

SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME
D'UN DETECTEUR DE DIPOLES MAGNETIQUES
PAR LA TECHNIQUE DE SIMULATION RAPIDE

R. BLANPAIN et G. CHIRON

Laboratoire d'Electronique et de Technologie de l'Information
Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble 85 X 38041 GRENOBLE CEDEX

RESUME

Une des techniques de détection des dipôles magnétiques réalise une estimation de la DSP du signal par filtrage, pour déterminer, dans une bande de fréquence donnée, l'emplacement de son maximum.

L'observation du bruit provoque l'apparition de fausses alarmes, dont la probabilité est faible, pour des seuils forts et des bruits faibles. Son estimation à l'aide d'un estimateur du type moyennneur exige un temps très long pour obtenir un intervalle de confiance satisfaisant. L'adaptation à notre système d'une technique de simulation rapide permet de réduire considérablement le temps d'observation, en augmentant la fréquence d'apparition des fausses alarmes, par "distorsion" de la loi du processus d'entrée.

En ce qui nous concerne, nous augmentons la puissance du bruit dans la bande de fréquence analysée, tout en lui conservant son caractère gaussien. C'est ainsi que les maximum spectraux ne sont pas déplacés, mais le résultat de la comparaison à un seuil est plus souvent positif.

La mise au point de cette technique nous a conduit à étudier le degré d'indépendance des tranches de bruit, afin d'évaluer le nombre de tirages effectués.

SUMMARY

One of the techniques for magnetic dipole detection provides an estimation of the power spectral density of the signal by filtering, so as to determine the location of its maximum within a given frequency band.

As the noise becomes white, its observation triggers false alerts, but with a low probability for high thresholds and low noises. An evaluation of this probability using the averager type estimator requires considerable time to ensure a satisfactory confidence interval. The high speed simulation technique enables the duration of observation to be greatly reduced by increasing the frequency of occurrence of these false alerts. In the random drawing of the input process it privileges the signals triggering this false alert by "distorting" its law.

For our part, we increase the noise power in the frequency band being analysed, while retaining its normal distribution character. In this way, the spectral maxima are not shifted but the result of the comparison with a threshold is more often positive. The problems encountered with this technique relate mainly to assessing the degree of independance of the noise divisions when evaluating the number of draws performed.



ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME
D'UN DETECTEUR DE DIPOLES MAGNETIQUES
PAR LA TECHNIQUE DE SIMULATION RAPIDE

I. INTRODUCTION

La mesure de fréquence du signal issu d'un magnéto-mètre à résonance magnétique nucléaire, en mouvement rectiligne par rapport à un dipôle magnétique, engendre un signal particulier dit "signal dipolaire".

La détection optimale d'un tel signal exige la réalisation, d'une part, d'un système auto-adaptatif à horizon limité, utilisé comme filtre de blanchiment, et d'autre part, d'un récepteur optimal à filtrage adapté à trois dimensions, la base orthonormée de l'espace vectoriel de ces signaux "dipolaires" dépendant elle-même de paramètres inconnus à priori.

Le nombre important de paramètres ou variables aléatoires qu'il est difficile, sinon impossible de caractériser statistiquement, et le fait que les vecteurs de base dépendent de paramètres à estimer, entraînent pour ce système optimal un problème de détection estimation difficile. Ceci nous a conduit à la recherche de méthodes sous optimales plus simples à mettre en oeuvre et à caractériser leurs performances.

Le détecteur qui nous intéresse est la réalisation de l'une de ces méthodes.

II. DETECTION PAR ANALYSE SPECTRALE

Le détecteur réalise une analyse spectrale sommaire et son principe est fort simple.

Il consiste à déterminer l'emplacement du maximum de la densité spectrale énergétique, de la dérivée du signal observé. En effet, une étude théorique ([1], [2]) montre que si ce maximum est situé dans une certaine bande de fréquence, Δf , la probabilité est grande que la source de l'anomalie correspondante soit un dipôle magnétique, à une certaine distance du capteur qui se déplace à une vitesse connue.

L'organigramme de détection découle directement de ce qui précède : une batterie de filtres, et un système de détermination d'amplitudes, permettent d'obtenir des tensions proportionnelles à la racine carrée de l'énergie de la dérivée du signal, contenue dans un certain nombre de bandes de fréquence (fig.1) Si l'ensemble de ces bandes couvre un peu plus que le domaine Δf , la comparaison deux à deux des tensions obtenues, fournit l'emplacement du maximum spectral et permet une détection éventuelle.

Les filtres sont au nombre de huit. Le plus bas en fréquence est centré à 0,08 Hz et le plus haut à 1,25 Hz. Ils sont d'autant plus larges que hauts en fréquence. La largeur du filtre centré à la fréquence

f_i est $\Delta v_i = \frac{f_i}{Q}$. La même valeur de Q a été adoptée pour les huit filtres.

