

SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

ANALYSE SPECTRALE PAR CALCUL DE L'AUTOCOVARIANCE
ELIMINATION DE LOBES LATÉRAUX

Dr. Jan WILLEMS
Institut Agronomique et Vétérinaire Hassan II
67, El Harhoura - Temara-

RESUME

La segmentation temporelle lors de l'analyse spectrale digitale amène des perturbations qui se manifestent par l'apparition de lobes latéraux dans le spectre. Afin d'en diminuer l'importance, il est courant d'utiliser des fenêtres de pondération. L'emploi de ces dernières se fait au prix de la résolution fréquentielle, qui diminue dans ces conditions.

Nous préconisons l'emploi d'une méthode d'analyse spectrale digitale qui détermine l'amplitude, le déphasage et la fréquence indépendamment de la segmentation du signal et qui, par calcul de l'autocovariance élimine les lobes latéraux sans utiliser de fenêtre de pondération. Il va de soi que dans ces conditions, nous nous assurons les mêmes avantages que si nous utilisons ces fenêtres de pondération pour l'élimination des lobes latéraux, sans subir les inconvénients dus à la diminution de la résolution fréquentielle.

Dans cette communication, nous discutons les résultats des analyses d'un signal sinusoïdal stable ainsi que de deux signaux évolutifs à fréquence et à amplitude variables simulés par ordinateur. Nous comparons ensuite les valeurs des paramètres simulés à celles obtenues par analyse. Nous comparons aussi les résultats d'un calcul de spectre de puissance à ceux obtenus par notre méthode.

SUMMARY

Boundaries appear in the spectrum when the signal is segmented. In order to reduce the importance of these side lobes, one needs windowing techniques which make worse frequency resolution.

We recommend the use of a digital spectral analysis which computes frequency independantly from length variations of time segmentation and which eliminates side lobes by computing autocovariance without windowing.

It is obvious that, in such conditions, we ensure the advantages of windowing techniques, namely the elimination of side lobes, without undergoing the disadvantages, namely the diminishing of frequency resolution. This paper discusses the results of the analysis of computer simulated data of stable and nonstationary sines with varying amplitude and frequency. The value of simulated and analysed - autocovariance and power spectrum of windowed data - are compared.



ANALYSE SPECTRALE PAR CALCUL DE L'AUTOCOVARIANCE
ELIMINATION DE LOBES LATÉRAUX

I. INTRODUCTION

L'étude des signaux contenant peu de bruit ne satisfaisant pas aux conditions mathématiques sévères est peu réaliste, de stationnarité et d'ergodicité, tels la parole, les sons musicaux, les cris d'animaux, fait de plus en plus appel aux techniques d'analyse digitales qui visent à déterminer les paramètres amplitude, fréquence au cours du temps (1). Les méthodes d'analyse spectrale digitales classiques, quoique bien adaptées à l'étude de signaux stables, sont à notre sens insuffisantes pour l'étude de signaux inharmoniques et évolutifs (voir tableau 1). Cet état de fait est lié à la formalisation du concept de fréquence évoluant au cours des temps (2,3,4,5,6). En effet, lorsqu'il s'agit de déterminer l'évolution des paramètres amplitude et fréquence au cours du temps, il est courant de partager le signal en segments temporels successifs. La longueur de ces segments est soit constante, soit variable, si la découpe est synchronisée sur le signal à analyser (7,8,9,10;11,12)

On associe ensuite un spectre de Fourier à chacun de ces segments temporels dont la durée finie implique une représentation discrète (13,14), la segmentation amène des perturbations qui se manifestent par l'apparition de lobes latéraux dans le spectre (13,14,15,16,17,18,19). Afin d'en diminuer l'importance, il est courant soit de synchroniser la longueur de la découpe le signal lui-même soit d'utiliser des fenêtres de pondération. Le premier ne permet que l'étude de signaux harmoniques ou faiblement inharmoniques, le second dégrade la résolution fréquentielle (voir tableau 2) (15,16,20)

Méthode	Amplitude	Fréquence	Déphasage	Sons multi.	Signal évol.	Batteries
classique synchrone	oui	oui	oui	non	oui	non
classique asynchrone	oui	au sens de Fourier	non	difficile	oui	non
analogique	oui	oui	non	difficile	sépend de l'appareil	difficile
autocovariance	oui	oui	oui	oui	oui	oui

Tableau 1 : Comparaison des possibilités de divers types d'analyses spectrales.

méthode	fenêtre de pondération	largeur du lobe central	amplitude du premier lobe latéral.
spectre de puissance	rectangulaire	1/T	-13 dB
	Bartlett	2/T	-25 dB
	Hanning	2/T	-31 dB

Hamming	2/T	-41 dB
Blackmann	3/4T	-57 dB
autocovariance avec élimination des lobes latéraux	1/T	-42 dB

Tableau 2 :

Résumé des caractéristiques de quelques types d'analyse spectrale.

