

SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

LES METHODES ASYMPTOTIQUES "HAUTES FREQUENCES"
EN ACOUSTIQUE SOUS-MARINE

Bernard POIREE

CETHEDEC 26, Boulevard VICTOR 75996 PARIS - ARMEES

RESUME

Nous présentons les principales méthodes d'uniformisation de la solution de l'acoustique géométrique utilisées en acoustique sous-marine.

SUMMARY

Some generalizations of the method of geometrical acoustics are given with applications to underwater acoustics.

PLAN

- I - Introduction
- II - Notations et hypothèses
- III - Les outils
- IV - La méthode de l'acoustique géométrique classique
- V - Les généralisations à l'aide de développements asymptotiques directs
- VI - Les méthodes intégrales en milieu illimité
- VII - Les méthodes intégrales en milieu stratifié limité
- VIII - La théorie géométrique de la diffraction
- IX - La méthode de l'équation parabolique
- X - Conclusion
- XI - Bibliographie



I - INTRODUCTION :

Le problème du calcul du champ sonore en acoustique sous-marine consiste à trouver la solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + K_0^2 n^2(\vec{x}) u = 0$ avec les conditions aux limites (CL) appropriées à la situation à traiter.

Malheureusement, sauf pour des cas très particuliers de bathycélérimétrie $n(\vec{x})$, cette équation n'admet pas de solution exacte. Qui plus est, quand on a la possibilité d'obtenir une solution exacte, celle-ci est en général trop compliquée pour les applications. Il est donc nécessaire de faire appel à des méthodes de résolution approchées pour obtenir des solutions faciles à interpréter et à manipuler.

Parmi ces méthodes approchées figurent les méthodes asymptotiques "hautes fréquences" dont nous nous proposons de présenter brièvement dans les chapitres suivants les hypothèses, les principes et quelques résultats des méthodes les plus employées.

La puissance des méthodes asymptotiques hautes fréquences réside dans le fait qu'en pratique elles s'appliquent aussi avec succès à la propagation très basse fréquence. En acoustique sous-marine, suivant les situations, certaines méthodes peuvent être employées jusqu'à des fréquences de quelques Hz ou quelques dizaines de Hz.

Une technique pour valider les méthodes asymptotiques est de comparer le développement asymptotique trouvé, au développement asymptotique de la solution exacte d'un problème plus simple à résoudre et dont les données diffèrent peu du premier, problème dit canonique. Cette technique demande de connaître le comportement asymptotique des fonctions spéciales de la physique mathématique. Elle permet aussi de donner à partir du comportement asymptotique de la solution exacte une idée de la forme du développement asymptotique à chercher (tableau 1).

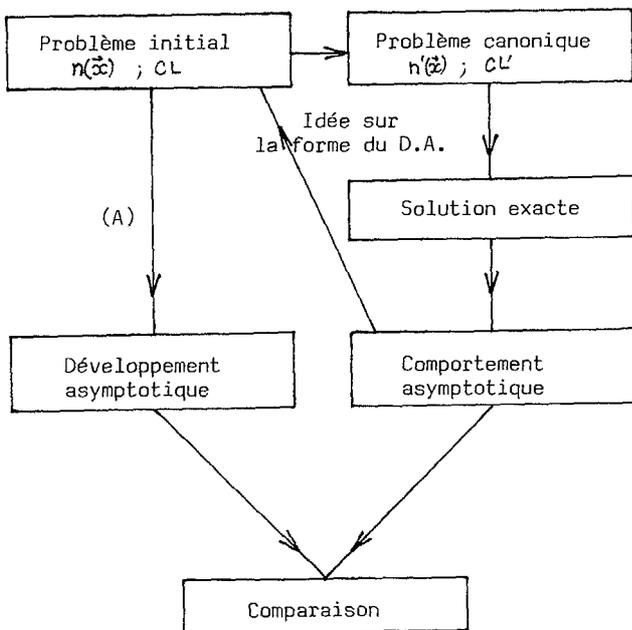


Tableau 1 : Principe de la recherche des développements asymptotiques de l'équation de Helmholtz.

Les méthodes asymptotiques s'appliquent soit directement à partir de l'équation de Helmholtz et l'on utilise principalement les techniques de développements asymptotiques raccordés ou la méthode des échelles multiples, soit à partir de représentations intégrales de la solution et l'on utilise principalement la méthode de la phase stationnaire ou ses variantes (tableau 2).

Dans le cas de l'équation de Helmholtz, elles conduisent à la solution de l'acoustique géométrique classique qui fait intervenir le concept de rayons le long desquels l'amplitude et la phase varient indépendamment des rayons voisins et qui admet des zones de singularité c'est à dire des zones dans lesquelles le champ de l'acoustique géométrique s'écarte beaucoup du champ exact (caustiques, zones d'ombre, frontières optiques, etc...).

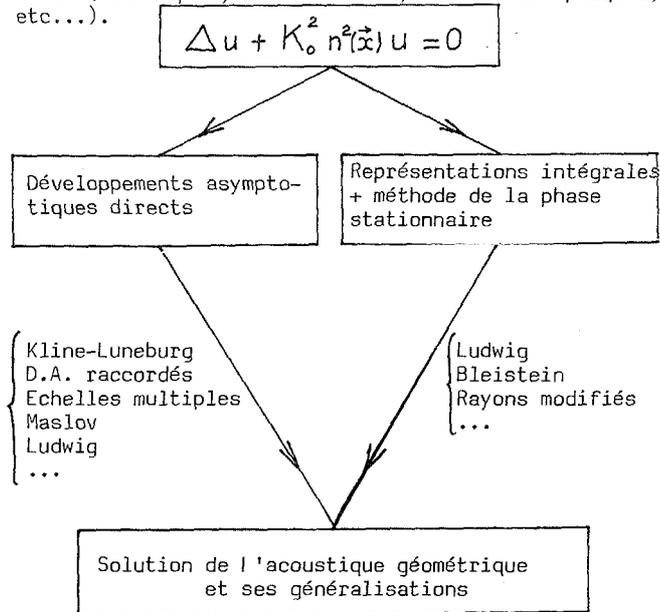


Tableau 2 : La solution de l'acoustique géométrique classique et ses généralisations, ce tableau explicite la branche (A) du tableau 1.

