmission de données par modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature avec double échantillonnage en réception (pour une présentation complète cf. [3]). Le débit de transmission est ici de 9600 bits/s. En entrée, on a deux suites à 4 niveaux {+1,+3} : (a_{1,n}) et (a_{2,n}). Le système peut se représenter sous la forme suivante :



$$(3.3) \begin{cases} X_{1,n} = A_{1,n} * S_1 + A_{2,n} * S_2 \\ X_{2,n} = A_{2,n} * S_1 - A_{1,n} * S_2 \end{cases}$$

(* désigne le produit de convolution)

On utilise d'autre part un double échantillonnage : les signaux d'entrée sont émis chaque 1/3200 s sur chaque suite ; en sortie, on prend deux échantillonnages par voie séparés de 1/6400 s ; chaque égaliseur (θ₁ ou θ₂) comporte 31 coefficients : 21 travaillent sur 1 échantillon et 10 sur l'autre.

Les données et résultats numériques sont les suivants :

- Figure 7 : distorsion d'affaiblissement d'une ligne de type M102

- Figure 8 : distorsion de temps de groupe pour la même ligne.

- Figure 9 : réponses impulsionnelles de la ligne.

1. directe (donne les interférences entre symboles d'une même suite d'entrée)
2. quadrature (donne les interférences des symboles d'une suite d'entrée sur la sortie de l'autre)

- Figure 10: double échantillonnage des réponses précédentes.

- Figure 11: coefficients des filtres de l'égaliseur: 1 pour θ₁, 2 pour θ₂.

- Figure 12: évolution du taux d'erreur. Un détecteur à seuil quantifie les signaux à la valeur d'entrée la plus proche

1. en sortie de ligne : 50 à 60 %
2. au cours des itérations d'accrochage. Il n'y a plus d'erreur après 1000 signaux.

- Figure 13: évolution de l'erreur quadratique moyenne en sortie d'égaliseur.

4. CONCLUSIONS. REMARQUES.

- On prend généralement un modèle avec bruit d'observation :

$$x_n = \sum_k s_k a_{n-k} + b_n$$

ce qui n'est pas le point important ici. Nous avons néanmoins rajouté un bruit dans les simulations. En particulier dans l'exemple 3.3 nous avons un bruit de sortie de ligne donné par simulation d'une gaussienne centrée d'écart-type 0.1/√2 (ce qui donne un rapport signal/bruit de 24 dB).

- On peut changer la fonction φ dans (1.4) pour essayer d'obtenir de meilleures performances. En prenant

$$\varphi(c_n) = \begin{cases} c_n - 3 \operatorname{sgn} c_n & \text{si } |c_n| \geq 3 \\ c_n - \operatorname{sgn} c_n & \text{si } |c_n| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient une évolution du taux d'erreur donnée par 3, Figure 12.

- Un dernier point à noter est que, sauf dans le cas du filtrage d'état (2.5), les algorithmes sont tous identiques, le seul changement étant la fabrication du signal de pseudo-erreur.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. BENVENISTE ; M. GOURSAT : Une méthode adaptative d'identification non gaussienne. Colloque GRETSI, Avril 1977.
- [2] A. BENVENISTE ; M. GOURSAT : A gain and phase identification procedure : blind adjustment of a recursive equalizer. IEEE, International Symposium on Information Theory, Grigano, Juin 1979.
- [3] A. BENVENISTE ; M. BONNET ; M. GOURSAT ; C. MACCHI, G. RUGET : Identification d'un système à non minimum de phase par approximation stochastique. Rapport Laboria n°325, Septembre 1978.
- [4] L. LJUNG : On positive real transfer functions... IEEE AC-22, n°4, pp. 539-550, 1977.
- [5] L. LJUNG : Analysis of recursive stochastic algorithms, Ibidem, pp. 551-575.
- [6] J. MAKHOUL : A class of all-zero lattice digital filters : properties and applications. IEEE ASSP-26, n°4, pp. 304-314, 1978.
- [7] J.G. PROAKIS : Advance in equalization for intersymbol interference. Advances in Comm. Systems, pp. 124-194, Vol. 4, Academic Press, 1975.
- [8] T. SODERSTROM ; L. LJUNG ; I. GUSTAVSSON : A theoretical Analysis of recursive identification methods. Automatica, Vol. 14, pp. 231-244, 1978.