La figure 2 montre les variations de la probabilité de non détection β , en fonction de la distance de la sonde au dipôle, pour un rapport signal sur bruit de 0dB et un seuil donné. Cette courbe fait apparaître les qualités en détection de ce système.

Remarque : Le système a entièrement été simulé sur PLURIMAT S et toutes les simulations ont été effectuées sur ce même appareil.

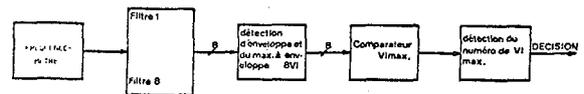
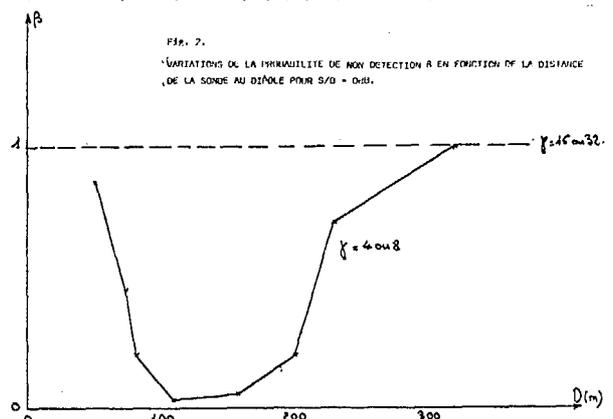
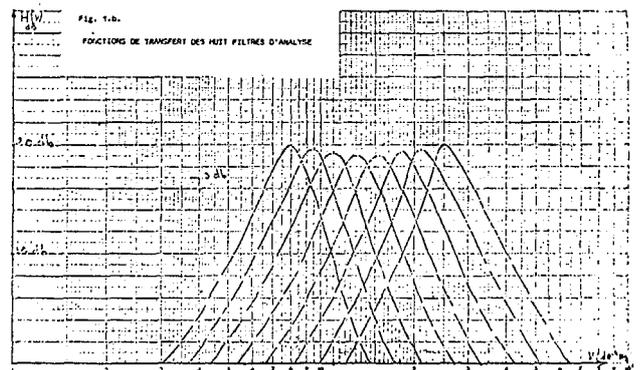


Figure 1.

Organigramme du détecteur



ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME
 D'UN DETECTEUR DE DIPOLES MAGNETIQUES
 PAR LA TECHNIQUE DE SIMULATION RAPIDE

III. LE BRUIT - STANDARDS DE BRUIT

L'analyse spectrale des bruits enregistrés, ([2], [6]) a montré que la densité spectrale du bruit supposé gaussien, pouvait être représentée par une expression analytique donnée, dont les coefficients dépendent des zones observées.

On distingue deux grands types de zones qui donnent deux standards de bruit différents (figure 3).

Il faut préciser que les problèmes concernant la stationnarité des bruits, pour l'estimation des densités spectrales, ne sont pas négligeables et ont été abordés dans [2].

Ce bruit X sera supposé ici stationnaire gaussien et centré. Il est alors possible d'en construire par simulation des tranches temporelles $x_i(t)$ formées d'échantillons $x_i(n)$. La méthode utilisée est directement issue des résultats concernant l'estimation de la densité spectrale énergétique, par transformation de Fourier des signaux, et utilisation des périodogrammes ([2], [3]).

Si $S(v)$ représente la DSP du standard de bruit retenu, alors un échantillon $X_i(vn)$ de la transformée de Fourier discrète de $x_i(n)$ peut s'écrire :

$$X_i(vn) = A_i(vn) + j B_i(vn)$$

où $A_i(vn)$ et $B_i(vn)$ sont des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et de variance de l'ordre de $\frac{S(vn)}{2}$.

Il suffit donc de tirer au hasard, un couple $[A_i(vn), B_i(vn)]$ selon sa loi de probabilité pour chaque fréquence V_n puis par FFT^{-1} d'obtenir la tranche $x_i(n)$ de bruit correspondante.

Soit X_j , une réalisation de bruit à M dimensions directement représentative du standard de bruit retenu.

Pour obtenir X_j , il faut donc tirer au hasard, un couple $[A_j(vn), B(vn)]$ pour chacune des M/2 valeurs de vn .

La construction des fonctions de répartition de A et B,

$$V(A) = \int_{-\infty}^A P_A(A) dA \quad W(B) = \int_{-\infty}^B P_B(B) dB$$

le tirage d'un couple de variables aléatoires (V,W) uniformément réparties sur]0 1[, puis le passage du couple (V,W) au couple $[A(vn), B(vn)]$ par l'intermédiaire des fonctions de répartition, permettent donc de réaliser cette opération.

Nous ne nous étendons pas ici sur les problèmes liés au choix des algorithmes de tirage du hasard des

variables aléatoires uniformément réparties.

Une étude complète concernant la période de ces algorithmes et l'indépendance des échantillons a été réalisée ([4]).