Les dimensions spatiales de ces zones sont des fonctions croissantes de la longueur d'onde et sont donc d'autant plus importantes que la fréquence diminue.

En acoustique sous-marine où l'on utilise jusqu'à des fréquences de quelques dizaines de Hz (longueurs d'onde de plusieurs dizaines de mètres), ces zones de non validité de l'acoustique géométrique classique sont étendues.

Il est alors intéressant d'améliorer les techniques qui aboutissent à la solution de l'acoustique géométrique classique afin de décrire le champ de manière plus précise dans les zones de singularité quand on descend en fréquence. Pour cela il faut prendre en compte l'interaction entre deux rayons ou ce qui revient au même, il ne faut plus négliger les termes de diffraction transversale (et longitudinale) c'est à dire les gradients transversaux (et longitudinaux) du champ.

Nous allons donner différentes méthodes d'uniformisation de la solution de l'acoustique géométrique classique qui peuvent aussi s'intituler généralisations de l'acoustique géométrique classique ou méthodes asymptotiques de la diffraction.

Certaines de ces méthodes seront encore singulières dans certaines régions, mais insistons sur le fait que ces singularités sont inhérentes à la méthode de recherche des solutions et non au phénomène de propagation décrit par l'équation de Helmholtz.

Ce travail continue notre précédent exposé [1] dans lequel nous avons principalement présenté des méthodes pour la propagation à une dimension. Il s'inspire beaucoup des articles de Monsieur SALTIEL [2], [3] et [4]. Des compléments généraux peuvent être obtenus dans USLENGHI [5] (317 références) et BOROVIKOV et KINBER [6] (199 références).

Une bibliographie non exhaustive, ne donnant, dans la mesure du possible, que les dernières références sur un sujet précis, doit permettre au lecteur d'approfondir la question qui l'intéresse en remontant les références.



II - NOTATIONS ET HYPOTHESES :

Soit λ_0 la longueur d'onde de référence, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ le nombre d'onde correspondant, $c(\vec{x})$ la célérité du son, c_0 la célérité de référence, Λ la longueur d'inhomogénéité du milieu en dehors des obstacles, μ une grandeur liée au champ acoustique.

Nous adimensionnalisons les distances par Λ , c'est à dire que les coordonnées \vec{x} sans dimension se déduisent de \vec{x}^* avec dimension par $\vec{x} = \vec{x}^*/\Lambda$.

L'équation à résoudre est l'équation de Helmholtz :

(1) $\Delta u + K_0^2 n^2(\vec{x}) u = 0$ quand $K_0^2 \rightarrow \infty$, avec les conditions aux limites et la condition de rayonnement de Sommerfeld.

$K_0 = k_0 \Lambda = 2\pi \Lambda / \lambda_0$; $n(\vec{x}) = c_0 / c(\vec{x})$, $\lambda_0, k_0, c_0, c(\vec{x}), \Lambda, K_0, n(\vec{x})$ sont des grandeurs réelles.

L'hypothèse $K_0 \rightarrow \infty$ signifie que nous sommes dans la situation haute fréquence et faible inhomogénéité.

L'équation (1) est obtenue à partir des équations de la mécanique des fluides après beaucoup d'approximations. Cependant nous la supposons décrire parfaitement le phénomène que nous étudions c'est à dire la propagation d'une perturbation acoustique harmonique dans un milieu certain, lentement variable dans l'espace, indépendant du temps, linéaire, isotrope, non dissipatif et non dispersif.

III - LES OUTILS :

La solution de l'acoustique géométrique classique et la plupart de ses généralisations sont obtenues à partir soit des techniques de développements asymptotiques (D.A.), soit de la technique de la phase stationnaire ou ses généralisations. Nous présentons ci-dessous brièvement les points saillants de chacune de ces techniques.

III - 1. Les développements asymptotiques [7], [8], [9] :

III - 1.1. Développement asymptotique classique :

Soit $u_N(x, \epsilon)$ le développement asymptotique (D.A.) de $u(x, \epsilon)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ suivant les fonctions de jauge ϵ^n :

$$(2) \quad u(x, \epsilon) \sim u_N(x, \epsilon) = \sum_{n=0}^N \epsilon^n u_n(x).$$

En général, ce D.A. n'est pas une approximation de u sur tout le domaine de variation de x . On dit alors qu'il est non uniforme. Pour étendre le domaine de validité d'un tel D.A., on cherche $u_n(x)$ sous la forme $u_n(x, \epsilon)$ et u s'écrit :

$$(3) \quad u(x, \epsilon) \sim u_N(x, \epsilon) = \sum_{n=0}^N \epsilon^n u_n(x, \epsilon).$$

C'est ce que l'on fait dans la technique des échelles multiples et la technique des D.A. raccordés, techniques de D.A. qui sont utilisées pour l'uniformisation de la solution de l'acoustique géométrique classique.

III - 1.2. La méthode des échelles multiples [8], [9] :

On cherche u sous la forme :

$$(4) \quad u(x, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^N \epsilon^n \tilde{u}_n(X, \epsilon x)$$

avec

$$(5) \quad \frac{dX}{dx} = w_0(\epsilon x) + \epsilon w_1(\epsilon x) + \dots$$

où les \tilde{u}_n sont des fonctions des deux variables X et ϵx supposées indépendantes. Les \tilde{u}_n et les w_i sont d'ordre 1. X est la variable rapide et ϵx la variable lente ; elles permettent de décrire la solution $u(x, \epsilon)$ sous la forme d'une variation rapide et d'une variation lente. Pour obtenir les \tilde{u}_n et les w_i il manque des équations qui sont trouvées en évitant les termes séculaires (termes qui croissent indéfiniment).

