

SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

DIFFERENTS ASPECTS DES PROBLEMES DE MODELISATION ET D'ESTIMATION
DES MOUVEMENTS RELATIFS D'UN MOBILE DANS LE PLAN A PARTIR DE MESURES
ANGULAIRES BRUTEES ET ECHANTILLONNEES

Alain GUILBERT - Claude A. BOZZO

DCAN de TOULON
GESTA/CAPCA

RESUME

Le problème envisagé concerne la poursuite passive d'un mobile dans le plan à partir de mesures bruitées et échantillonnées des azimuts obtenues par un observateur lui-même en mouvement. Cette classe de problèmes recouvre, en particulier, le problème dit de l'azimétrie. L'analyse effectuée consiste à présenter certaines méthodes de caractérisation des processus dynamiques et des bruits et à comparer les méthodes d'estimations d'état qui peuvent être associées à ces modélisations.

A partir d'une équation de type FOKKER-PLANCK, il est possible d'obtenir les expressions exactes de la moyenne conditionnelle du vecteur d'état ainsi que de sa matrice de covariance d'erreur associée. Par minimisation de cette matrice de covariance d'erreur et développement en série de TAYLOR autour de l'estimée $\hat{x}(t)$ de $x(t)$, on obtient une première série de filtres que l'on compare aux filtres obtenus directement par maximalisation de la densité de probabilité a posteriori.

Ces filtres, dont on donne la forme complète, sont étudiés et comparés dans l'hypothèse où l'une ou l'autre des équations d'état est non linéaire. On définit ainsi deux modèles d'états différents :

- l'un est un modèle dont le vecteur d'état contient les coordonnées cartésiennes du mobile poursuivi ainsi que leurs dérivées et dont l'équation d'observation est non linéaire,

- l'autre est un modèle dont le vecteur d'état contient les coordonnées polaires du mobile poursuivi ainsi que leurs dérivées et dont l'équation de dynamique est non linéaire.

Le problème de l'azimétrie est ensuite traité et les différents filtres évoqués ci-dessus sont mis en oeuvre et comparés sur des données simulées pour l'un et l'autre des deux modèles.

Enfin, on donne une solution possible dans le cas où le mobile poursuivi effectue des évolutions inconnues, à des instants inconnus, solution obtenue par comparaison de l'écart quadratique moyen (pseudo processus d'innovation) à un seuil.

SUMMARY

The mathematical analysis of a tracking situation consists of describing the target dynamics by a set of state-variable equations that are driven by a zero (or known) mean (Gaussian) noise process. Knowledge of the state variable x would then enable one to compute the position, velocity, course, etc...

The solution of the problem requires consequently a discrete time stochastic model for the process and the determination of an estimate trajectory by a discrete KALMAN BUCY filter.

After going into the assumptions on motions, noises and measures, a non-linear stochastic model, with correlated motions in x and y is determined. The quasi optimal estimation in real time of the state vector is resolved by applying a non-linear truncated second order filter and is simplified by studying the relation between the partitioned relative plane and the surfaces of the gain components in the space (Gain, Bearing, Range).

This type of analysis works very well until the target in question makes a significant alteration of course or speed. When this occurs, the depth estimate of the Extended type KALMAN Filter becomes very inaccurate due to a large bias error developing from faulty knowledge of the new mean value. A new approach to tracking a maneuvering target is presented. This approach consists to incorporate the knowledge of the innovation process into the design of an adaptive state estimator that consists of a M.A.P Filter with an algorithm connected in a feedback manner.