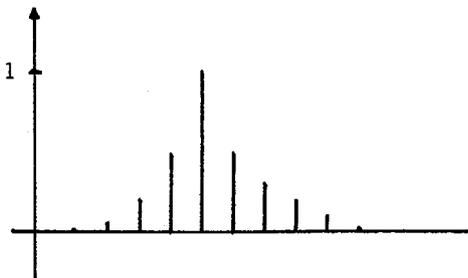


Figure 1 : Réponse impulsionnelle de S échantillonnée.

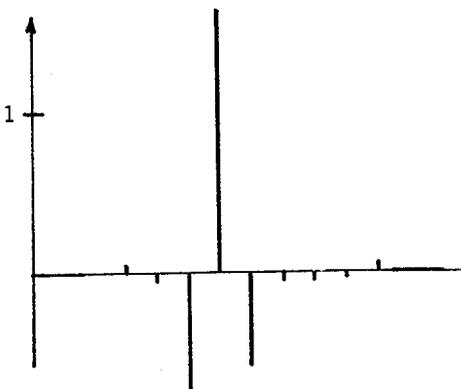


Figure 2 : Canal inverse

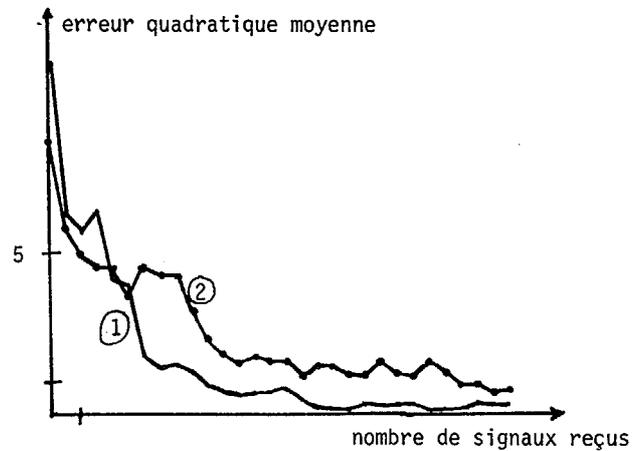


Figure 3 : Evolution de l'erreur quadratique moyenne en sortie d'égaliseur (① avec blanchisseur en treillis).

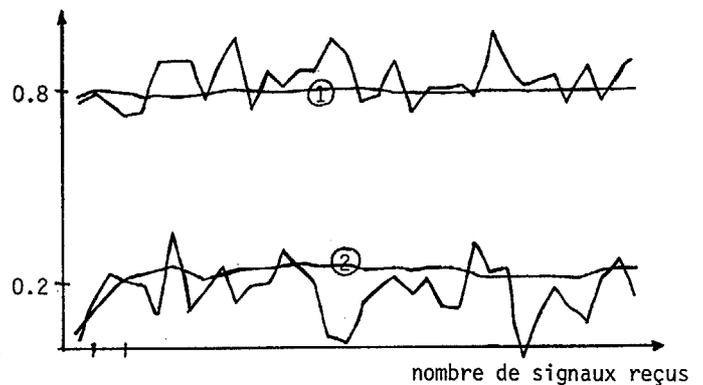


Figure 4 : Evolution de deux coefficients du blanchisseur (① et ② données par (2.6)).



