

# SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

---

## QUELQUES ASPECTS DE LA RECONNAISSANCE DES FORMES EN ACOUSTIQUE POUR DES OBSTACLES SIMPLES

J.P. SESSAREGO, Attaché de Recherche

C.N.R.S.- Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique - 31 Chemin Joseph Aiguier - 13274 MARSEILLE CEDEX 2 -

---

### RESUME

Les problèmes liés à la reconnaissance acoustique des formes, appartiennent à la classe des problèmes inverses de diffraction ; connaissant la structure du champ rayonné tout autour de l'obstacle, il s'agit de remonter à la forme géométrique de celui-ci.

Nous présentons ici, deux approches possibles du problème. La première méthode fait appel aux principes de l'optique géométrique et permet à partir de la mesure de la section efficace de diffraction  $\sigma(\theta)$  de la cible, de remonter à son contour.

La deuxième méthode qui s'appuie sur les principes de l'optique physique, conduit à l'identité de Bojarski qui relie la transformée de Fourier du champ acoustique diffracté, à la fonction caractéristique de la cible. La connaissance de cette dernière fonction que l'on note :  $\gamma(\vec{x})$ , permet également de reconstruire l'obstacle envisagé.

### SUMMARY

Problems concerning acoustical target recognition are belonging to the class of inverse problems ; knowing the form of the scattered sound field, all around the body we want to get his shape and size.

The aim of this paper is to define two different ways of solving the problem of acoustical target recognition.

The first method uses geometrical optics theory and gives some informations about the geometry of the target, when the cross sectionnal area function of this target is known.

The second ones uses physical optics theory which leads to Bojarski's identity.

The identity gives a relation between the Fourier transform of the acoustical field and the characteristic function  $\gamma(\vec{x})$  of the target.

This characteristic function determines also the shape and size of the target.



QUELQUES ASPECTS DE LA RECONNAISSANCE DES FORMES EN ACOUSTIQUE POUR DES OBSTACLES SIMPLES.

J.P.SESSAREGO

I.- INTRODUCTION -

Le problème que l'on cherche à résoudre, consiste à dégager le plus grand nombre d'informations sur un obstacle diffractant, à partir de la mesure en un ou en plusieurs points du champ diffracté. Ce type de problèmes se rencontre dans de nombreux domaines de la physique, mais excepté quelques rares cas particuliers, aucune solution générale n'a encore été développée à ce jour. En ce qui nous concerne, nous nous sommes intéressés au cas de l'acoustique en présentant deux approches différentes du problème, dans des cas simples.

II.- GENERALITES -

Nous nous limiterons dans toute la suite aux cas d'obstacles du type parfaitement réfléchissants avec des conditions aux frontières du type Neumann. Nous supposons également des obstacles convexes, de bords suffisamment réguliers éclairés en ondes planes.

La première approche, relative à l'optique géométrique, utilise la théorie des rayons. La deuxième approche, relative à l'optique physique, conduit à une relation simple entre le champ acoustique diffracté autour de l'obstacle, et la fonction caractéristique du milieu.

III.- METHODE DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE -

III.1.- Obstacle à 2 dimensions -

La théorie que l'on va développer est due à KELLER [1]. On considère un tube de rayons incidents sur l'obstacle et le tube correspondant de rayons réfléchis.

En supposant que le milieu entourant l'obstacle n'est pas absorbant, on écrit l'égalité des flux à travers chaque section droite des tubes.

Le principe de la conservation de l'énergie permet d'écrire la relation :

$$(1) \quad dy = \sigma(\theta) d\theta$$

$\sigma(\theta)$  étant la section efficace du réflecteur dans la direction :  $\theta$ .

En intégrant la relation (1) on a :

$$(2) \quad y = y_0 + \int_0^\theta \sigma(\alpha) d\alpha$$

En se reportant à la figure 1, on peut également écrire une relation entre dx et dy :

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \cotg \frac{\theta}{2}$$

d'où :

$$(4) \quad x = x_0 + \int_0^\theta \sigma(\alpha) \cdot \tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha$$

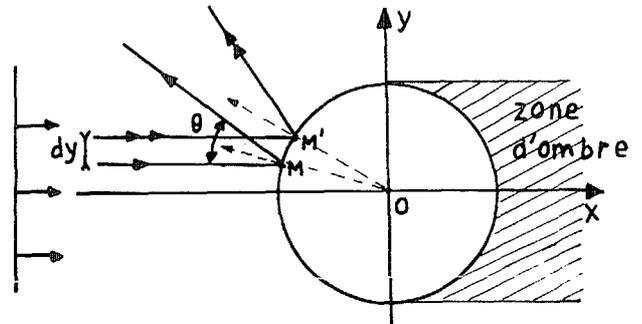


Figure 1

En supposant l'obstacle parfaitement réfléchissant, la seule connaissance de  $\sigma(\alpha)$  permet de remonter aux coordonnées x et y de l'obstacle et donc d'accéder à sa forme géométrique.