Si le D.A. direct (2) est valable dans le domaine $x = O(1)$, généralement le D.A. (4) est valable dans le domaine $x = O(\epsilon^{-1})$.

III - 1.3. La méthode des développements asymptotiques raccordés [8], [9] :

Supposons maintenant que $x=0$ soit le point de non uniformité du D.A. $\tilde{u}(x, \epsilon)$ en ϵ de $u(x, \epsilon)$ c'est à dire que quand x et ϵ tendent simultanément vers 0, le D.A. \tilde{u} ne représente plus la fonction u .

La méthode d'uniformisation par D.A. raccordés consiste à :

1. Rechercher l'épaisseur de la zone de non validité, par exemple à l'aide du principe de moindre dégénérescence qui consiste à prendre en compte les termes qui ont des effets du même ordre de grandeur. C'est l'épaisseur de la couche limite en mécanique des fluides, de l'effet de peau dans les conducteurs électriques, de la caustique en optique.
2. Rechercher dans la couche limite un D.A. \tilde{u} de u à l'aide d'une nouvelle variable indépendante \tilde{x} qui reste d'ordre 1 dans ce domaine. Ce D.A. s'appelle D.A. intérieur par opposition au précédent, que l'on nomme extérieur.
3. Raccorder les 2 D.A. dans la zone commune de validité des D.A. intérieur et extérieur écrits en fonction d'une nouvelle variable x^* dite variable intermédiaire pour obtenir un D.A. intermédiaire u^* .
4. Ecrire le D.A. uniforme \hat{u} :

$$(6) \quad \hat{u} = \tilde{u}(\tilde{x}) + \bar{u}(x) - u^*(x^*)$$

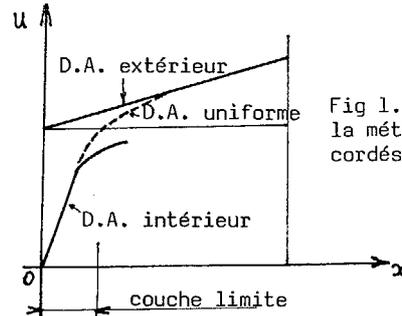


Fig 1. Illustration de la méthode des D.A. raccordés

III - 2. La méthode de la phase stationnaire [10], [11] :

La méthode la plus utilisée pour évaluer le comportement asymptotique des intégrales oscillantes est la méthode de la phase stationnaire et ses variantes dont nous présentons quelques idées générales.

Soit l'intégrale $I(K_0)$ à évaluer quand $K_0 \rightarrow \infty$:

$$(7) \quad I(K_0) = \int_{\gamma} g(F) e^{iK_0 f(F)} dF$$

f et g sont des fonctions réelles de la variable réelle F .

Intuitivement la solution peut-être trouvée de la manière suivante : quand $K_0 \rightarrow \infty$, la phase $K_0 f(F)$ varie rapidement en fonction de F . Il en est de même de l'exponentielle $\exp[iK_0 f(F)]$, de telle sorte que si $g(F)$ est suffisamment régulière, la contribution à l'intégrale est nulle.

Ce raisonnement est en défaut si la phase $K_0 f(F)$ ne varie pas rapidement c'est à dire si nous sommes au voisinage d'un point stationnaire F_0 défini par :

$$(8) \quad \frac{\partial f}{\partial F}(F_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F^2}(F_0) \neq 0$$

La solution s'écrit à un facteur multiplicatif près :

$$(9) \quad I(K_0) \sim \frac{1}{\sqrt{K_0 f''(F_0)}} g(F_0) \exp[iK_0 f(F_0)], \quad K_0 \rightarrow \infty$$

où l'on voit bien que la seule contribution non nulle à l'intégrale $I(K_0)$ provient du point stationnaire F_0 .

En un point stationnaire F_0 d'ordre M :

$$(10) \quad f^{(n)}(F_0) = 0, \quad n = 1, \dots, M, \quad f^{(M+1)}(F_0) \neq 0$$

l'intégrale $I(K_0)$ s'écrit à un facteur multiplicatif près :



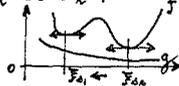
$$(11) I(K_0) \sim \frac{1}{[K_0 f^{(m)}(F_0)]^{1/m}} g(F_0) \exp[iK_0 F_0], K_0 \rightarrow \infty.$$

Quand on a plusieurs points stationnaires isolés $I(K_0)$ est la somme des contributions de chacun de ces points.

Quand f a deux points stationnaires d'ordre 1 situés arbitrairement près l'un de l'autre et g est régulière, $I(K_0)$ s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions d'Airy A_i et B_i .

$$A_i(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + \zeta t\right) dt$$

$$B_i(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp(-\frac{1}{3}t^3 + \zeta t) + \sin(\frac{1}{3}t^3 + \zeta t)] dt$$



Quand $f(F)$ a un point stationnaire F_0 d'ordre 1 et $g(F)$ a un pôle F_0 près de F_0 , il apparaît dans $I(K_0)$ la fonction d'erreur incomplète $\int_0^x e^{-z^2} dz$.

Quand $f(F)$ a un point stationnaire F_0 d'ordre 1 et $g(F)$ a un point de branchement près de F_0 (nous sommes à présent en variables complexes), il apparaît dans $I(K_0)$ la fonction du cylindre parabolique ou fonction de Weber-Hermite.