Il en résulte que la corrélation entre deux réalisations X_j est très faible.

IV. ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME α

IV.1. Choix de l'estimateur

L'estimateur utilisé pour la probabilité de fausse alarme α est du type moyennneur :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M Z_i$$

où Z_i est une épreuve de la variable aléatoire discrète Z, qui vaut 1 si une fausse-alarme survient et reste nulle sinon.

Dans cette expression, M représente le nombre de tirage indépendants de l'entrée.

Pour un intervalle de confiance (η, k) ; le nombre de simulations nécessaires est tel que :

$$N \geq \frac{1}{\eta} \frac{1}{k^2} \frac{\sigma_Z^2}{\alpha^2}$$

où σ_Z^2 est la variance de la variable aléatoire Z et $\alpha = E(\hat{\alpha}) = E(Z_i)$

En ce qui nous concerne :

$$\sigma_Z^2 = \alpha(1 - \alpha)$$

$$\frac{\sigma_{\hat{\alpha}}^2}{[E(\hat{\alpha})]^2} = \frac{1-\alpha}{N\alpha} \approx \frac{1}{N\alpha} \text{ si } \alpha \ll 1$$

Dans cette expression, $N\alpha$ représente le nombre de fausses alarmes enregistrées, et pour un intervalle de confiance (η, k) , nous devons réaliser :

$$N \geq \frac{1}{\eta k^2 \alpha} \text{ si } \alpha \ll 1$$

D'où la nécessité de la simulation rapide, si de plus, un tirage dure un temps assez long, les signaux ayant une faible bande passante B comme c'est notre cas ($B < 1$ Hz).

IV.2. Simulation rapide

Pour la réalisation de cette simulation rapide, nous nous sommes inspirés de [5].



ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME
D'UN DETECTEUR DE DIPOLES MAGNETIQUES
PAR LA TECHNIQUE DE SIMULATION RAPIDE

Comme le montrent les expressions du paragraphe précédent, une réduction de la variance σ^2_Z de la variable aléatoire Z provoque une réduction du nombre d'essais N dans le rapport :

$$\lambda = \frac{\sigma^2_Z}{\alpha(1-\alpha)} \# \frac{\sigma^2_Z}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \ll 1 \quad ([5])$$

D'autre part, l'estimateur $\hat{\alpha}$ est optimal parce que non biaisé et efficace, ainsi aucune réduction de variance ne peut être obtenue sans une modification de la loi de probabilité du processus simulé ([5] et [7]).

D'après [5], il faut concentrer la distribution du processus simulé X vers les valeurs pour lesquelles se produit effectivement l'évènement "fausse-alarme" en sortie du détecteur. Soit B l'ensemble de ces valeurs. La proposition précédente revient à dire qu'il faut chercher un autre processus aléatoire d'entrée U , dont la densité de probabilité q soit plus importante sur B que la densité de probabilité p réelle de l'observation.

Alors le nouvel estimateur $\hat{\alpha}'$ de la probabilité de fausse-alarme α est :

$$\hat{\alpha}' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Lambda(U_i) Z_i \quad \text{avec } Z_i = Z(U_i)$$

$\Lambda(U_i)$ est la dérivée de Radon-Nikodym de la loi F_p relativement à la loi F_q ([5]).

$\Lambda(U_i)$ peut s'écrire :

$$\Lambda(U_i) = \frac{p(U_i)}{q(U_i)}$$

Nous noterons ρ_i cette expression :

$$\text{Alors :} \quad \hat{\alpha}' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z'_i$$

$$\text{avec : } Z'_i = \rho_i Z_i$$

Z'_i est une réalisation de la variable aléatoire $Z'(U)$.

On démontre facilement ([5]) que $\hat{\alpha}'$ est un estimateur non biaisé de α

$$E[Z'] = \int_{\text{ensemble } \zeta} Z'(U) q(U) dU = \int_{\zeta} Z(U) p(U) dU = E(Z) = \alpha$$

des épreuves

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } E(Z'^2) &= \int_B Z'^2 [U] q [U] dU \\ &= \int_B \frac{p^2(U)}{q(U)} Z^2(U) dU \end{aligned}$$

Or, $q(U) > p(U)$ pour $U \in B$

$$\text{Donc } E(Z'^2) < \int_B Z^2(U) p(U) dU = E(Z^2)$$

On a donc bien $\sigma^2_{Z'} < \sigma^2_Z$

IV.3. Définition du nombre de tirages indépendants pour le système étudié. Estimateur définitif

IV.3.a) Analyse du problème

Dans tout ce que nous venons de dire, le temps n'intervient pas. Or, en pratique, nous avons vu qu'une tranche X_j de bruit de durée T_j est engendrée à partir d'un standard de DSP, et la réponse du détecteur à cette tranche est alors observée.