III.2.- Cas d'un obstacle à 3 dimensions et présentant une symétrie de révolution -

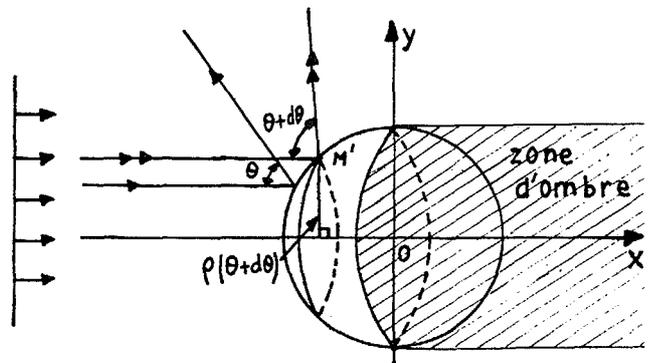


Figure 2

On suppose l'obstacle éclairé par une onde plane dirigée suivant l'axe de révolution.

Comme précédemment, on considère un tube de rayons incidents, et le tube correspondant de rayons réfléchis (Cf. Fig.2). On applique alors les lois de conservation de l'énergie, ce qui permet d'écrire {1} {2} :

$$(5) \quad \rho^2 = 2 \int_0^\theta \sigma(\alpha) \cdot \sin \alpha d\alpha + cte$$

et compte tenu de la relation :  $\frac{dy}{dx} = \cotg \frac{\theta}{2}$

$$(6) \quad x = x_0 + \int_0^\theta \sigma(\alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot d\alpha$$

QUELQUES ASPECTS DE LA RECONNAISSANCE DES FORMES EN ACOUSTIQUE POUR DES OBSTACLES SIMPLES.

La connaissance de  $\sigma(\alpha)$  permet donc également dans ce cas, de déterminer la forme géométrique de l'obstacle considéré.

Remarques :

- 1.- La connaissance de  $\sigma(\theta)$  pour  $0 < \theta < \pi$  ne permet de reconstruire que la moitié éclairée de l'obstacle. Pour connaître l'obstacle dans son entier, il serait nécessaire de l'éclairer dans une direction opposée.
- 2.- L'optique géométrique étant en défaut sur la frontière entre la zone éclairée et la zone obscure, on ne pourra espérer avoir une reconstruction correcte de l'obstacle qu'en dehors de cette zone de transition.

IV.- METHODE DE L'OPTIQUE PHYSIQUE -

On considère un obstacle convexe, quelconque dans l'espace à 3 dimensions.

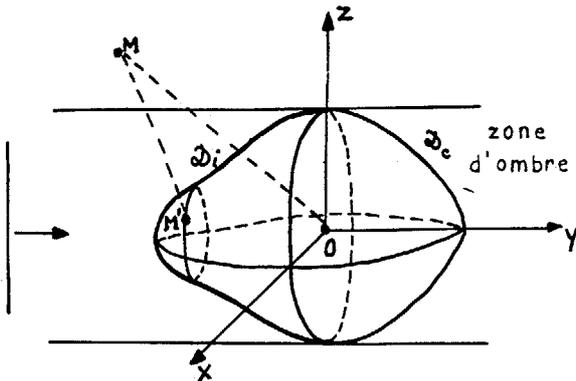


Figure 3

On définit le champ total par :  $\Psi_T = \Psi_i + \Psi_s$

$\Psi_i$  et  $\Psi_s$  étant les champs acoustiques incidents et diffractés.

Le champ total satisfait l'équation :

$$(1) \quad \nabla^2 \Psi_T + k^2 \Psi_T = 0$$

Avec des conditions aux frontières du type Neumann :

$$\frac{\partial \Psi_T}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial B = \partial_i \cup \partial_c$$

le principe de Huygens permet d'écrire :

$$(2) \quad \Psi_s(\vec{x}, \vec{k}) = \int_{\partial B} \Psi_s(\vec{x}', \vec{k}) \cdot \partial_n' G(|\vec{x} - \vec{x}'|) - G(|\vec{x} - \vec{x}'|) \cdot \partial_n' \Psi_s \cdot d\vec{x}'$$

avec : 
$$G(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

On résoudra l'équation intégrale (2) par une méthode d'approximation {3 - 4 - 5 - 6 - 7}.