Nous préconisons l'emploi d'une méthode d'analyse spectrale digitale qui détermine la fréquence indépendamment de la segmentation du signal et qui, par calcul élimine les lobes latéraux sans utiliser les fenêtres de pondération (18,19). Il va de soi que dans ces conditions, nous nous assurons les avantages des méthodes synchrones, à savoir la bonne résolution fréquentielle, et ceux des fenêtres de pondération pour élimination des lobes latéraux sans en subir les inconvénients qui sont respectivement l'impossibilité d'analyser les signaux inharmoniques et l'augmentation de l'incertitude fréquentielle.

Nous décrivons d'abord brièvement les fondements de notre méthode. Nous discutons ensuite à titre d'exemple des analyses d'un signal sinusoïdal stable ainsi que de deux signaux évolutifs à fréquence et amplitude variables simulés par ordinateur. Nous comparons ensuite les valeurs des paramètres simulés à celles obtenues par analyse. Enfin, nous comparons les résultats obtenus à partir de l'analyse d'un signal sinusoïdal stable effectuée par calcul de l'autocovariance et par calcul du spectre de puissance après utilisation d'une fenêtre de pondération.

2. PRINCIPE DE LA METHODE

Considérons un signal $s(t)$ mesuré pendant un temps fini T_m , partagé en segments successifs. Le signal est discrétisé en prenant θ comme période d'échantillonnage. Chaque segment, a la même longueur, comprend N points échantillon, sera étendu périodiquement au sens d'une "fenêtre ouverte" (2, 14,18). Dans ces conditions nous avons :

$$T_m = R.T \tag{1}$$

$$s_{i,n} = s((i-1)T+n\theta) \tag{2}$$

i, n, R et N sont des entiers positifs et $0 \leq n < N$. Effectuons une transformée discrète de Fourier (DFT) du signal discrétisé non pondéré sur chacun des segments :

$$C_{i,q} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_{i,n} e^{-2\pi j q n / N} \tag{3}$$

q est entier, $j = \sqrt{-1}$, $0 \leq n < N$, $-N < q \leq N/2$

Nous avons utilisé l'algorithme de la FFT. (21) L'autocovariance de deux spectres successifs est défini par l'expression quadratique suivante: (18,19,22,23).

ANALYSE SPECTRALE PAR CALCUL DE L'AUTOCOVARIANCE
ELIMINATION DE LOBES LATÉRAUX

$$k_{i,q} = c_{i+1,q} c_{i,q}^* \quad (4)$$

Pour nous fixer les idées, nous donnons le résultat des calculs pour un signal sinusoïdal simple :

$$s(t) = A \sin(\omega t + \Psi) \quad (5)$$

Après échantillonnage, nous obtenons la séquence suivante

$$s_{i,n} = A \sin(2\pi(p+\epsilon)n/N + \Psi_i) \quad (6)$$

où p entier est le nombre de périodes de s dans un segment temporel T et ε la partie non entière (0,5 < ε < 0,5) (7)

Ψ_i est le déphasage de s au début de chaque segment temporel (i-1)T

$$\Psi_i = \Psi + 2\pi\epsilon(i-1) \quad (8)$$

$$\omega T = 2\pi(p+\epsilon)/N \quad (9)$$

A partir des équations (3) et (6), nous obtenons les spectres de fourier périodiques (voir annexe) :

$$c_{i,q} = \frac{A \sin(\pi(p+\epsilon-q)) e^{j(\Psi_i - \frac{\pi}{2})}}{2N \sin(\pi(p+\epsilon-q)/N)} e^{j\pi(2i + \frac{N-1}{N})(p+\epsilon-q)} + \frac{A \sin(\pi(p+\epsilon+q)) e^{-j(\Psi_i - \frac{\pi}{2})}}{2N \sin(\pi(p+\epsilon+q)/N)} e^{j\pi(2i + \frac{N-1}{N})(p+\epsilon+q)} \quad (10)$$

Le premier terme de l'équation (10) représente le spectre des fréquences positives, le second celui des fréquences négatives. Par la suite, nous utiliserons "spectre direct" pour le spectre des fréquences positives, "spectre image" pour le spectre des fréquences négatives.