Au bout de ce temps T , nous avons enregistré en simulation directe par exemple, un nombre n_j de fausses alarmes. Comment lier les expressions développées plus haut à ces deux grandeurs concrètes T et n_j ? Le problème est délicat et dépend directement d'une notion d'indépendance de tranches de bruit de durée T_j .

Dans la construction de la transformée de Fourier discrète $X(\nu_n)$ de $x(n)$, le pas $\Delta\nu$ choisi est de $\frac{1}{512}$ Hz, soit environ $2 \cdot 10^{-3}$ Hz. Ce choix est convenable, il permet de fournir au système de filtres des tranches de signaux de durée supérieure au temps de corrélation des échantillons $x(n)$ d'entrée. En effet, pour le filtre le plus étroit, ce temps de corrélation est de l'ordre de 50 secondes puisque la largeur du filtre est :

$$\Delta\nu_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Hz.}$$

Il aurait évidemment été impossible d'analyser un tel signal à l'aide de filtres de largeur inférieure à $\Delta\nu$.

Le problème qui nous préoccupe alors est d'évaluer le nombre de tirages indépendants M effectués lorsqu'une tranche de bruit x_j de durée T a provoqué n_j fausses alarmes.

La difficulté réside dans le fait que les filtres sont de largeur différente (et d'autant plus grande que le filtre est plus haut en fréquence)

$$\Delta\nu_i \# \frac{f_i}{Q}$$

En général, pour un filtre de largeur $\Delta\nu_i$, on considère que la durée de l'intégration est de l'ordre de $T_i = \frac{1}{\Delta\nu_i}$

Si l'on appelle $P(i)$ la probabilité qu'un maximum spectral se trouve à une fréquence comprise dans la bande de fréquence du filtre numéro i ($i = 2$ à 7) et si le bruit est blanc (voir remarque ci-dessous)

$$\text{Alors :} \quad P(i) = P(j) = P_V(i, j) \in [(2,2), (7,7)]$$

Par ailleurs, pour une simulation de durée T , le nombre de tranches indépendantes M_i vues par le filtre numéro i est :

$$M_i = \frac{T}{T_i} = T \Delta\nu_i = \frac{T f_i}{Q}$$

ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME
D'UN DETECTEUR DE DIPOLES MAGNETIQUES
PAR LA TECHNIQUE DE SIMULATION RAPIDE

Le nombre de fausses alarmes dues au filtre numéro i est dans ces conditions :

$$m_i = M_i P_i(i) = M_i P_i$$

De plus, pour deux tirages indépendants, l'évènement "il y a fausse alarme sur le filtre i" est indépendant de l'évènement "il y a fausse alarme sur le filtre j". Par conséquent, on peut écrire :

$$\alpha = \sum_{i=2}^7 p(i) = 6P$$

Cette expression représente la limite supérieure de la probabilité de fausse alarme en l'absence de seuil.

Remarque : Un des standards de bruit catalogué est grossièrement en $1/v^2$ dans la bande d'analyse. Ainsi après dérivation, le bruit est pratiquement blanc dans cette bande. Nous n'étudierons pas le cas où le bruit n'est pas blanc dans la bande d'analyse.

IV.3.b) Estimateur définitif - Indépendance des Tirages

Dans le cas de la simulation directe, nous avons :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{n_j}{M}$$

et dans le cas de la simulation rapide :

$$\hat{\alpha}' = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \rho_j \frac{n'_j}{M}$$

M est le nombre de tirages indépendants sur une durée T d'observation de l'entrée $x_j(n)$, n_j ou n'_j le nombre de fausses alarmes observées pendant ce temps T.

N représente ici, le nombre de tranches de bruit de durée T analysées au cours de la simulation.

Pendant cette simulation, nous avons conc effectué un nombre $N \cdot M$ de tirages indépendants.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, un estimateur de la probabilité de fausse alarme α peut s'écrire :

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=2}^7 \hat{P}(i) \text{ où } \hat{P}(i) \text{ est l'estimateur de } P(i)$$

$$\hat{P}(i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{m_{ij}}{M_i}$$

m_{ij} étant le nombre de fausses alarmes dues au filtre i pendant la durée T de la jème tranche de bruit et M_i ayant la définition donnée plus haut.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=2}^7 \frac{m_{ij}}{M_i} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=2}^7 \frac{Q}{T f_i} m_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

En rapprochant (1) et (2) et en notant que :

$$n_j = \sum_{i=2}^7 m_{ij}$$

et
$$m_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N m_{ij}$$

on a
$$\frac{1}{M} \sum_{i=2}^7 m_i = \frac{1}{M} \sum_{i=2}^7 \frac{m_i Q}{T f_i}$$

or
$$m_i = M_i P$$

Il reste
$$M = \frac{1}{6} \sum_{i=2}^7 \frac{f_i}{Q}, T = BT$$

avec
$$B = \frac{1}{6} \sum_{i=2}^7 \Delta v_i$$
 est en fait la véritable moyenne des bandes équivalentes.