ROBUSTESSE DES EGALISEURS AUTOADAPTATIFS,
TRANSVERSAUX ET RECURSIFS

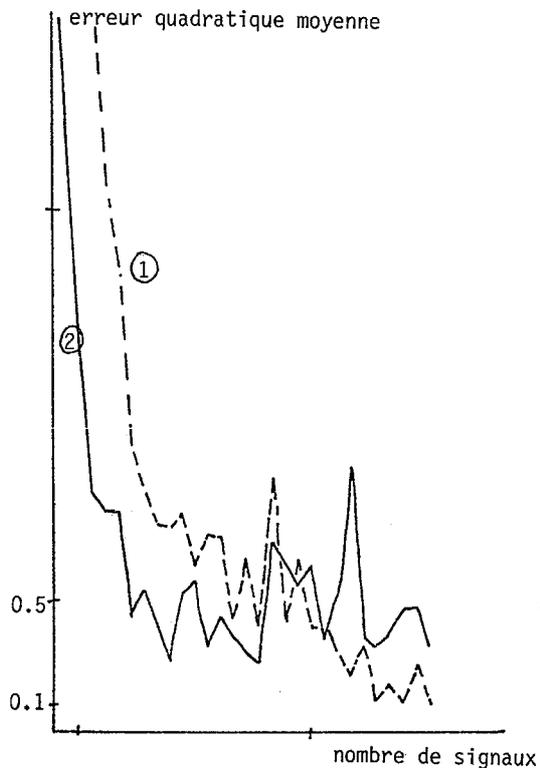


Figure 5 : Comparaison de (2.5) (courbe ①) et de RML (courbe ②)

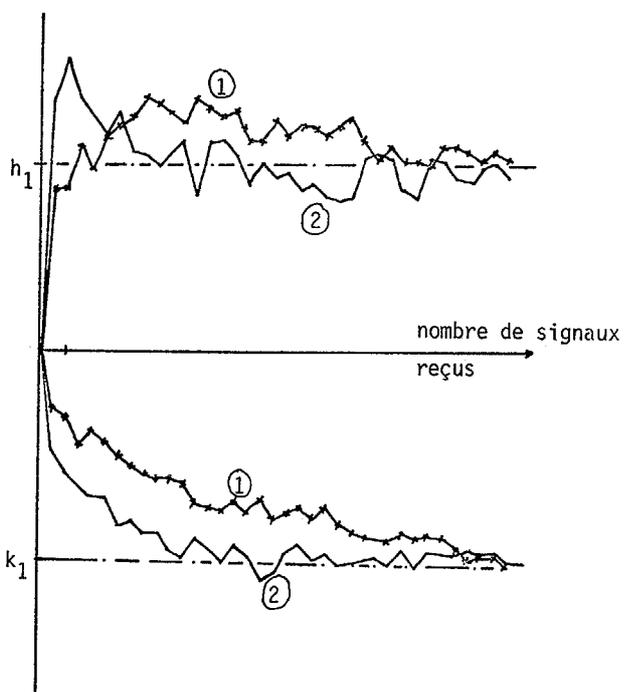


Figure 6 : Convergence des estimés de k_1 et h_1 pour (2.5) (courbes ①) et pour RML (courbes ②).

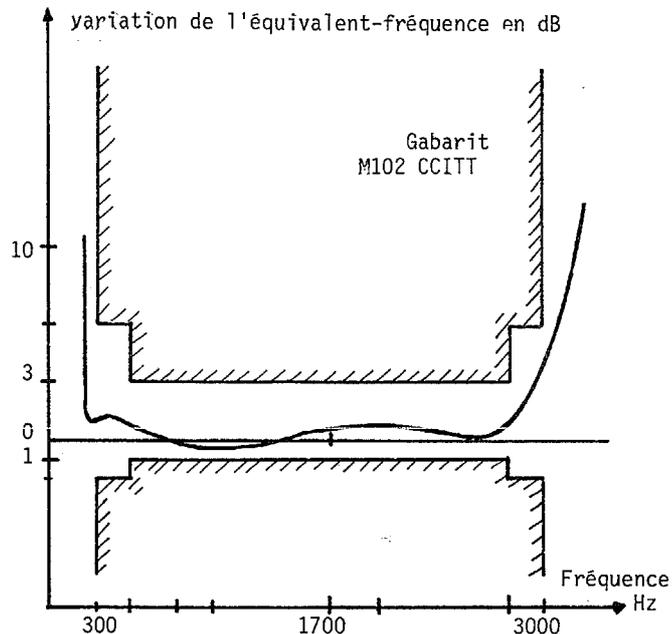


Figure 7 : Distorsion d'affaiblissement.