Les raies spectrales obtenus pour la sinusoïde (5) sont obtenues en posant :

$$p = q + m_1 N \quad (11)$$

$$p = -q + m_2 N \quad (12)$$

où m₁ et m₂ sont des entiers quelconques. Pour déterminer univoquement fréquence, il suffit de prendre

$$m_1 = m_2 = 0 \quad (13)$$

En reportant les valeurs des coefficients de fourier (11) dans l'équation, on obtient l'expression de l'autocovariance (v, annexe)

$$k_{i,q} = \left(\frac{A \sin(\pi(p+\epsilon-q))}{2N} \right)^2 \left[\frac{e^{2\pi\epsilon}}{\sin^2[\pi(p+\epsilon-q)/N]} + \frac{e^{-2\pi\epsilon}}{\sin^2[\pi(p+\epsilon+q)/N]} - \frac{2 \cos(4\pi(i + \frac{4N-1}{4N})(p+\epsilon-q)/N + 2\Psi)}{\sin(\pi(p+\epsilon-q)/N) \sin(\pi(p+\epsilon+q)/N)} \right] \quad (14)$$

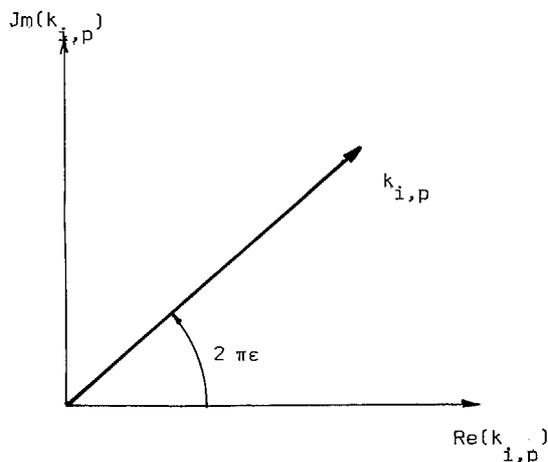


Figure 1. : Diagramme caractéristique des vecteurs k_{i,n} dans le plans complexe. En première approximation - approximation du spectre direct - l'argument ε des vecteurs complexes est très proche de ε, pour p > 3 $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 3 \cdot 10^{-3}$.

La contribution du spectre direct est représentée par le premier terme de la parenthèse, le spectre image par le second terme, Le troisième terme représente l'interaction entre les deux spectres dans l'expression quadratique de l'autocovariance.

Le signal est détecté (22,24) en utilisant le seuil de détection suivant :

$$\langle |C_{i,p}| \rangle \gg \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \langle |C_{i,m}| \rangle^2 + \langle |C_{i,m}| \rangle \quad (15)$$

$$\text{avec } \langle |C_{i,m}| \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |C_{i,m}| \quad (16)$$

On remarque aisément que les variation d'amplitude et de fréquence correspondent respectivement aux variations du module et de l'argument de k_{i,q}. (tableau 3) et les figures (1,2,4,5). En première approximation, on peut écrire si p=q

$$\epsilon \approx \frac{1}{2} \arg(k_{i,q}) \quad (17)$$

Appuyons sur le fait que grâce à la connaissance de ε, nous pouvons déterminer les valeurs de l'amplitude A, de la fréquence f = ω/(2π), et du déphasage Ψ. En effet, les équations (6), (8) et (9) impliquent :

$$\omega = \frac{2\pi}{NT} (p+\epsilon) \quad (18)$$

$$\Psi = \Psi_i - 2\pi\epsilon(i-1) \quad (19)$$

En utilisant les relations 10,11,14,17,19 on trouve un système itératif convergent (voir annexe) basé sur la résolution du système d'équations A15 à A20 en A, ε, et Ψ. La contribution du spectre image dans le spectre direct, ainsi que les lobes latéraux des raies spectrales détectées sont ainsi éliminés par calcul.