Nous avons
$$B = 0,042 \text{ Hz}$$

$$BT = M \approx 22$$

Remarque : Pour une tranche de durée T = 512 secondes, nous avons donc 22 tranches élémentaires indépendantes pour le système et de durée égale à 23 secondes. Nous verrons plus loin le lien entre ce résultat et la simulation réelle.

IV.4. Calcul des ρ_j

Nous avons vu que la simulation rapide nécessite une modification de la loi de probabilité du processus d'entrée simulé. En ce qui nous concerne, étant donné que nous recherchons des maxima de la densité spectrale de puissance dans la bande $[v_1, v_2]$, il est assez logique de penser qu'une augmentation de cette densité spectrale de puissance dans la bande $[v_1, v_2]$ produira plus souvent l'évènement "fausse alarme" et ceci d'autant mieux que le bruit est plus blanc dans cette bande.

Or, ce dernier est quasi blanc dans la bande $[v_1, v_2]$. Le nouveau processus U sera donc toujours gaussien, mais de variance plus grande. Ce résultat est obtenu en prenant comme nouveau standard de bruit

$$S'(v) = k^2 S(v) \text{ avec } k^2 > 1$$

De ce fait, il n'y a pas de modification de l'allure de la DSP mais pour le détecteur qui réalise une comparaison à un seuil j, le résultat de cette comparaison sera plus souvent positif dans le cas de la simulation rapide. La variable aléatoire Z_i est devenue dans la simulation rapide, une variable aléatoire Z'_i qui prend plus souvent la valeur 1 que Z_i .



ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME
D'UN DETECTEUR DE DIPOLES MAGNETIQUES
PAR LA TECHNIQUE DE SIMULATION RAPIDE

Il reste maintenant à calculer les coefficients ρ_j permettant de retrouver la probabilité de fausse alarme à partir du nombre de fausses alarmes.

Nous pouvons considérer que chaque tranche de bruit $x_{ij}(n)$ de durée T_i définie précédemment a été engendrée à partir de son spectre

$$X_j(v) = A_j(v) + iB_j(v)$$

Mais ce dernier se présente alors sous une forme discrète à huit échantillons, à des fréquences f_i correspondant respectivement aux fréquences centrales f_i des filtres ($i=1$ à 8).

En effet, il ne serait pas correct de considérer plus de huit échantillons, puisqu'il n'y aurait plus alors indépendance entre eux, après filtrage.

En fait, la recherche du maximum maximum ne s'effectue que sur les six filtres du centre ($i=2$ à 7) mais cette recherche nécessite la connaissance des réponses des deux filtres voisins de celui où se trouve le maximum.

Nous avons donc effectivement besoin de huit échantillons.

Ainsi, pour la simulation, nous engendrons une réalisation $X_j(v)$ de bruit directement représentative du standard de bruit retenu. Si l'on suppose que le système de filtrage fonctionne de façon idéale, nous pouvons considérer le processus d'entrée \underline{X} comme une variable aléatoire complexe gaussienne. C'est à dire que les couples "partie réelle a_i , partie imaginaire b_i " sont des variables aléatoires gaussiennes dans leur ensemble.

Par conséquent :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix} \text{ est une variable aléatoire à 16 dimensions (L = 16)}$$

$$\text{avec } \begin{cases} x_i = a_i & i = 1 \text{ à } 8 \\ x_{i+8} = b_i \end{cases}$$

La densité de probabilité du processus \underline{X} s'écrit

$$p(\underline{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} \|\underline{\Gamma}\|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{X}^T \underline{\Gamma}^{-1} \underline{X})\right\}$$

La matrice de covariance $\underline{\Gamma}$ est diagonale puisque les échantillons x_i sont indépendants.

D'après les notations ci-dessus la matrice s'écrit:

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} E(a_1^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E(a_{1/2}^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E(b_1^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E(b_{1/2}^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E(a_1^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E(a_{1/2}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E(b_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E(b_{1/2}^2) \end{bmatrix}$$

or, par construction,

$$E(a_1^2) = E(b_1^2) = \frac{S(v_1)\Delta v_1}{2}$$

En ce qui concerne la simulation rapide, il faut exprimer la quantité $\rho_j = \frac{p(\underline{U}_j)}{q(\underline{U}_j)}$

$$\text{avec } q(\underline{U}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} \|\underline{\Gamma}'\|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{U}^T \underline{\Gamma}'^{-1} \underline{U})\right\}$$