La solution de l'intégrale avec une borne finie a :

$$(12) \int_a^\infty g(F) e^{iK_0 f(F)} dF, K_0 \rightarrow \infty$$

fait apparaître les fonctions d'erreur, d'Airy et de Weber incomplètes quand le point stationnaire d'ordre 1 F_0 est arbitrairement près de a .

Les calculs complets et d'autres cas peuvent être trouvés dans le livre de FELSEN et MARCUVITZ [10].

IV - L'ACOUSTIQUE GEOMETRIQUE CLASSIQUE [12], [13], [14]:

IV - 1. Généralités :

Soit (1) à résoudre que nous rappelons :

$$(13) \Delta u + K_0^2 n^2(\vec{x}) u = 0, K_0 \rightarrow \infty,$$

$n^2(\vec{x})$ est peu différent de 1, la longueur d'inhomogénéité de $n^2(\vec{x})$ est 1 en grandeur sans dimension (respectivement Λ en grandeur avec dimension).

Une solution de

$$(14) \Delta u + K_0^2 u = 0, n = 1,$$

est l'onde plane $\exp(iK_0 \cdot \vec{x})$ de longueur d'onde $1/K_0$ (resp. λ_0) qui se propage dans le milieu homogène d'indice 1 et dans la direction \vec{K}_0/K_0 .

Nous cherchons localement une solution proche de cette onde plane et dont la longueur de modulation soit 1 (resp. Λ). Le problème physique correspondant est par exemple celui de la modulation faible d'une onde plane qui frappe un milieu non homogène de caractéristiques lentement variables.

Nous sommes donc en présence des deux longueurs caractéristiques suivantes :

$l_1 = 1/K_0 = \lambda_0/\Lambda$ (resp. $l_1^* = \lambda_0/2\pi$) longueur suivant laquelle les variations (rapides) de phase sont d'ordre 1.

$l_2 = 1$ (resp. $l_2^* = \Lambda$) longueur suivant laquelle les variations (lentes) de l'indice et de la modulation sont d'ordre 1.

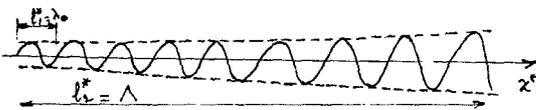


Fig 2. Illustration des deux longueurs caractéristiques.

IV - 2. Le développement asymptotique de Kline-Luneburg :

On cherche la solution de (13) sous la forme du D.A. en puissance de K_0^{-1} suivant :

$$(15) u(\vec{x}, K_0^{-1}) \sim e^{iK_0 S(\vec{x})} \sum_{m=0}^{\infty} (iK_0)^{-m} u_m(\vec{x})$$

où les fonctions réelles S et u_m de la variable réelle \vec{x} sont lentement variables sur la longueur d'onde

comme $n(\vec{x})$ et représentent la phase et les amplitudes.

En reportant (15) dans (13) et en identifiant aux différents ordres en K_0^{-1} , on obtient l'équation de l'eikonale vérifiée par $S(\vec{x})$ et les équations de transport pour les $u_m(\vec{x})$:

$$(16) \begin{cases} |\nabla S|^2 = n^2 \\ 2\nabla S \cdot \nabla u_m + u_m \Delta S = -\Delta u_{m-1}, m=1,2,\dots; u_0=0. \end{cases}$$

Ces équations aux dérivées partielles s'intègrent en les transformant en des équations différentielles le long de courbes caractéristiques $\vec{x}(\sigma)$ appelées rayons et définies par $\frac{d}{d\sigma} [n(\vec{x}(\sigma)) \frac{d\vec{x}(\sigma)}{d\sigma}] = \text{grad } n(\vec{x}(\sigma))$.

On obtient à l'ordre 0 :

$$(17) \begin{cases} S(\sigma) = S(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n(\vec{x}(\sigma)) d\sigma \\ u_0(\sigma) = u_0(\sigma_0) \exp[-\int_{\sigma_0}^{\sigma} \Delta S(\vec{x}(\sigma)) / 2n d\sigma] \end{cases}$$

où σ est l'abscisse curviligne le long du rayon.

Pour un milieu stratifié lentement variable les rayons vérifient les lois de Descartes.

La solution à tous les ordres peut être trouvée dans Felsen et Marcuvitz [10] page 179, problème n° 40.

IV - 3. La méthode des échelles multiples [15]:

On peut obtenir la solution de l'acoustique géométrique classique d'une manière différente : en cherchant la solution u de (13) à l'aide de la méthode des échelles multiples. En effet, nous sommes en présence de deux longueurs caractéristiques K_0^{-1} et 1 (resp. λ_0 et Λ). Nous prendrons comme variables indépendantes du D.A. sous forme d'échelles multiples, les deux variables x_1 et x_2 , qui restent d'ordre 1 sur les longueurs caractéristiques, c'est à dire :

$$(18) \begin{cases} x_1 \sim \frac{x}{\rho_1} = K_0 x & \text{(variable rapide)} \\ x_2 \sim \frac{x}{\rho_2} = x = \frac{x_1}{K_0} = \varepsilon x_1 & \text{(variable lente)}. \end{cases}$$

En variables dimensionnées :

$$(19) \begin{cases} x_1^* \sim \frac{x^*}{\rho_1^*} = \frac{x^*}{\lambda_0} & \text{(variable rapide)} \\ x_2^* \sim \frac{x^*}{\rho_2^*} = \frac{x^*}{\Lambda} = \varepsilon x_1^* & \text{(variable lente)}. \end{cases}$$

La solution de l'acoustique géométrique classique s'obtient par la méthode des échelles multiples en cherchant u sous la forme :

$$(20) u(\vec{x}, K_0^{-1}) = \tilde{u}(x_1, \vec{x}, K_0^{-1}) = \sum_{m=0}^N K_0^{-m} \tilde{u}_m(x_1, \vec{x})$$

avec

$$(21) \frac{dx_i}{d(K_0 \vec{x})} = \vec{w}_0(\vec{x}) + K_0^{-1} \vec{w}_1(\vec{x}) + \dots$$

où les \tilde{u}_m et les \vec{w}_i sont à trouver. $|\vec{w}_i| = O(1)$.