DIFFERENTS ASPECTS DES PROBLEMES DE MODELISATION ET D'ESTIMATION
DES MOUVEMENTS RELATIFS D'UN MOBILE DANS LE PLAN A PARTIR DE MESURES
ANGULAIRES BRUTEES ET ECHANTILLONNEES

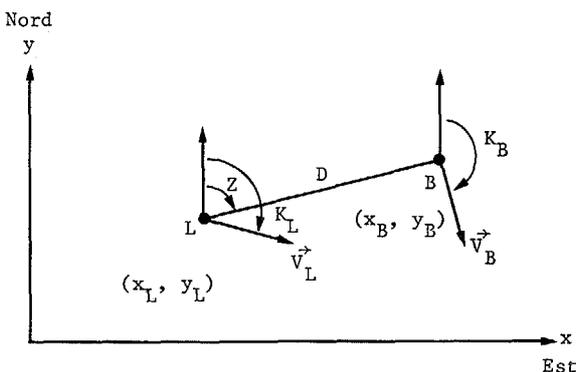
1. - INTRODUCTION

Les problèmes d'estimation des éléments de cinématique d'un mobile dans le plan ou l'espace font très largement appel aux techniques modernes du filtrage. Ces problèmes se posent très souvent dans le domaine des systèmes embarqués, par exemple dans le cas de la poursuite par radar d'un aéronef ou de la détermination, à partir de mesures bruitées et échantillonnées, de la position et du vecteur vitesse d'un mobile détecté à l'aide d'un sonar.

On envisage ici le cas où seules les mesures angulaires bruitées sont connues et, pour simplifier certains résultats, on envisage uniquement le cas du problème plan (ce qui n'est pas restrictif). On fait l'hypothèse que le bruit est additif, (ce qui n'est pas évident physiquement) et on compare les résultats obtenus en simulation avec un filtre de KALMAN étendu de structure très simple pour un choix de l'état en coordonnées cartésiennes et pour un choix de l'état en coordonnées polaires.

2. - POSITION DU PROBLEME

Il s'agit d'estimer les éléments de cinématique d'un mobile B, décrivant une trajectoire supposée rectiligne uniforme, à partir de la connaissance de mesures angulaires bruitées et échantillonnées (azimuts) relevées à partir d'un mobile L observateur dont la trajectoire est connue.



* Caractérisation des mobiles L et B

Mobile observateur (L)	Mobile observé (B)
Position (x_L, y_L)	Position (x_B, y_B)
Vitesse (V_L)	Vitesse (V_B)
Cap (K_L)	Cap (K_B)
grandeurs connues.	Grandeurs à estimer.

Le cas plus général où le mobile B évolue est également traité (cf. paragraphe 6) en faisant l'hypothèse que les trajectoires de B sont rectilignes par morceaux.

* Mesures (discrètes) : les équations de la dynamique sont par nature continues, par contre les observations sont effectuées à des instants discrets t_k .

On a : $z_k = Z_k + v_k$ avec $Z_k = Z(t_k)$ et v_k est une séquence gaussienne blanche à moyenne nulle : $v_k \sim N(0, R_k)$

On cherche donc à estimer quatre grandeurs qui sont indifféremment :

- (1) $[x, \dot{x}, y, \dot{y}]_k \rightarrow$ Vecteur d'état cartésien
- (2) $[Z, D, V_B, K_B]_k \rightarrow$ Vecteur d'état polaire.

Avec les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \text{Arctg} \frac{x}{y} \\ D = [x^2 + y^2]^{1/2} \\ V_B = [\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2} \\ K_B = \text{Arctg} \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_B - x_L \\ y = y_B - y_L \end{array} \right.$$

La modélisation (1) conduit à une équation de mesure non linéaire tandis que la modélisation (2) conduit à une équation d'état non linéaire. On compare dans ce qui suit les modèles obtenus dans le cas de mouvements rectilignes et uniformes et les résultats des filtres correspondants.

3. - CHOIX DU VECTEUR D'ETAT

La synthèse des filtres exige de disposer d'une caractérisation du processus considéré.

Le modèle d'état est de la forme :

$$\dot{X}(t) = F X(t) + G w(t) \quad X(0) = X_0$$

Cette équation doit donc être discrétisée. (la période de discrétisation T peut être différente de la période d'échantillonnage des mesures.)