1.- Approximation de l'optique physique -

$$\begin{aligned} \partial_n \Psi_T = 0 &\Rightarrow \partial_n \Psi_i = -\partial_n \Psi_s \\ \Psi_T = 2\Psi_i &\Rightarrow \Psi_i = \Psi_s \end{aligned} \quad \text{sur } \partial_i$$

(3)

$$\Psi_T = \partial_n \Psi_s = 0 \quad \text{sur } \partial_c$$

2.- Approximation des grandes distances -

$$(4) \quad |\vec{x}| \gg |\vec{x}'| \Rightarrow |\vec{x} - \vec{x}'| = |\vec{x}| - \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Compte tenu de (3) et (4) l'équation (2) s'écrit alors :

$$(5) \quad \Psi_s(\vec{x}, \vec{k}) = \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|} \cdot \int_{\partial_i} i n' \cdot \left[ \vec{k} - \frac{\vec{k}\vec{x}}{|\vec{x}|} \right] \cdot e^{i\vec{x}' \cdot \left[ \vec{k} - \frac{\vec{k}\vec{x}}{|\vec{x}|} \right]} \cdot d\vec{x}'$$

Remarque :

La relation (3) est tout à fait générale et s'applique aux cas de problèmes de type multistatique (émetteur et récepteur séparés).

Dans le cas particulier de la rétrodiffusion, on peut écrire :

$$\vec{k} = -\frac{\omega}{c} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

d'où :

$$(6) \quad \Psi_s(\vec{x}, \omega) = \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|} \int_{\partial_i} \vec{n}' \cdot \vec{g} \cdot \text{grad} \left[ e^{-\frac{2i\omega \vec{x}' \cdot \vec{x}}{c|\vec{x}|}} \right] \cdot d\vec{x}'$$

En éclairant dans une direction opposée :

$$(7) \quad \Psi_s(-\vec{x}, \omega) = \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|} \int_{\partial_c} \vec{n}' \cdot \vec{g} \cdot \text{grad} \left[ e^{\frac{2i\omega \vec{x}' \cdot \vec{x}}{c|\vec{x}|}} \right] \cdot d\vec{x}'$$

On posera :

$$(8) \quad \begin{cases} \rho(\vec{x}, \omega) = \int_{\partial_i} \vec{n}' \cdot \vec{g} \cdot \text{grad} \left[ e^{-\frac{2i\omega \vec{x}' \cdot \vec{x}}{c|\vec{x}|}} \right] \cdot d\vec{x}' \\ \rho(-\vec{x}, \omega) = \int_{\partial_c} \vec{n}' \cdot \vec{g} \cdot \text{grad} \left[ e^{\frac{2i\omega \vec{x}' \cdot \vec{x}}{c|\vec{x}|}} \right] \cdot d\vec{x}' \end{cases}$$



d'où

$$(9) \quad \rho(\vec{x}, \omega) + \rho^*(-\vec{x}, \omega) = \int_{\partial B} \vec{n} \cdot \vec{g} \text{grad} \left[ e^{-\frac{2i\omega \vec{x}' \cdot \vec{x}}{c|\vec{x}|}} \right] d\vec{x}'$$

$$\rho(\vec{x}, \omega) + \rho^*(-\vec{x}, \omega) = \iiint_V \text{div} \vec{g} \text{grad} \left[ e^{-\frac{2i\omega \vec{x}' \cdot \vec{x}}{c|\vec{x}|}} \right] d\vec{x}'$$

En introduisant la fonction caractéristique  $\gamma(\vec{X})$  de l'obstacle :

$$\gamma(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in \text{Volume } V \\ 0 & \vec{x} \notin \text{Volume } V \end{cases}$$

on a :

$$(10) \quad \Gamma\left(\frac{2\omega \vec{x}}{c|\vec{x}|}\right) = \frac{\rho(\vec{x}, \omega) + \rho^*(-\vec{x}, \omega)}{\left(\frac{2\omega}{c}\right)^2} = - \iiint_{\mathbb{R}^3} \gamma(\vec{x}') \cdot e^{-\frac{2i\omega \vec{x}' \cdot \vec{x}}{c|\vec{x}|}} d\vec{x}'$$

C'est la relation de Bojarski, qui relie le "champ diffracté"  $\Gamma\left(\frac{2\omega \vec{x}}{c|\vec{x}|}\right)$  à la fonction caractéristique  $\gamma(\vec{X})$  de l'obstacle par une transformée de Fourier à 3 dimensions.