La matrice de covariance $\underline{\Gamma}'$ est obtenue de la même façon que $\underline{\Gamma}$ en remplaçant $E(a_i^2)$ et $E(b_i^2)$ respectivement par $E(a_i'^2)$ et $E(b_i'^2)$

$$\text{avec } E(a_i'^2) = E(b_i'^2) = \frac{S'(v_i)\Delta v_i}{2} = \frac{k^2 S(v_i)\Delta v_i}{2}$$

$$\text{donc } \rho_j = \left(\frac{\|\underline{\Gamma}'\|}{\|\underline{\Gamma}\|}\right)^{L/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(\underline{U}_j^T (\underline{\Gamma}'^{-1} - \underline{\Gamma}^{-1}) \underline{U}_j)\right\}$$

$$\text{avec } \|\underline{\Gamma}\| = \prod_{i=1}^{L/2} E(a_i^2) E(b_i^2) = \prod_{i=1}^{L/2} \frac{S^2(v_i)\Delta^2(v_i)}{4}$$

$$\text{de même } \|\underline{\Gamma}'\| = \prod_{i=1}^{L/2} \frac{S'^2(v_i)\Delta^2(v_i)}{4}$$

$$\text{donc } \left(\frac{\|\underline{\Gamma}'\|}{\|\underline{\Gamma}\|}\right)^{L/2} = (k^2)^{L/2}$$

$$\text{d'autre part } \underline{U}_j^T \underline{\Gamma}'^{-1} \underline{U}_j = \sum_{i=1}^{L/2} \frac{2(a_{ij}^2 + b_{ij}^2)}{S'(v_i)\Delta v_i} = \sum_{i=1}^{L/2} \frac{S'_j(v_i)}{S(v_i)}$$

$$\text{de même } \underline{U}_j^T \underline{\Gamma}^{-1} \underline{U}_j = \sum_{i=1}^{L/2} \frac{S'_j(v_i)}{S(v_i)}$$

$$\text{Il vient alors } \rho_j = (k^2)^{L/2} \exp\left\{\sum_{i=1}^{L/2} \frac{S'_j(v_i)}{S(v_i)} (1-k^2)\right\}$$

$$\text{finalement } \rho_j = (k^2)^{L/2} \exp\left\{(1-k^2) \sum_{i=1}^{L/2} \frac{S'_j(v_i)}{S(v_i)}\right\}$$

$$E[S'_j(v_i)] = S'(v_i)$$

Pour $k^2 = 1$ (cas de la simulation directe), on vérifie que $\rho_j = 1 \forall j$.

La figure 4 représente les variations de :

$$\rho = (k^2)^{L/2} \exp\left\{\frac{L}{2}(1-k^2)\right\} \quad L = 16$$

en fonction de k^2

La variable aléatoire $A_{ji} = \frac{S'_j(v_i)}{S(v_i)}$ est une variable aléatoire de moyenne et de variance unité, et ceci $\forall i$
 $E(A_{ji}) = E(A_{ji}) = 1$; $\text{Var}(A_{ji}) = \text{Var}(A_{ji}) = 1$



ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME
D'UN DETECTEUR DE DIPOLES MAGNETIQUES
PAR LA TECHNIQUE DE SIMULATION RAPIDE

Puisque les échantillons $S'_j(v_i)$ sont indépendants pour un même j et des i différents, si L est grand, l'expression

$$A_j = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^{L/2} A_{ji}$$

peut être considérée comme un estimateur de la moyenne de la variable aléatoire A_{ji} .

$$A_j = E(A_j) + A'_j$$

avec $E(A_j) = 1$ et $\sigma^2(A'_j) = \frac{1}{L/2}$

Si L est grand, on peut effectuer un développement limité de $\exp(A'_j)$ du voisinage de zéro et écrire

$$\rho_j = (k^2)^{L/2} \exp\left\{(1 - k^2)\frac{L}{2}\right\} (1 + (1 - k^2)A'_j)$$

donc
$$E(\rho_j) = (k^2)^{L/2} \exp\left\{(1 - k^2)\frac{L}{2}\right\} = \rho$$

En ce qui nous concerne, L n'est pas très grand ($L/2 = 8$) et $\sigma^2(A'_j) = 0,125$. Mais nous obtenons une bonne approximation de $E(\rho_j)$ en considérant possible, le développement limité.

IV.5. Résultats

Dans le cas du standard faible bruit, il a fallu effectivement faire appel à la simulation rapide même pour le plus petit seuil. Nous avons tout de même voulu auparavant vérifier l'effet de ce procédé sur l'estimation de la probabilité de fausse alarme α . Pour ce faire, nous l'avons appliqué à l'estimation de α pour le seuil le plus élevé, dans le cas des bruits forts, en faisant varier le coefficient multiplicatif k^2 à partir de $k^2 = 1$. Il faut préciser qu'il était possible dans ce cas, étant donné la valeur relativement élevée de la probabilité de fausse alarme, (fréquence de fausse alarme de l'ordre de $10^{-3} s^{-1}$) d'effectuer une simulation directe ($k^2 = 1$) de durée raisonnable. La figure 5 montre l'évolution de la probabilité de fausse alarme, en fonction de la fréquence de ces fausses alarmes, augmentée par l'effet de la simulation rapide.