3.1 - Vecteur de coordonnées cartésiennes

La trajectoire du mobile étant supposée en première approximation, rectiligne uniforme, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_B(t_0) + (t-t_0) V_B \sin K_B - x_L(t) \\ \dot{x}(t) = 0 \\ y(t) = y_B(t_0) + (t-t_0) V_B \cos K_B - y_L(t) \\ \dot{y}(t) = 0 \end{array} \right.$$

DIFFERENTS ASPECTS DES PROBLEMES DE MODELISATION ET D'ESTIMATION
DES MOUVEMENTS RELATIFS D'UN MOBILE DANS LE PLAN A PARTIR DE MESURES
ANGULAIRES BRUTEES ET ECHANTILLONNEES

L'équation d'état discrète peut se mettre sous la forme :

$$X_{k+1} = \phi(k+1, k) X_k$$

X étant un vecteur à 4 composantes de la forme :

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ y_k \\ \dot{y}_k \end{bmatrix}$$

Si T est la période d'échantillonnage, on a alors :

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \dot{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ y_k \\ \dot{y}_k \end{bmatrix}$$

L'équation de mesure discrète est de la forme :

$$z_k = Z_k + v_k = h(X_k, k) + v_k$$

avec : $h(X) = h(x, y, \dot{x}_L, \dot{y}_L) = \text{Arctg} \frac{x - x_L}{y - y_L}$

3.2 - Vecteur de coordonnées polaires

La trajectoire du mobile étant rectiligne uniforme, on montre (Annexe 1) que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} \dot{Z} = \frac{1}{D} [V_B \sin(K_B - Z) - V_L \sin(K_L - Z)] \\ \dot{V}_B = 0 \\ \dot{D} = V_B \cos(K_B - Z) - V_L \cos(K_L - Z) \\ \dot{K}_B = 0 \end{cases}$$

L'équation d'état discrète peut se mettre sous la forme :

$$X(k+1) = \phi(X_k, k)$$

X étant un vecteur d'état à 4 composantes de la forme :

$$X_k = \begin{bmatrix} Z(k) \\ D(k) \\ V_B(k) \\ K_B(k) \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases} Z(k+1) = Z(k) + \frac{T}{D(k)} [V_B(k) \sin(K_B(k) - Z(k)) - V_L(k) \sin(K_L(k) - Z(k))] \\ D(k+1) = D(k) + T [V_B(k) \cos(K_B(k) - Z(k)) - V_L(k) \cos(K_L(k) - Z(k))] \\ V_B(k+1) = V_B(k) \\ K_B(k+1) = K_B(k) \end{cases}$$

L'équation de mesure discrète est de la forme :

$$z_k = Z_k + v_k = H(k) X(k) + v(k)$$

avec : $H(k) = H = [1, 0, 0, 0]$

4. - LE FILTRE NON LINEAIRE

Les modélisations utilisées faisant intervenir des équations non linéaires, il est nécessaire de linéariser les équations de dynamique et/ou de mesure pour se ramener à un problème de filtrage linéaire.

La méthode choisie est celle du filtre de "KALMAN étendu" pour lequel on linéarise les équations autour de l'estimée en rejetant les termes d'ordres supérieurs ou égaux à deux. Il est facile de montrer que, sous certaines conditions, le filtre polaire obtenu coïncide avec un filtre MAP (maximisation de la densité de probabilité a posteriori).

Les équations du filtre deviennent alors :

$$\begin{cases} \text{Prédiction} \begin{cases} \hat{X}(k+1/k) = \phi[\hat{X}(k), k] \\ P(k+1/k) = \frac{\partial \phi[\hat{X}(k), k]}{\partial \hat{X}(k)} P(k) \frac{\partial \phi^T[\hat{X}(k), k]}{\partial \hat{X}(k)} \end{cases} \\ \text{Estimation} \begin{cases} P(k+1) = P(k+1/k) - P(k+1/k) \frac{\partial h^T[\hat{X}(k+1/k), k]}{\partial \hat{X}(k+1/k)} R^{-1} \\ \left[\frac{\partial h[\hat{X}(k+1/k), k]}{\partial \hat{X}(k+1/k)} P(k+1/k) \frac{\partial h^T[\hat{X}(k+1/k), k]}{\partial \hat{X}(k+1/k)} + R(k) \right]^{-1} \\ \frac{\partial h[\hat{X}(k+1/k), k]}{\partial \hat{X}(k+1/k)} P(k+1/k) \end{cases} \\ \text{Filtrage} \begin{cases} K(k+1) = P(k+1) \frac{\partial h^T[\hat{X}(k+1/k), k]}{\partial \hat{X}(k+1/k)} R^{-1}(k) \\ \hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1) \{ z(k+1) - h[\hat{X}(k+1/k), k+1] \} \end{cases} \end{cases}$$