ANALYSE SPECTRALE PAR CALCUL DE L'AUTOCOVARIANCE
ELIMINATION DE LOBES LATÉRAUX

Type de signal	Module $k_{i,n}$	argument $k_{i,n}$
signal stable	constant	constant
signal modulé en amplitude	variable	constant
signal modulé en fréquence	constant	variable
battement	variable	variable

Les points se situent sur une droite ne passant pas par l'origine des axes coordonnés.

Tableau 3

3. RESULTATS DE SIMULATIONS

3.1. Analyse d'une sinusoïde stable.

Le signal simulé a les caractéristiques suivantes :

$$y_n = \sin(2\pi 4,3 n/256 + 1) \quad 0 \leq n < 1280$$

La raie spectrale du signal se situe à $p=4, \epsilon=0,3; \Psi=1, A=1$. L'analyse a été faite pour $R=5, N=256$. Le tableau 4 donne les résultats de l'analyse par autocovariance avec et sans élimination de lobes latéraux et le spectre de puissance après pondération par une fenêtre de Hanning. La figure 2 montre le vecteur $k_{i,4}$ avant l'élimination des lobes latéraux. Remarquons que cette dernière analyse a été faite dans les mêmes conditions que l'autocovariance ($N=256$). Le signal pondéré est défini par la relation suivante :

$$y_n = 0,5(1 - \cos(2\pi n/256)) \sin(2\pi 4,3 n/256 + 1)$$

La première constatation qui s'impose à la vue du tableau 4 montre que la précision la plus faible est celle obtenue par le calcul du spectre de puissance (c) qui admet 8% d'écart relatif sur l'amplitude et 7% sur la fréquence.

	i	A	$\frac{\Delta A}{A} \cdot 10^{-3}$	ϵ	$\frac{\Delta \mu}{\mu} \cdot 10^{-4}$	Ψ	$\frac{\Delta \Psi}{\Psi} \cdot 10^{-2}$
(a)	1	0,9989	1,1	4,2995	1,2	1,0008	0,1
	2	0,9998	0,2	4,2999	0,2	0,9964	0,4
	3	1,0014	1,4	4,3007	1,6	0,9845	1,6
	4	0,9978	2,2	4,2989	2,6	1,0227	2,2
(b)	1	1,0189	19	4,3089	21	X	X
	2	0,9782	22	4,2889	26	X	X
	3	1,0187	19	4,3088	20	X	X
	4	0,9928	7	4,2968	7	X	X
(c)		0,92	80	4	698	X	X

Tableau 4 :

Analyse spectrale par autocovariance avec élimination des lobes latéraux (a), sans élimination (b), et par calcul du spectre de puissance après pondération par une fenêtre de Hanning (c).

Remarquons que pour la méthode d'analyse que nous préconisons, les écarts relatifs les plus grands sont de 0.2% par l'amplitude et de 0.03% pour la fréquence.

La figure 3 montre l'efficacité de l'élimination des lobes latéraux pour la même simulation. On peut remarquer que le lobe central pour l'analyse par spectre de puissance est élargi (-10dB pour la raie $q=5$), mais l'amplitude de ces lobes s'affaiblit rapidement en fonction de l'éloignement des raies par rapport à celle du signal. Le meilleur résultat est fourni par notre méthode d'analyse après élimination des lobes : -35dB pour la raie $q=5$, soit une amélioration de 25dB par rapport à l'analyse classique.

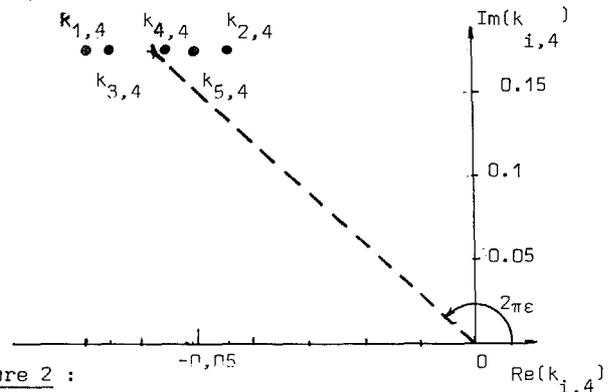


Figure 2 :

Représentation du vecteur $k_{i,4}$ après analyse d'un signal simulé ($p=4, \epsilon=0,3; \Psi=1, R=5, N=256$). Remarquons l'importance de la tenue réelle de l'équation (14). Après élimination des lobes latéraux la position obtenue est marquée les pointillés.