Pour des valeurs de k^2 telle que la fréquence de fausse alarme reste inférieure à $410^{-3} s^{-1}$, l'estimateur $\hat{\alpha}$ n'est pas biaisé et pour un même intervalle de confiance (η, k) , le résultat est obtenu environ 4 fois plus vite pour k^2 maximum. Dans le cas des bruits faibles, des gains beaucoup plus importants sont obtenus (fig.6). On constate par contre, un effet de "saturation" à partir d'une fréquence de fausse alarme θ de $4.10^{-3} s^{-1}$. Tout se passe au dessus de cette limite, comme si le détecteur ne pouvait pas prendre en compte la totalité des fausses alarmes. L'explication est simple. Le calcul des ρ_j pour la simulation a été fait d'une façon théorique en supposant le système de filtrage idéal, ce qui nous a permis de définir un temps moyen d'analyse du signal pour le système égal à $\frac{1}{B}$,

et de considérer que deux échantillons de sortie distants de $\frac{1}{B}$ sont indépendants. Mais si pour l'un des filtres apparaît une sortie donnant un échantillon maximum important, et si après le temps $\frac{1}{B}$, l'échantillon suivant également maximum est beaucoup plus faible, ce dernier, bien qu'indépendant, est complètement noyé dans la réponse résiduelle de l'échantillon précédent et n'est pas détecté. En fait, il faut attendre un temps de l'ordre de $10/B$ pour que la réponse du système soit suffisamment faible (inférieure à son bruit propre).

or, $\frac{10}{B} \approx 220 s \Rightarrow \theta_{max} \approx 410^{-3} s^{-1}$.

La figure 6 montre les résultats obtenus en fonction du seuil γ pour la probabilité de fausse alarme α et la fréquence de fausse alarme θ , pour le standard faible bruit.

La première méthode ($k_i = k \forall i$) a été utilisée. Le nombre N de tirages est pour chaque simulation de 256. La fréquence de fausses alarmes est augmentée jusqu'à sa valeur maximale ($\theta \approx 410^{-3} s^{-1}$), pour chaque estimation, en ajustant la valeur de k^2 . L'intervalle de confiance obtenu est donc toujours le même $[(\eta, k) = (0,05; 0,1)]$

Remarque :

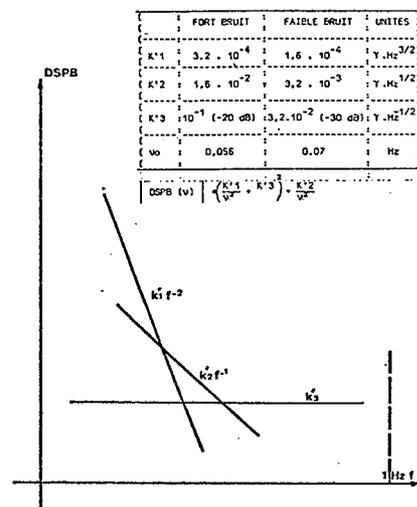
Dans le cas où le standard de bruit est très différent d'un bruit blanc, dans la bande $[v_1; v_2]$, la simulation du processus U à partir d'un bruit blanc dans cette bande conduit aux gains λ les plus importants pour une même puissance de bruit.

Dans ce cas on a :

$$S(v_i) = k \cdot k_i \cdot S(v_i) \text{ avec } S(v_i) = \text{cste} = N_0 v_i$$

Alors :
$$\rho_j = k_i \prod_{i=1}^{L/2} (k_i) \cdot \exp\left\{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{L/2} S'_j(v_i) \cdot (1 - k \cdot k_i)\right\}$$