On remarque qu'il est nécessaire de connaître les quantités :

$$\frac{\partial h[\hat{X}(k+1/k), k]}{\partial \hat{X}(k+1/k)} \text{ et } \frac{\partial \phi[\hat{X}(k), k]}{\partial \hat{X}(k)}$$

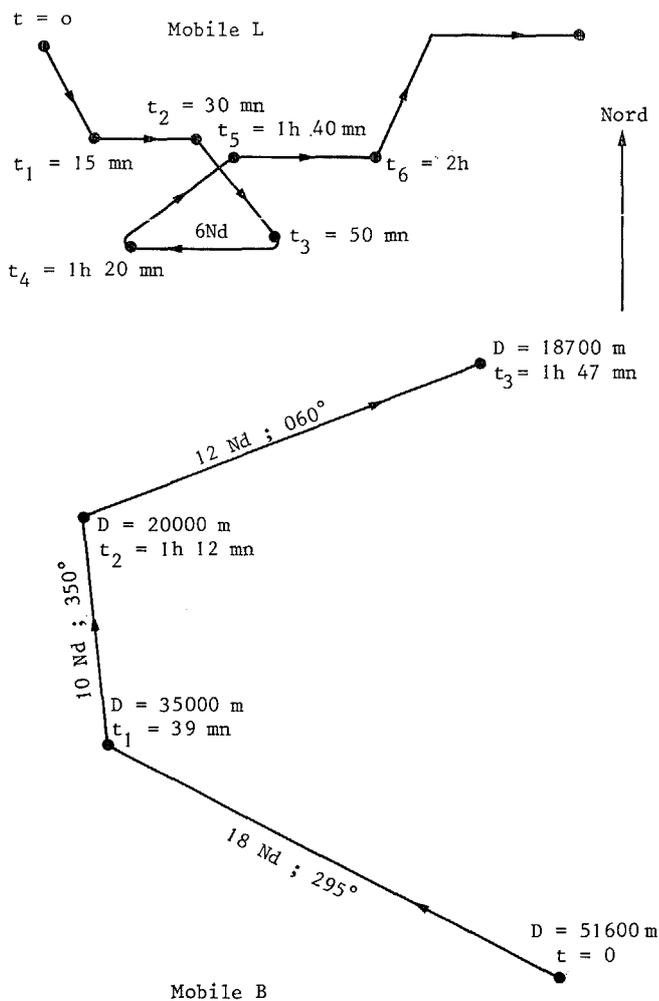
Leurs expressions sont données dans l'an-



DIFFERENTS ASPECTS DES PROBLEMES DE MODELISATION ET D'ESTIMATION
DES MOUVEMENTS RELATIFS D'UN MOBILE DANS LE PLAN A PARTIR DE MESURES
ANGULAIRES BRUTEES ET ECHANTILLONNEES

5. - LA SIMULATION DES MESURES

On considérera les résultats obtenus pour deux mobiles B et L dont les trajectoires sont définies de la façon suivante :



SITUATION GEOGRAPHIQUE

Les azimuts obtenus sont bruités à l'aide d'un bruit blanc additif d'écart type $\sigma_R = 0,5^\circ$

6. - DETECTION D'EVOLUTION ET ADAPTATIVITE

Nous avons supposé que le mobile B suivait une trajectoire rectiligne à vitesse uniforme, or on constate que la trajectoire de B comporte des changements de route et de vitesse à $t_1 = 42$ mn et à $t_2 = 1$ h 12 mn. Il est donc nécessaire de détecter ces instants d'évolution t_1 et t_2 du mobile poursuivi et de prendre en compte ces évolutions en cap et en vitesse.