Cette méthode généralise à 3 dimensions la méthode de WKB classique.

IV - 4. Conditions de validité de la solution de l'acoustique géométrique classique [1]:

Nous donnons les conditions de validité de l'acoustique géométrique classique et, quand elles ne sont pas remplies, les généralisations que nous indiquons dans la suite de cet article.

1. L'indice $n(\vec{x})$ doit être une fonction lentement variable sur une longueur d'onde et indéfiniment différentiable si l'on veut obtenir toutes les amplitudes. Si $n(\vec{x})$ est une fonction discontinue à travers la surface Σ on pourra appliquer la transformée de Laplace dans le cas du faisceau limité et Σ régulière ou la G.T.D. quand Σ aura des singularités cf. § VIII.

2. Le rayon ne doit pas approcher tangentiellement une surface de discontinuité régulière ou une surface de gradient d'indice nul. Nous donnerons deux cas pour lesquels on appliquera la théorie des rayons modifiés § VII.

3. Les rayons, la phase et l'amplitude sont indépendants de K_0 ou de la fréquence pour un milieu d'indice donné. Le cas où l'amplitude dépend de K_0 est discuté en 4 ci-après :

4. Le champ sur un rayon est indépendant du champ sur les rayons voisins : l'acoustique géométrique classique néglige les effets de diffraction qui sont importants quand l'amplitude du champ varie rapidement :

caustique, foyer, zone d'ombre, frontière optique (région qui sépare deux espèces différentes de rayons voisins).

L'amplitude du champ devient :

- ∞ quand on s'approche d'une caustique par la partie éclairée.
- 0 dans la zone d'ombre d'une caustique.
- ∞ en un foyer.
- discontinue à la traversée d'une frontière optique.

Les paragraphes V et VI sont consacrés aux méthodes valables dans ces régions de non validité de l'acoustique géométrique classique. Toutes les méthodes présentées supposons que les amplitudes dépendent de K_0 ou de la fréquence pour un milieu donné. 5. La solution de l'acoustique géométrique classique pouvant être obtenue à partir de la méthode des échelles multiples, on peut conclure qu'elle est valable pour des distances x telles que $x_2 = K_0^{-1} x_1 = O(1)$ c'est à dire des x^* de l'ordre de Λ , conclusion à rapprocher de la formule $x^* \ll \Lambda^2 k_0$ de FRISCH [16].

IV - 5. Conclusion sur la méthode de l'acoustique géométrique classique :

La méthode de l'acoustique géométrique classique décrit la propagation d'une onde localement plane (ou d'une somme finie) dans un milieu à indice lentement variable et indéfiniment différentiable, tout au moins suffisamment régulier si l'on veut calculer un nombre fini d'amplitudes.

Nous appellerons diffraction tout phénomène contenu dans l'équation $\Delta u + K_0^2 n(\vec{x})u = 0$, $K_0 \rightarrow \infty$ et qui ne peut être décrit par la méthode de l'acoustique géométrique classique MALYUZHINETS [17].

Nous allons maintenant présenter plusieurs généralisations ou uniformisations de la solution de l'acoustique géométrique classique dans ses zones de singularité.

V - LES GENERALISATIONS A L'AIDE DE D.A. DIRECTS (CAUSTIQUES) :

V - 1 Généralités :

Nous présentons dans ce paragraphe les généralisations de l'acoustique géométrique classique à l'aide de développements asymptotiques directs de l'équation de propagation dans le cas où l'indice est régulier et lentement variable, les seules singularités étant constituées par des caustiques.

Les variations du champ étant très importantes aux singularités, nous devons faire apparaître le phénomène de diffraction contenu dans l'équation de propagation. Pour cela nous cherchons u sous la forme :

$$(22) u(\vec{x}, K_0) = \Psi(\vec{x}, K_0) \exp i K_0 S(\vec{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} (i K_0)^{-m} \Psi_m(\vec{x}, K_0) e^{i K_0 S(\vec{x})}$$

où maintenant les amplitudes Ψ_m sont complexes et dépendent de K_0 .

En reportant (22) dans (13) et en supposant que le terme en K_0^2 est le terme principal, on obtient le système :

$$(23) \begin{cases} |\nabla S|^2 = n^2(\vec{x}) & \text{(équation de l'eikonale)} \\ i K_0 (\nabla S \cdot \nabla \Psi(K_0) + \Psi(K_0) \nabla^2 S) + \nabla^2 \Psi(K_0) = 0. \end{cases}$$

Dans la dernière équation, le second terme $\nabla^2 \Psi(K_0)$ n'est plus d'ordre inférieur au premier comme dans la solution de l'acoustique géométrique classique et il faut tenir compte : c'est le terme représentant l'effet de diffraction.

Avec nos hypothèses les rayons existent encore au voisinage d'une caustique et les amplitudes complexes $\Psi_m(\vec{x}, K_0)$ doivent s'identifier aux amplitudes réelles $u_m(\vec{x})$ de l'acoustique géométrique loin d'une caustique, ce qui implique un déphasage le long d'un rayon quand il ressort de la caustique.

Dans ce paragraphe nous donnons des méthodes pour obtenir $\Psi_0(\vec{x}, K_0)$.