Au delà de la raie 7, les deux méthodes montrent des comportements comparables en moyenne, avec un avantage pour notre méthode (raie 12,13,14, etc...)

3.2. Simulation et analyse d'un signal à amplitude variable

Le signal non stationnaire à amplitude variable est défini par la relation suivante :

$$y_n = (0,5 + n/1024) \sin(2\pi 4,3 n/256 + 1)$$

et analysé avec $R=5$ et $N=256$.

La figure 4 montre l'aspect caractéristique de la représentation du coefficient d'autocovariance dans le plan complexe: l'argument reste stable tandis que le module de l'autocovariance augmente avec le temps (i croissant). Remarquons les faibles écarts relatifs, 1,4% maximum pour l'amplitude moyenne, 0,063% pour la fréquence (tableau 5)

Analyse numéro	Amplitude moyenne simulée	Amplitude moyenne calculée	erreur relative $\times 10^{-2}$
1	0,75	0,739	1,4
2	1,00	0,989	1,1
3	1,25	1,246	0,3
4	1,50	1,488	0,8

ANALYSE SPECTRALE PAR CALCUL DE L'AUTOCOVARIANCE
ELIMINATION DE LOBES LATÉRAUX

Analyse numéro	Fréquence moyenne simulée	Fréquence moyenne calculée	Erreur relative $\times 10^{-4}$
1	4,3	4,2995	1,2
2	4,3	4,2981	4,4
3	4,3	4,3003	0,7
4	4,3	4,2973	6,3

Analyse numéro	Déphasage moyen simulé	Déphasage moyen calculé	Erreur relative $\times 10^{-2}$
1	1	1,085	8,5
2	1	1,061	6,1
3	1	1,025	2,5
4	1	1,093	9,3

Tableau 5 :

Modulation d'amplitude d'un signal sinusoïdal: coefficients d'autocovariance.

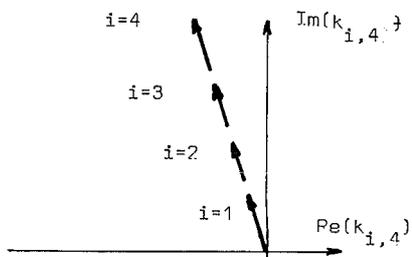


Figure 4 :

Modulation d'amplitude : représentation de l'autocovariance en fonction du temps

3.3. Simulation et analyse d'un signal à fréquence variable

Le signal non stationnaire à fréquence variable est défini par la relation suivante :

$$y_n = 100 \sin \left(\int_0^t \frac{21,596 ds}{0,1915 \cdot 10^{-4}s + 0,98} + 1 \right)$$

où l'intégrande représente la fréquence instantannée.

L'analyse est faite pour R=5 et N=256. Si nous reportons ce type de variation à un oscillateur acoustique échantillonné à 35kHz, cette dérive correspondrait à une variation de fréquence d'une octave par seconde.

On constate (tableau 6) que l'écart relatif sur l'amplitude est au maximum de 4,6%, tandis que l'écart relatif des fréquences moyennes simulées et analysées vaut au maximum 0,07%. La Figure 5 montre la représentation de l'autocovariance dans le plan complexe.

Analyse numéro	Amplitude moyenne simulée	Amplitude moyenne calculée	Erreur relative $\times 10^{-2}$
1	100	96,4	3,6
2	100	97,4	2,6
3	100	97,2	2,8
4	100	95,4	4,6

Analyse numéro	Amplitude moyenne simulée	Amplitude moyenne calculée	Erreur relative $\times 10^{-4}$
1	25,3559	25,3547	0,5
2	25,1054	25,1054	0,0
3	24,8585	24,8601	0,6
4	24,6153	24,6199	1,9