Pour détecter t_1 et t_2 , on adopte une méthode de comparaison de la valeur quadratique moyenne du processus d'innovation à un seuil. Cette erreur quadratique moyenne $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{z}_i)^2$ est calculée

sur une fenêtre glissante de $N = 100$ s, que l'on déplace le long du signal. Cette fenêtre doit être assez longue pour que l'estimation de l'écart quadratique moyen soit correcte du point de vue statistique et assez courte pour que la détection intervienne dans un délai satisfaisant vis à vis des constantes de temps moyennes d'évolution des mobiles poursuivis.

Si cet écart quadratique moyen est supérieur à un seuil S fixé en simulation, on détecte une évolution du mobile poursuivi. Il suffit alors, sans modifier l'estimation du vecteur d'état, de ramener la matrice de covariance d'erreur $P(k/k)$ à sa valeur initiale $P_0/0$ et de reprendre le traitement.

7. - LES RESULTATS DU FILTRAGE

Le signal est le signal correspondant aux trajectoires du paragraphe 5 considéré sur une tranche temporelle $0 \leq t \leq 6500$ s. Sur cette tranche de signal le mobile B évolue deux fois aux instants t_1 et t_2 ($t_1 \approx 2300$ secondes $t_2 \approx 4200$ secondes).

La fenêtre glissante est choisie de longueur $N = 100$ s et le seuil est pris égal à :

$$S = 0,14 \cdot 10^{-3}$$

La distance initiale est de $D_i = 51000$ m, la vitesse initiale de $V_{Bi} = 8$ m/s et le cap de B à la valeur $K_{Bi} = 300^\circ$.

On donne les variations de cap de distance et de vitesse en fonction du temps, pour les deux types de modélisation considérés.

7.1 - Résultats pour la modélisation en coordonnées cartésiennes

(voir planches ci-après)