V - 2 La méthode des D.A. raccordés et la méthode des échelles multiples (cas d'une caustique d'ordre 2) :

Pour représenter le champ au voisinage d'une caustique régulière d'ordre 2 (confluence de 2 rayons), la méthode des développements asymptotiques raccordés a été utilisée par BUCHAL et KELLER [18] et reprise par NAYFEH [9] p.377 et la méthode des échelles multiples par FOWKES [19].

Dans la première méthode la variable intérieure est $K_0^{2/3} x$ et dans la seconde les deux variables indépendantes sont d'ordre $K_0^{2/3} x$ et x . Remarquons que x est encore la variable lente comme dans la recherche de la solution de l'acoustique géométrique classique par la méthode des échelles multiples.

Le résultat de ces deux méthodes est le suivant : le champ acoustique uniforme en une caustique régulière d'ordre 2 est représenté par une combinaison linéaire à coefficients complexes et dépendants de la fréquence, de la fonction d'Airy A_i et de sa dérivée première.

Le D.A. intérieur de la méthode des D.A. raccordés est parfois désigné sous le nom de D.A. non uniforme de Brekhovskikh.

A notre connaissance, ces deux méthodes ne sont pas utilisées pour des caustiques d'ordre supérieur à 2, leur mise en oeuvre étant trop lourde. (En un point d'une caustique d'ordre m il y aura au maximum confluence de m rayons).

Par contre, deux méthodes très élégantes pour représenter le champ au voisinage de caustiques d'ordre $m \geq 2$ sont les suivantes :

V - 3 La méthode des intégrales de comparaison ou intégrales canoniques de LUDWIG [20], [21], [2], [3] :

Soit la fonction d'Airy généralisée $V(r_1, \dots, r_{m-1})$ des $(m-1)$ variables indépendantes r_1, r_2, \dots, r_{m-1} définie par :

$$(24) V(r_1, \dots, r_{m-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i \left[-\sum_{l=1}^{m-1} r_l \frac{(-\mathcal{F})^l}{l} + \frac{(-\mathcal{F})^{m+1}}{m+1} \right] \right\} d\mathcal{F}$$

Dans le cas d'une caustique régulière ($m = 2$) on retrouve la fonction d'Airy $A_i(x)$:

$$(25) A_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(x\mathcal{F} + \frac{\mathcal{F}^3}{3})] d\mathcal{F}$$

et dans le cas d'une caustique cuspidée ($m = 3$), la fonction de Pearcey $P_e(x, y)$ définie par :

$$(26) V(r_1, r_2) = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} P_e(-r_2, r_1 \sqrt{2}).$$

Ludwig postule que toute combinaison linéaire, à coefficients complexes et dépendants de la fréquence, de la fonction d'Airy généralisée d'ordre $(m-1)$:

$V(r_1, r_2, \dots, r_{m-1})$ et de ses $(m-1)$ dérivées premières $\partial V / \partial r_i$ représente le champ uniforme d'une caustique d'ordre m appelée caustique canonique. (La réciproque n'est pas vraie).

V - 4 La méthode de MASLOV [22] :

On ne travaille plus sur la fonction $u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$ mais sur une de ses transformées de Fourier, par exemple $\tilde{u}(p_1, x_2, x_3)$ définie par :

$$(27) \tilde{u}(p_1, x_2, x_3) = C \int u(\vec{x}) \exp[-i K_0 p_1 x_1] dx_1$$

où C est une constante ; x_1 et $K_0 p_1$ sont les variables conjuguées.

\tilde{u} vérifie une équation du type Helmholtz pour laquelle on cherche un D.A. de Kline-Luneburg. Quand on revient à $u(\vec{x})$ le D.A. image n'est plus singulier sur les caustiques (de u). Cette technique utilise aussi la méthode de la phase stationnaire pour calculer la transformée de Fourier.

En présence d'un champ de caustique, Maslov utilise un opérateur canonique pour uniformiser la solution.

Kravtsov [22] compare les méthodes de Ludwig et de Maslov et suggère quelques généralisations.

On peut trouver des visualisations du champ au voisinage d'une caustique dans [23], [24], et [25]. Fig 3, 4, 5 et 6.



Des expériences ont été menées en mer pour vérifier la valeur du champ en une caustique régulière d'ordre 2 [26].

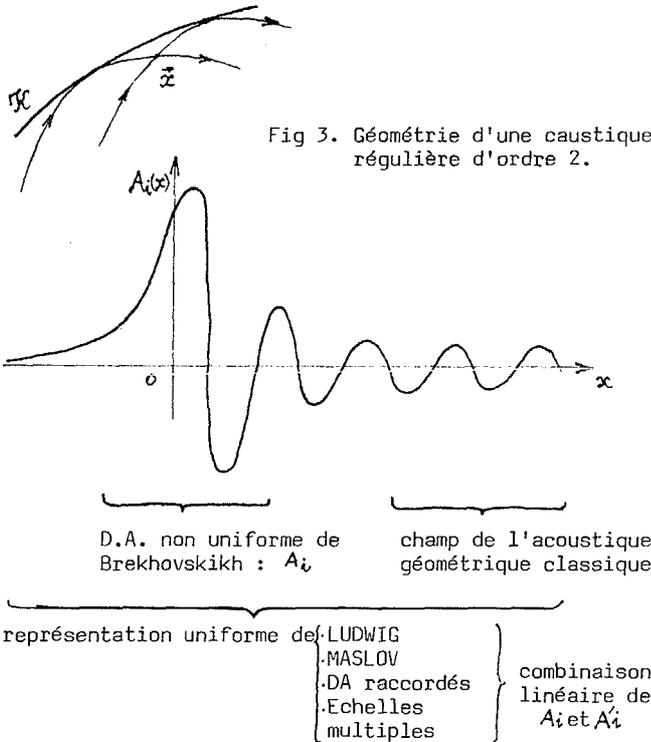


Fig 3. Géométrie d'une caustique régulière d'ordre 2.