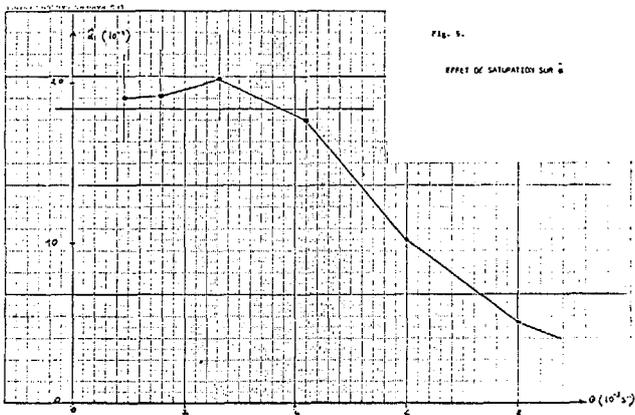
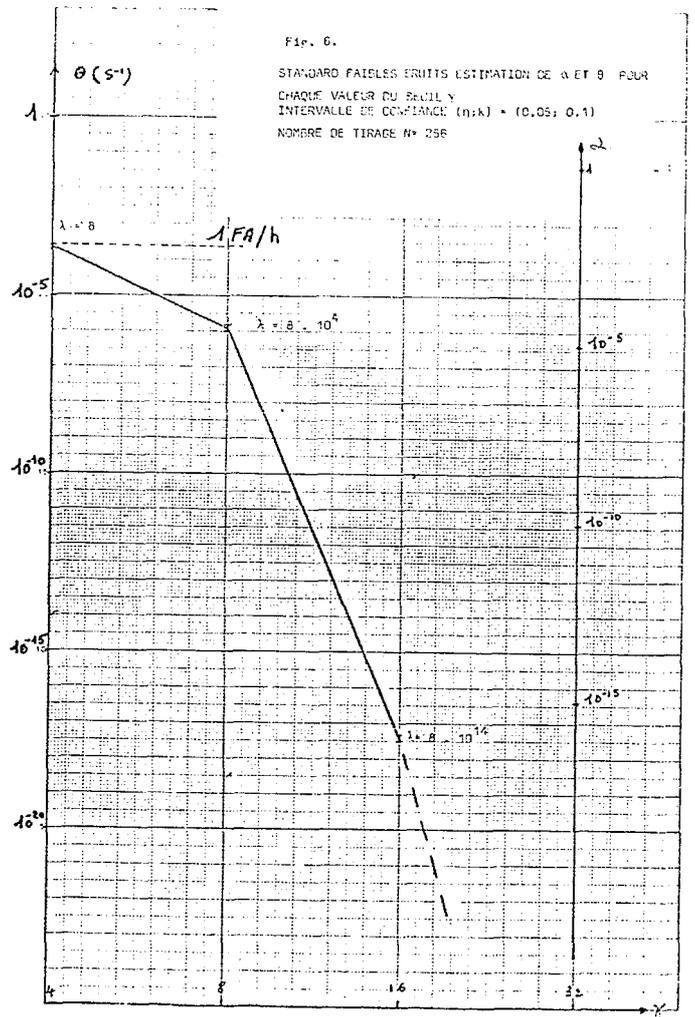
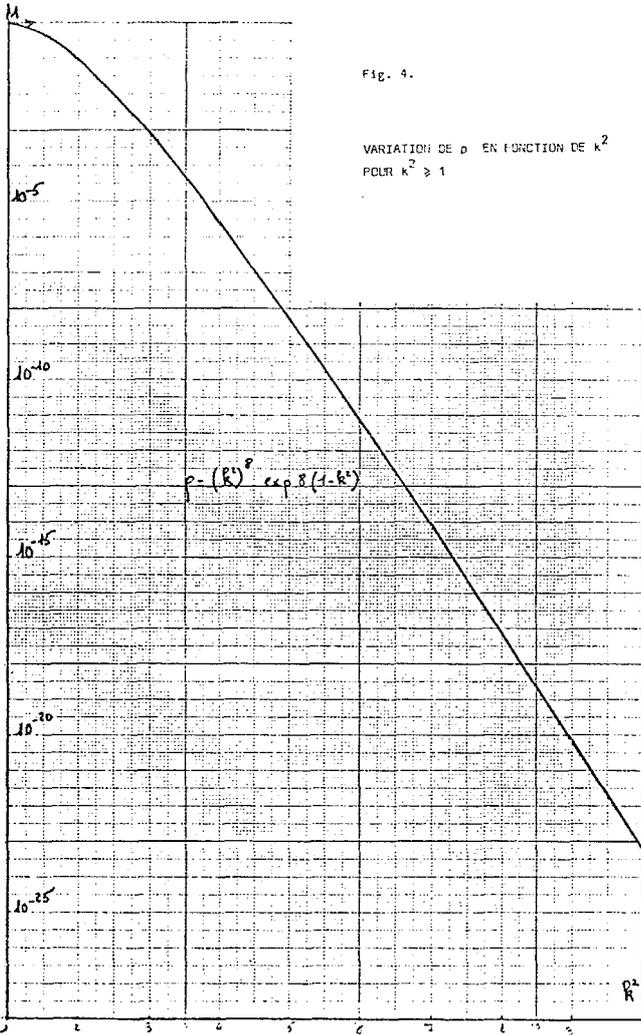
Fig. 3. STANDARDS DE BRUIT



Géométrie standard de bruit.



ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE FAUSSE-ALARME
 D'UN DETECTEUR DE DIPOLES MAGNETIQUES
 PAR LA TECHNIQUE DE SIMULATION RAPIDE



REFERENCES

- [1] G. CHIRON et al Note technique n° 77336.LETI
- [2] R. BLANPAIN "Caractérisation des signaux issus d'un magnétomètre à détection" Rapport DEA. Traitement du signal 1977. INPG
- [3] C.V. SCHOONEVELD P.J.A. PRINSEN Physics Laborator. MORO. The Mague, the metherlands.
- [4] R. BLANPAIN G. CHIRON Note technique n° 78.1043. GC/CT . LETI
- [5] O. MACCHI JP. CALISTE Simulation Rapide. Revue du CETHEDC 2ème trimestre 1975.
- [6] JP. LETOUZET Note Crouzet. N° 26/2606/JPL/I.T.
- [7] H. CRAMER "Mathematical methods of Statistics" Princeton University Press 1957.