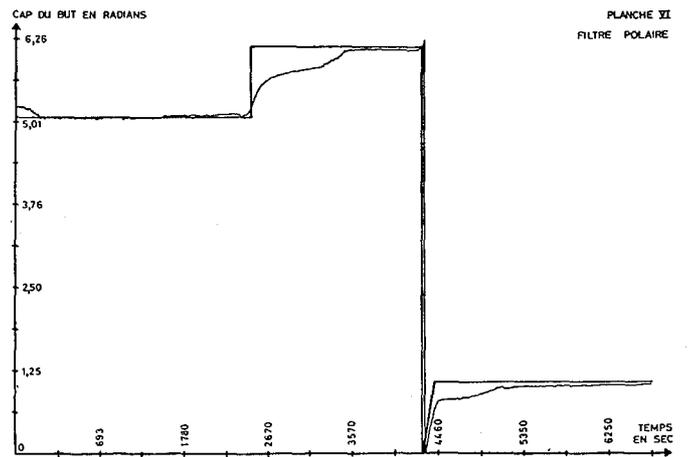
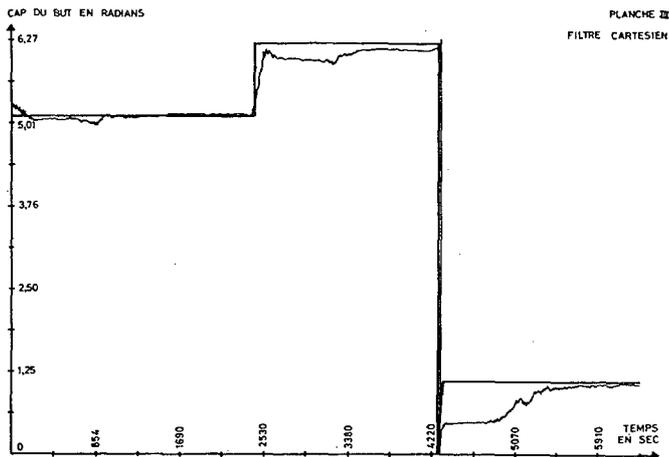
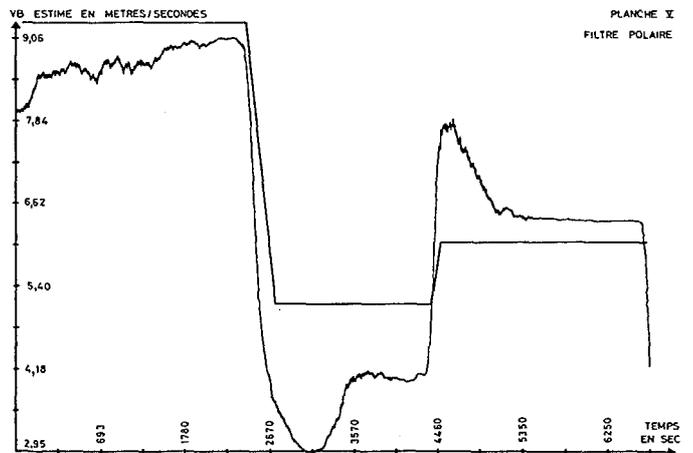
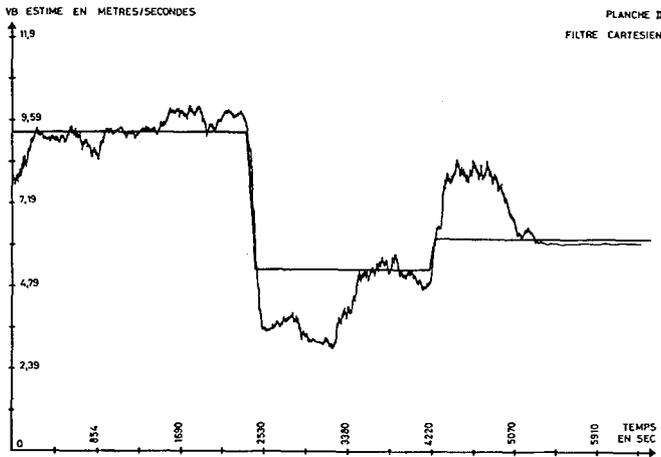
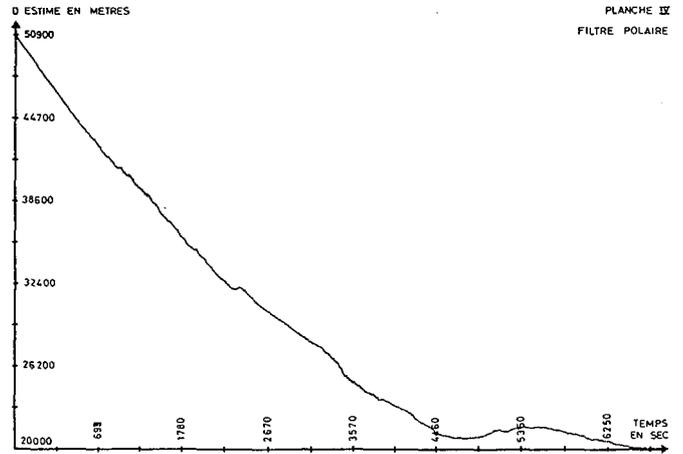
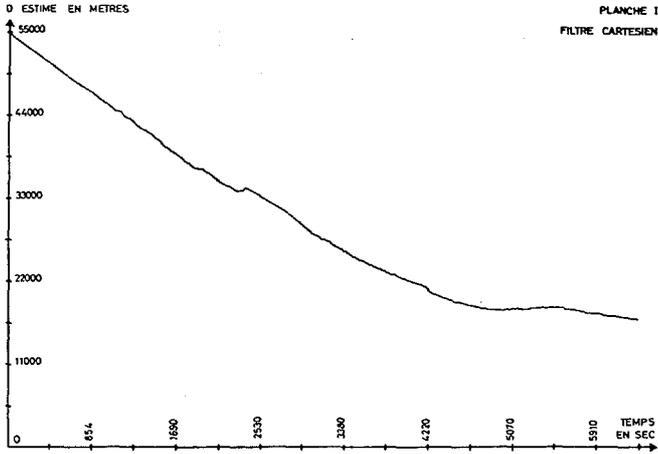
7.2 - Résultats pour la modélisation en coordonnées polaires