Cependant, du fait même des hypothèses de l'optique physique,  $\Gamma\left(\frac{2\omega \vec{x}}{c|\vec{x}|}\right)$ , déterminé par la relation (10) n'est valable que dans le domaine des hautes fréquences. On supposera en outre que la détermination expérimentale de  $\Gamma$  ne peut se faire qu'en un domaine limité de l'espace que l'on note :  $\mathcal{D}$ . Il s'agit alors, à partir de la connaissance limitée de la fonction :  $\Gamma$ , de déterminer dans quelle mesure on peut remonter correctement à la forme et à la position de l'objet considéré.

On considère à cet effet, la dérivée directionnelle de  $\gamma(\vec{X})$  dans la direction d'un vecteur unitaire  $\vec{\eta}$ . (8) :

$$(11) \quad \gamma_{\vec{\eta}}(\vec{x}) = \vec{\eta} \cdot \vec{g} \text{grad} [\gamma(\vec{x})].$$

On définit d'autre part, une fonction d'ouverture :

$$A(\vec{K}) = \begin{cases} 1 & \vec{K} \in \mathcal{D} \\ 0 & \vec{K} \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad \vec{K} = \frac{2\omega \vec{x}}{c|\vec{x}|}$$

La fonction que l'on sait mesurer expérimentalement s'écrit :

$$H(\vec{K}, \vec{\eta}) = A(\vec{K}) \cdot \Gamma_{\vec{\eta}}(\vec{K})$$

Prenons sa transformée de Fourier :

$$(12) \quad h(\vec{x}, \vec{\eta}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} a(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \gamma_{\vec{\eta}}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}'$$

Nous allons calculer la fonction  $h(\vec{x}, \vec{\eta})$  dans le cas à deux dimensions d'un cylindre circulaire de rayon:  $b$

$$\gamma_{\vec{\eta}}(r, \theta) = -\vec{\eta} \cdot \vec{n}(\theta) \cdot \delta(r-b) \quad \vec{n} : \text{normale extérieure}$$

Compte tenu de la relation (12) on peut écrire :

$$(13) \quad h(\vec{x}, \vec{\eta}) = \frac{b}{(2\pi)^2} \int_{p_0}^{p_1} p dp \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{n}(\theta) \cdot \vec{\eta} \cdot e^{ip\vec{u}(\alpha) \cdot [\vec{x} - \vec{x}']} d\alpha d\theta$$

$p = \frac{2\omega}{c}$  ;  $\vec{u}(\alpha)$  vecteur unitaire dans la direction de :  $\alpha$  .

La résolution de l'intégrale portant sur  $\alpha$  et  $\theta$  peut se faire par la méthode de la phase stationnaire à 2 dimensions. On a alors :

$$(14) \quad \text{Re} [h(\vec{x}, \vec{\eta})] = \frac{b}{2\pi} \frac{\vec{\eta} \cdot \vec{n}(\theta)}{|\vec{H}|} \left[ \frac{\text{Sin}[p_1|\vec{x} - \vec{x}'|] - \text{Sin}[p_0|\vec{x} - \vec{x}'|]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]$$

Si  $\vec{x}$  est à l'extérieur du cylindre :

$$H = -b|\vec{x} - \vec{x}'| - b^2.$$

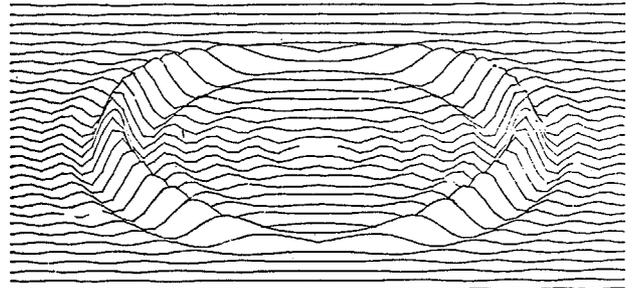


Fig 3 -  $P_0 = 1, P_1 = 30$

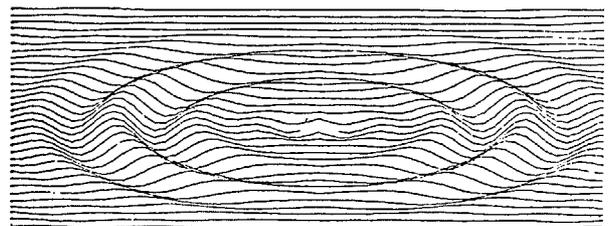


Fig 4 -  $P_0 = 10, P_1 = 20$