Fig 4. Représentation du champ d'une caustique régulière d'ordre 2 suivant un axe transversal à la caustique.

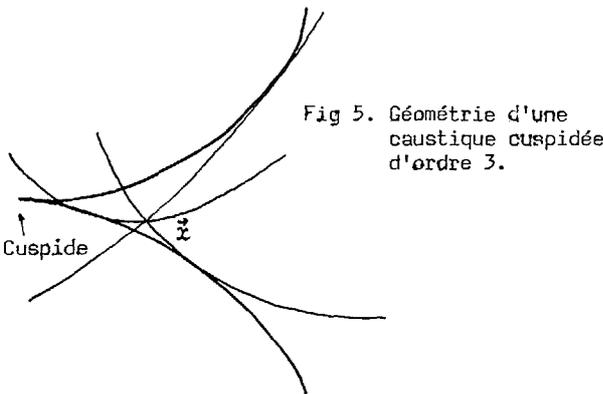


Fig 5. Géométrie d'une caustique cuspidée d'ordre 3.

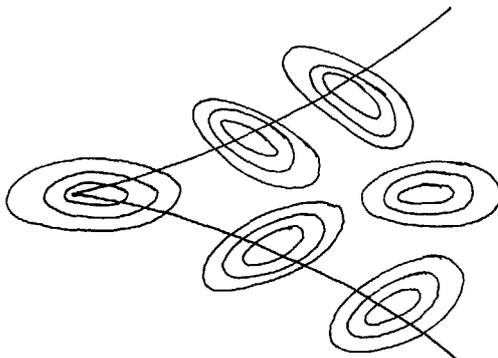


Fig 6. Allure des courbes de niveau du champ en une caustique cuspidée d'ordre 3.

Nous avons vu qu'en acoustique géométrique classique le champ en un point s'écrit comme somme finie de la contribution des différents rayons passant par ce point c'est à dire comme somme finie d'ondes localement planes. On peut généraliser en supposant que le champ au point \vec{x} peut s'écrire comme somme intégrale d'ondes localement planes [27] p. 50.

$$(28) I(\vec{x}, K_0) = \int_{\Gamma} g(\vec{x}, \vec{F}; K_0) \exp\{iK_0 \varphi(\vec{x}, \vec{F})\} d\vec{F}, K_0 \rightarrow \infty.$$

Suivant la configuration des points stationnaires donnés par φ , des pôles et des points de branchements de g , on peut représenter de cette manière un grand nombre de situations pour lesquelles l'acoustique géométrique classique ne s'applique plus. Les points stationnaires isolés d'ordre 1 donnent les rayons classiques. Plusieurs points stationnaires d'ordre arbitrairement près l'un de l'autre donnent les caustiques isolées: on a les intégrales canoniques de Ludwig définissant les fonctions d'Airy généralisées.

Les pôles et les points de branchement de g ont été rajoutés par Bleistein et on a les intégrales canoniques de Bleistein donnant les fonctions de Weber généralisées.

On peut aussi supposer des bornes finies du contour d'intégration Γ proches des points singuliers de l'intégrale.

De telles intégrales peuvent représenter le champ au voisinage des caustiques, des frontières optiques, des ondes latérales à la surface de séparation de deux milieux, etc... SALTIEL [27] p. 39.

VII - LES METHODES INTEGRALES EN MILIEU STRATIFIE LIMITE : la théorie des rayons modifiés [28], [29] :

On résoud l'équation de Helmholtz (1) avec une source ponctuelle $-4\pi \delta(\vec{x})$ dans le cas de la symétrie cylindrique des coefficients et de la solution. En utilisant la transformation de Hankel en r , qui est la transformation de Fourier en (r, θ) dans le cas de la symétrie de révolution, on écrit u sous la forme :

$$(29) u(r, z) = \int_C Z(z; \nu) J_0(\nu r) \nu d\nu$$

où C est un contour d'intégration dans le plan complexe des ν . On obtient le même résultat en cherchant u à variables séparées.

$$Z(z; \nu) \text{ vérifie : } (30) \frac{d^2 Z}{dz^2} + K_0^2 N^2(z) Z = 2\pi \delta(z)$$

avec les conditions aux limites appropriées ; $N^2(z) = n^2(z) - \nu^2/K_0^2$. (30) admet comme solution :

$$(31) Z = \frac{Z^- Z^+}{W(Z^-, Z^+)}$$

où Z^- et Z^+ sont solutions de (32) qui est (30) sans second membre, Z^- vérifiant la condition aux limites sur la surface de la mer et Z^+ vérifiant la condition aux limites sur le fond. W est le wronskien. L'équation homogène

$$(32) \frac{d^2 Z}{dz^2} + K_0^2 N^2(z) Z = 0, K_0^2 \rightarrow \infty$$

peut se résoudre par la méthode WKB. Quand on a Z par WKB, on intègre (29) soit par la méthode des résidus et on obtient la théorie des modes [30] et [31], soit par la méthode de la phase stationnaire quand on prend le comportement asymptotique de la fonction de Bessel J_0 . Cette dernière méthode permet d'obtenir une représentation géométrique par rayons quand on utilise le développement de Taylor de $1/W$.

Quand on intègre (32) par la méthode WKB et que $N^2(z)$ admet des singularités, on est obligé d'utiliser des généralisations de la méthode WKB [32]. Les singularités de $N^2(z)$ peuvent être des zéros, on est en présence de points tournant rapprochés ou non, ou des zéros près des frontières du milieu marin.

Quand on utilise une généralisation de WKB pour intégrer (32) et la méthode de la phase stationnaire ou ses généralisations pour intégrer (29), on obtient la méthode des rayons modifiés.