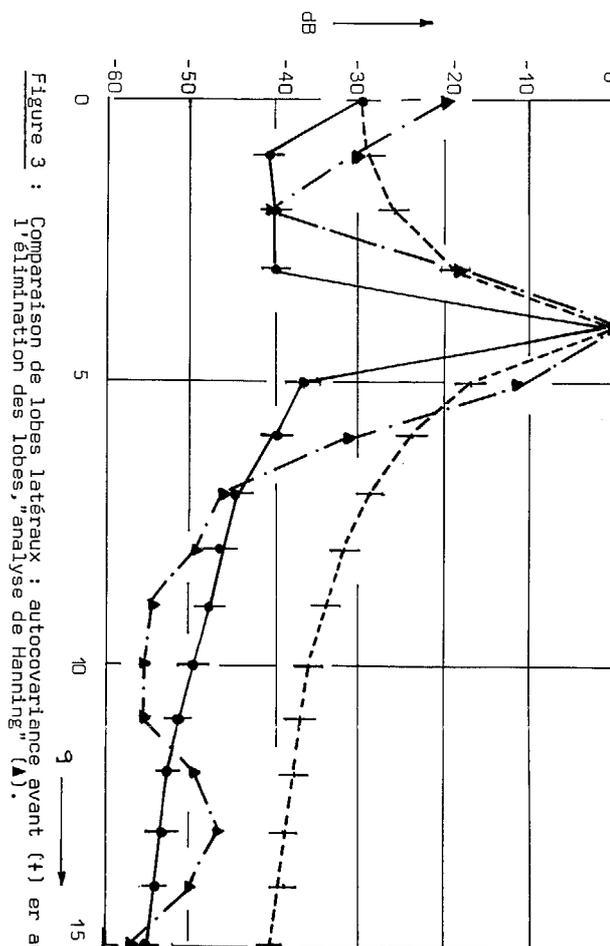


Figure 3 : Comparaison de lobes latéraux : autocovariance avant (+) et après (Δ) l'élimination des lobes, "analyse de Hanning".

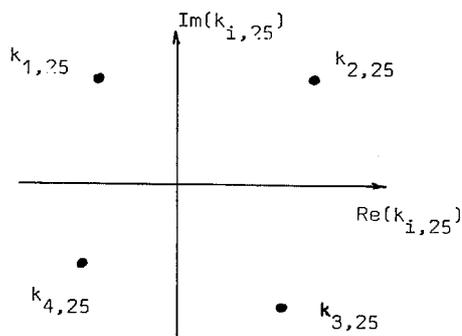


Figure 5 :

Evolution du coefficient d'autocovariance au cours du temps (fréquence variable).

4. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons présenté une méthode d'analyse spectrale basée sur le calcul de l'autocovariance et permettant de décrire les signaux évolutifs dans une représentation caractérisée par un référentiel amplitude, fréquence et temps. Les coefficients d'autocovariance sont calculés à partir des spectres discrets de Fourier plus des segments temporels successifs adjacents d'égale longueur. Grâce à l'emploi d'une fenêtre rectangulaire ouverte, nous sommes à même de calculer et d'éliminer les perturbations liées à la découpe du signal. Nous bénéficions donc des avantages des



ANALYSE SPECTRALE PAR CALCUL DE L'AUTO-COVARIANCE
ELIMINATION DE LOBES LATÉRAUX

fenêtres de pondération classiquement utilisées sans en avoir les inconvénients, à avoir, l'augmentation de l'incertitude fréquentielle.

Des simulation des signaux stables et évolutifs ont montré le bien-fondé de cette méthode. La comparaison des paramètres simulés et calculés par des analyses de 256 points, montrent que les écarts relatifs sur l'amplitude valent quelques pour-mille, et sur la fréquence quelques pour-dix-mille. Ces faibles valeurs d'écart relatif est obtenu grâce à l'élimination des lobes latéraux ainsi au'à l'élimination de l'influence du spectre image dans le spectre direct. Une comparaison de nos résultats avec une analyse par calcul de spectre de puissance après pondération par une fenêtre de Hanning montre la supériorité de notre méthode qui a été utilisée avec succès dans l'analyse de signaux non stationnaires (18,19,23).