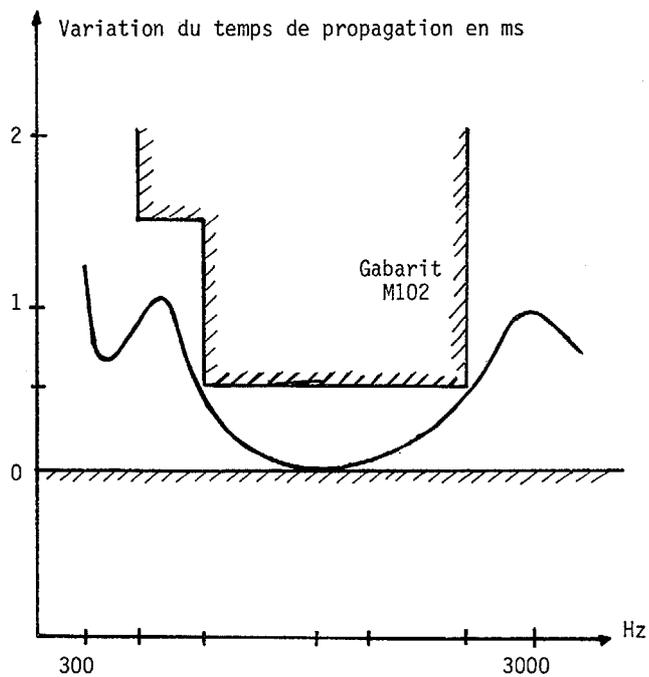


Figure 8 : Distorsion de temps de groupe.

ROBUSTESSES DES EGALISEURS AUTOADAPTATIFS,
TRANSVERSAUX ET RECURSIFS

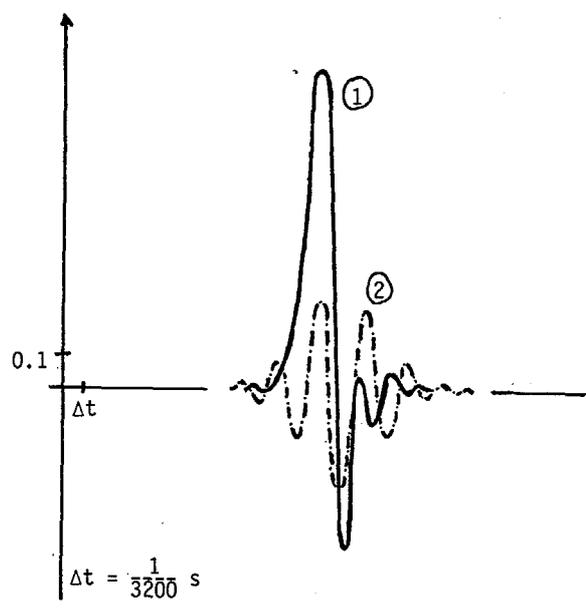


Figure 9 : Réponses impulsionnelles
① directe ② quadrature

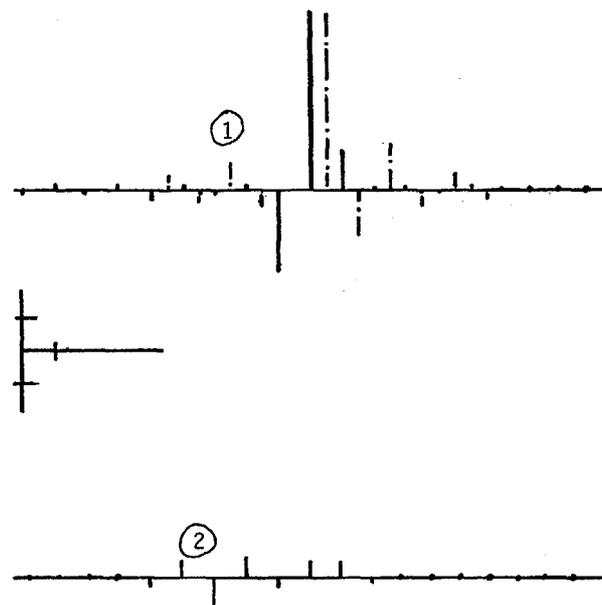


Figure 11 : coefficients de l'égaliseur
(① pour θ_1 , ② pour θ_2)