(voir planches ci-après)

DIFFERENTS ASPECTS DES PROBLEMES DE MODELISATION ET D'ESTIMATION
DES MOUVEMENTS RELATIFS D'UN MOBILE DANS LE PLAN A PARTIR DE MESURES
ANGULAIRES BRUTEES ET ECHANTILLONNEES

7.1 - Résultats pour la modélisation en coordonnées
cartésiennes

7.2 - Résultats pour la modélisation en coordonnées
polaires





DIFFERENTS ASPECTS DES PROBLEMES DE MODELISATION ET D'ESTIMATION
DES MOUVEMENTS RELATIFS D'UN MOBILE DANS LE PLAN A PARTIR DE MESURES
ANGULAIRES BRUTEES ET ECHANTILLONNEES

8. - CONCLUSION

On a comparé et étudié deux filtres linéarisés permettant l'estimation de la cinématique de la trajectoire d'un mobile à partir des seules mesures d'angles. Ces filtres sont construits à l'aide de deux modélisations différentes. L'une suppose un choix du vecteur d'état en coordonnées cartésiennes et une linéarisation de l'équation de mesure, l'autre suppose un choix du vecteur d'état en coordonnées polaires et une linéarisation de l'équation de dynamique.

L'exemple très particulier, présenté sous forme de courbes relatives aux éléments de cinématique (distance, cap, vitesse) estimés en fonction du temps, ne permet pas de dégager des avantages fondamentaux en faveur de l'une des deux modélisations. Ce fait est d'ailleurs général. Cependant, l'on constate un biais en vitesse assez important pour le filtre polaire.

Les temps de recalage des éléments de cinématique sont sensiblement les mêmes, seul diffère le mode de convergence vers la solution. Enfin, il faut remarquer que le filtre polaire est plus facile à initialiser que le filtre cartésien car il contient dans l'état les éléments de cinématique à reconstituer. Le filtre cartésien semble, par contre, particulièrement stable et "robuste".

- B I B L I O G R A P H I E -

- [1] A.P SAGE et J.L MELSA
Estimation Theory with Applications to Communication and Control Mac Graw Hill (1971)
- [2] A.H JAZWINSKI
Stochastic Processes and Filtering Theory New-York - Academic Press (1970)
- [3] A.E. BRYSON et YU-CHI HO
Applied Optimal Control Halsted Press (1975)
- [4] C. BOZZO et B. BARBAGELATA
Estimation des mouvements de deux mobiles dans un plan à partir de mesures bruitées et échantillonnées - Cinquième Colloque GRETSI - Nice (1975)
- [5] C. BOZZO
Introduction à la synthèse des filtres numériques Troisième partie (Octobre 1978)

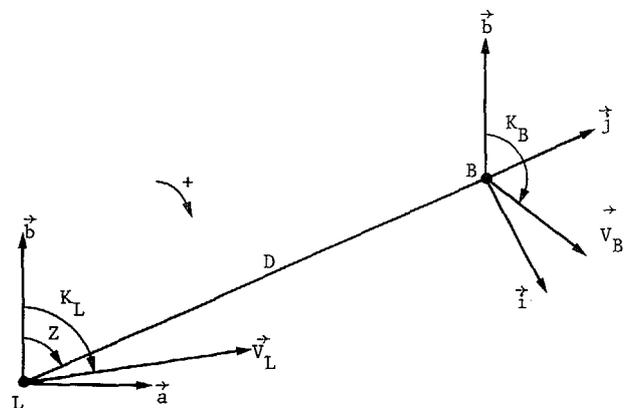
- [6] C. BOZZO-M. ZARAGOZA-A. GUILBERT

Etude d'azimétrie Analyse des différents filtres non linéaires estimateurs de cinématique - Rapport CAPCA - DCAN de TOULON (5ème partie) (1978)