- (1) D. BARIAUX. Conférence tenue à l'Assemblée Générale de l'Association des Acousticiens Belges A.B.A.V. 2.6.76.
- (2) J. BURGESS J. Acoust. Soc. Am. V 58 n°3 p556
- (3) MADHU SUDAN GUPTA . Am. J. Phys. V 43 n°12 p1087
- (4) D. HOWE. NBS Techn. note n° 679
- (5) T. KORN Acoustica V20 n°1 p 55
- (6) D. SLEPIAN. Proc. IEEE V 64 n°3 p 292
- (7) D. LUCE, M. CLARK J. Acoust. Soc. Am. V42 n°6 p1232
- (8) J. KEELER. IEEE Tr. Audio & el. ac. dec 1972 p338.
- (9) J. BEAUCHAMP J. Acoust. Soc. Am. V47 n°5 p1150
- (10) F. SPITZNOGLE, A. QUASI J. Acoust. Soc. Am. V47 n° 5 p 1150
- (11) D. FREEDMAN J. Acoust. Soc. Am; V41 n°4 p 793
- (12) J.C. RISSET, M. MATHEWS. Phys. Today V22 n°2 p23
- (13) J. MAX Méthodes et Techniques de Traitement de Signal, Masson; 1972
- (14) J. DE PRINS, J.P. LECHIEU. Bul. Cl. Sc., Ac.R. Belgique tome LXII Série 5. p7
- (15) J. BENDAT, A. PIRSOL. Random Data. Analysis and Measurement. wiley 1971
- (16) W. OPPENHEIM, R. SCHAFER : Digital Signal Processing . Prentice Hall 1975
- (17) J. KEELER. IEEE Trans. Audio & El. Ac. dec. 1972 p. 378
- (18) J. WILLEMS, Analyse et synthèse de sons par ordinateur. Thèse de doctorat. Université Libre de Bruxelles. Oct. 1976
- (19) J. WILLEMS. A Method for Spectral Analysis of Musical Sounds. Second Workshop on Physical and Neurophysiological Foundations of Music. 18-22 Juillet 1977
- (20) HEWLETT PARCKARD 5451B Fourier Analyser systems and subsystems
- (21) W. COCHRAN & al. Proc. IEEE v55 n°10 p1164
- (22) G. CORNELISSEN : Analyse de signaux et application aux problèmes de définition de la stabilité de fréquence. Thèse de Doctorat . Université Libre de Bruxelles. Juin 1976.

- (23) D. BARIAUX, G. CORNELISSEN, J. DE PRINS, J. L. GUISSSET, J. WILLEMS. Acoustica V32 n°5 p307
- (24) J. DE PRINS J. Interdisc. Res. V4 n°2 p159

ANNEXE

En décrétisant le signal de l'équation (5) observée sur un temps T_m , partagé en R segments successifs de même longueur et comprenant chacun N Points échantillon espacés par un intervalle de temps θ , on obtient :

$$s_{i,n} = A \sin(2\pi(p+\epsilon)n/N + \psi_i) \quad (A.1)$$

$$T = T_m/R \quad (A.2)$$

$$\theta = T_m/(NR) \quad (A.3)$$

En exprimant (6) en fonction d'une somme d'exponentielles complexes on obtient

$$c_{i,q} = \frac{A}{2N} e^{j(\psi_i - \frac{\pi}{2})} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi(p+\epsilon-q)/N} e^{-j(\psi_i - \frac{\pi}{2})} \quad (A.4)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (e^{-2j\pi(p+\epsilon+q)/N})^n \quad (A.4)$$

Le premier terme représente la contribution du spectre direct que nous représenterons par le symbole $c_{i,q}^+$. Ce terme vaut, en utilisant l'identité

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho^k = \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} \quad (A.5)$$

$$c_{i,q} = \frac{A \sin((p+q)\pi/N)}{2N \sin((p-q)\pi/N)} e^{j(\psi_i - \frac{\pi}{2})} e^{j\pi(2i + \frac{N-1}{N})(p+\epsilon-q)} \quad (A.6)$$

Une raie du spectre image est donné par la relation :

$$c_{i,q}^+ = (c_{i,-q}^-)^* \quad (A.7)$$

Une raie du spectre de fourier vaut donc

$$c_{i,q} = c_{i,q}^- + c_{i,q}^+ \quad (A.8)$$

En considérant que

$$c_{i+1,q}^- c_{i,-q}^- = c_{i+1,-q}^- c_{i,q}^- \quad (A.9)$$

$$k_{i,q} = c_{i+1,q}^- c_{i,q}^- + (c_{i+1,-q}^- (c_{i,-q}^-)^*)^* + \text{Re}(c_{i+1,q}^- c_{i,-q}^-) \quad (A.10)$$

où $\text{Re}(z)$ est l'opérateur prenant la partie réelle du nombre complexe z . En utilisant les équations (A.6) et (A.10) on trouve l'équation (14)