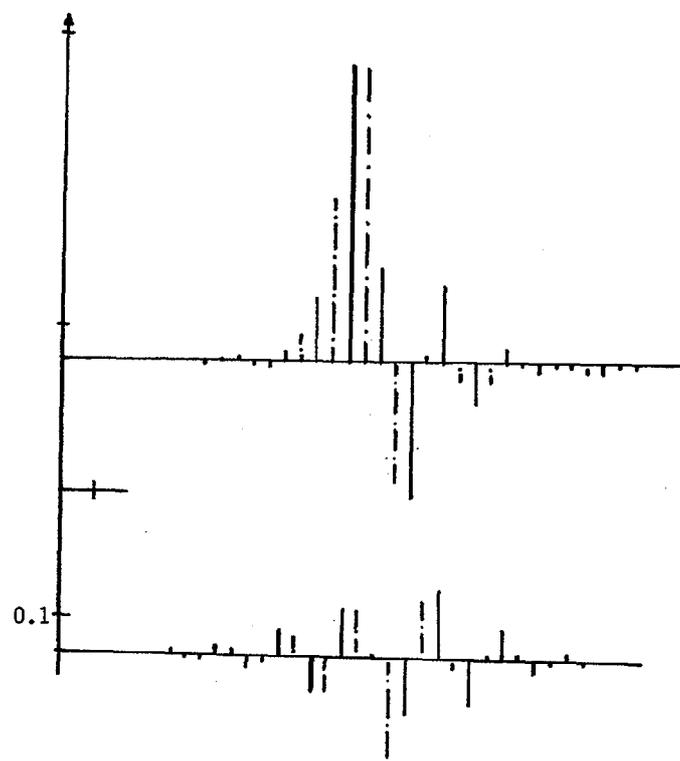


Figure 10 : Double échantillonnage des réponses impulsionnelles.

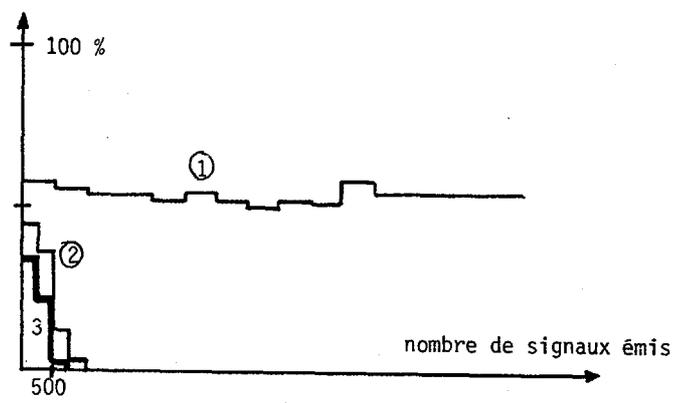


Figure 12 : Evolution du taux d'erreur (① sortie de ligne ② avec égaliseur)

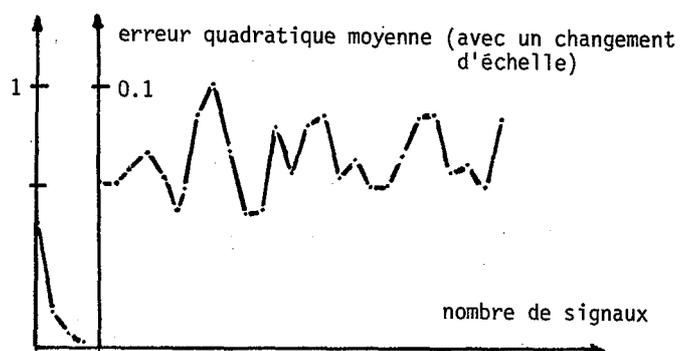


Figure 13 : Evolution de l'erreur quadratique après égalisation.