- [7] Ph. de LARMINAT

Sur l'identification par filtrage non linéaire Thèse de Doctorat ès Sciences (Nantes 1971)

A N N E X E 1



$$\text{On a } \vec{v}_B = \vec{v}_L + \frac{d}{dt} (D \vec{j})$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_L + D \dot{\vec{j}} + D \dot{Z} \vec{i}$$

$$\text{De plus : } \vec{v}_L = v_L \cos K_L \vec{b} + v_L \sin K_L \vec{a}$$

Par projection de \vec{v}_B sur \vec{i} il vient :

$$\vec{v}_B \cdot \vec{i} = v_L \cos K_L (\vec{b}, \vec{i}) + v_L \sin K_L (\vec{a}, \vec{i}) + D \dot{Z} (\vec{i}, \vec{i})$$

$$(\vec{b}, \vec{i}) = (\vec{b}, \vec{j}) + (\vec{j}, \vec{i}) = Z + \frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{a}, \vec{i}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{j}) + (\vec{j}, \vec{i}) = -\frac{\pi}{2} + Z + \frac{\pi}{2} = Z$$

D'où :

$$\vec{v}_B \cdot \vec{i} = v_L \sin (K_L - Z) + D \dot{Z}$$

De la même façon, par projection de \vec{v}_B sur \vec{j} , il vient :

$$\vec{v}_B \cdot \vec{j} = v_L \cos (K_L - Z) + D \dot{Z}$$

On peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \vec{v}_B \cdot \vec{i} &= v_B \cos (\vec{v}_B, \vec{i}) = v_B \cos \left[-K_B + Z + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= v_B \sin [K_B - Z] \end{aligned}$$

$$\vec{v}_B \cdot \vec{j} = v_B \cos (K_B - Z)$$

DIFFERENTS ASPECTS DES PROBLEMES DE MODELISATION ET D'ESTIMATION
DES MOUVEMENTS RELATIFS D'UN MOBILE DANS LE PLAN A PARTIR DE MESURES
ANGULAIRES BRUTEES ET ECHANTILLONNEES

En exploitant les deux expressions de $\vec{V}_B \cdot \vec{i}$ on obtient :

$$\dot{Z} = \frac{1}{D} [V_B \sin (K_B - Z) - V_L \sin (K_L - Z)]$$

De la même façon, en exploitant les expressions de $\vec{V}_B \cdot \vec{j}$ on a :

$$\dot{D} = V_B \cos (K_B - Z) - V_L \cos (K_L - Z)$$

2. - EXPRESSION DE $\frac{\partial h}{\partial x}$

$$\frac{\partial h}{\partial x} (1,1) = \frac{x_3}{x_3^2 + x_1^2} \quad \frac{\partial h}{\partial x} (1,3) = \frac{-x_1}{x_3^2 + x_1^2}$$

Les autres termes sont nuls.

A N N E X E 2

1. - EXPRESSION DE $\frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (1,1) = 1 + \frac{T}{x_2} [-x_3 \cos (x_4 - x_1) + V_L \cos (K_L - x_1)]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (2,1) = T [x_3 \sin (x_4 - x_1) - V_L \sin (K_L - x_1)]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (1,2) = -\frac{T}{x_2^2} [x_3 \sin (x_4 - x_1) - V_L \sin (K_L - x_1)]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (2,2) = 1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (1,3) = \frac{T}{x_2} \sin (x_4 - x_1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (2,3) = T \cos (x_4 - x_1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (3,3) = 1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (1,4) = \frac{T}{x_2} x_3 \cos (x_4 - x_1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (2,4) = -T x_3 \sin (x_4 - x_1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (4,4) = 1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (5,3) = T$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (5,5) = 1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (6,4) = T$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (6,6) = 1$$

Les autres termes sont nuls.