En utilisant l'équation (A.6) on trouve

$$\psi = \arg(c_{i,p}^-) + \pi/2 - \pi\epsilon (2i+1) \quad (A.11)$$

où $\arg(z)$ représente l'argument du nombre complexe z

Bien, entendu on ne connaît pas le spectre direct, $\{c_{i,q}^-\}$, mais bien la somme des spectres directs et image $\{c_{i,q}\}$. On peut prendre l'approximation suivante si $N > 1$

$$\frac{\sin \pi(p+\epsilon-q)}{N \sin \pi(p+\epsilon-q)/N} \sim \frac{\sin(p+\epsilon-q)}{\pi(p+\epsilon-q)} \quad (A.12)$$



ANALYSE SPECTRALE PAR CALCUL DE L'AUTO-COVARIANCE
ELIMINATION DE LOBES LATÉRAUX

En utilisant (A.13), on montre facilement que ,
si $p=q$ $c_{i,p}^- = \frac{2p+\epsilon}{2(p+\epsilon)} \operatorname{Re}(c_{i,p}) + j \frac{2p+\epsilon}{2p} \operatorname{Im}(c_{i,p})$
(A.13)

où $\operatorname{Im}(z)$ est la partie imaginaire du nombre complexe z .
De (A.11) et (A.12) il vient

$$\psi = \frac{1}{2} \arg \frac{2p+\epsilon}{2(p+\epsilon)} \operatorname{Re}(c_{i,p}) + j \frac{2p+\epsilon}{2p} \operatorname{Im}(c_{i,p}) + \frac{\pi}{2} - \pi\epsilon(2i+1) \quad (\text{A.14})$$

La méthode d'itération peut se représenter par
le système d'équations suivant : pour $p=q$ à la première
itération, on pose : $d_{i,p}^{(0)} = k_{i,p}$ (A.15)
ensuite, l'on a l'itération, d'ordre r :

$$\epsilon^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \arg (d_{i,p}^{(r)}) \quad (\text{A.16})$$

$$A_p^{(r)} = (d_{i,p}^{(r)} (d_{i,p}^{(r)})^*)^{1/4} \frac{2N \sin(\pi\epsilon^{(r)}/N)}{\sin(\pi\epsilon^{(r)})} \quad (\text{A.17})$$

$$\psi^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{2p+\epsilon^{(r)}}{2(p+\epsilon^{(r)})} \operatorname{Re}(c_{i,p}) + j \frac{2p+\epsilon^{(r)}}{2p} \operatorname{Im}(c_{i,p}) + \frac{\pi}{2} = \pi\epsilon^{(r)}(2i+1) \quad (\text{A.18})$$

$$d_{i,p}^{(r+1)} = k_{i,p} - \left(\frac{A_p^{(r)} \sin \pi\epsilon^{(r)}}{2\pi N} \right)^2 \left[\frac{e^{-2\pi j\epsilon^{(r)}}}{\sin^2(\pi(p+\epsilon+q)/N)} - \frac{2 \cos 4\pi(i + \frac{4N-1}{4N})\epsilon^{(r)} + 2\psi}{\sin(\pi(2p+\epsilon^{(r)})/N) \sin(\pi\epsilon^{(r)}/N)} \right] \quad (\text{A.19})$$

on obtient ainsi les estimations \hat{A} , $\hat{\epsilon}$, $\hat{\psi}$ des amplitudes,
fréquences et déphasage. L'influence du spectre image
est ainsi éliminée. Il ne reste plus qu'à éliminer les
lobes latéraux, pour $q \neq p$.

$$c_{i,q} = c_{i,q} - \frac{\hat{A}}{2N} \sin \pi(p+\hat{\epsilon}-q) \left(\frac{e^{j(\hat{\psi}_i - \frac{\pi}{2})} e^{j\pi(2i + \frac{N-1}{N})(p+\hat{\epsilon}-q)}}{\sin \pi(p+\hat{\epsilon}-q)/N} + e^{-j(\hat{\psi}_i + \frac{\pi}{2})} e^{-j\pi(2i + \frac{N-1}{N})(p+\hat{\epsilon}+q)} \right) \quad (\text{A.20})$$