Cette appellation provient du fait que dans la représentation géométrique par rayons de l'intégrale (29), les rayons obtenus quand on utilise la méthode WKB généralisée sont décalés par rapport à ceux obtenus par la méthode WKB classique.

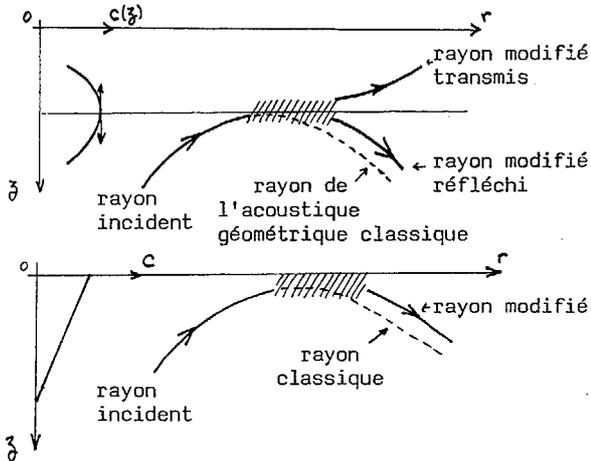


Fig 7 et 8. Cas d'application de la théorie des rayons modifiés (méthode non valable dans les zones hachurées)

Une conséquence importante due au déplacement du rayon est le déplacement et le renforcement des zones de convergence.

VIII - LA THEORIE GEOMETRIQUE DE LA DIFFRACTION [33], [34]:

La théorie géométrique de la diffraction (G.T.D.) due à J.B. Keller généralise la solution de l'acoustique géométrique classique quand un rayon classique frappe un obstacle parfaitement réfléchissant en une singularité géométrique de cet obstacle ou tangentielle-ment. La G.T.D. ajoute aux rayons classiques de l'acoustique géométrique les rayons diffractés qui vérifient les lois de l'acoustique géométrique classique en dehors de leur zone de lancement. Une fois connue leur direction de lancement à partir de l'élément diffractant, il suffit d'initialiser l'amplitude pour obtenir un problème d'acoustique géométrique classique. L'amplitude est initialisée à l'aide des coefficients de diffraction qui dépendent de la forme de l'obstacle et de la fréquence.

La direction de lancement des rayons diffractés et les coefficients de diffraction sont obtenus à partir de problèmes canoniques dont nous donnons ci-dessous quelques exemples :

Diffraction par le bord droit d'un écran plan :

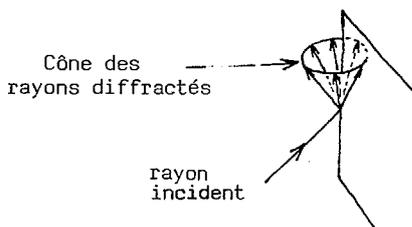


Fig 9. Diffraction d'un rayon par le bord droit d'un écran plan.

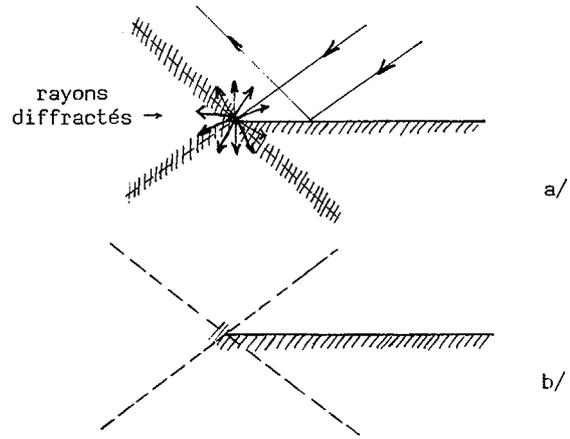


Fig 10. Rayon incident normal à l'arête de l'écran. Les parties hachurées représentent les zones singulières de la G.T.D. de Keller dans le cas a/, de Kouyoumjian dans le cas b/.

Diffraction par un cylindre circulaire :

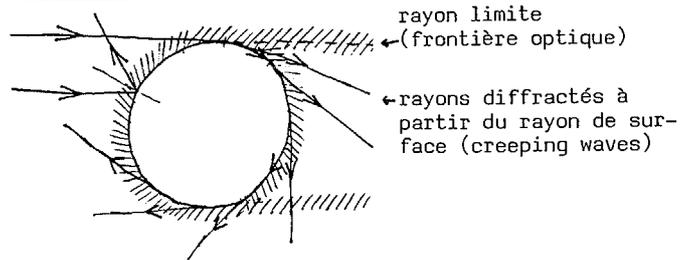


Fig 11. Diffraction par un cylindre circulaire. Ce cas est à rapprocher en partie de celui de l'antichenal de surface :

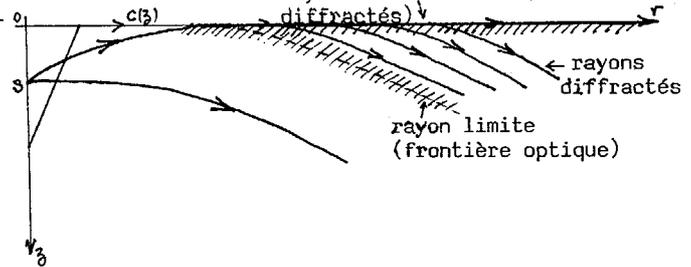


Fig 12. Zone d'ombre dans un antichenal de surface.

La G.T.D. de Keller admet les zones de singularité dont certaines ont été supprimées par exemple par Kouyoumjian dans le cas du bord droit d'un écran plan attaqué par un rayon perpendiculaire au bord. D'autres cas et d'autres méthodes pour uniformiser la G.T.D. de Keller peuvent être trouvés dans [36], [37], [38].

La G.T.D. permet aussi de prendre en compte les obstacles non parfaitement réfléchissants.

Cette méthode peu employée en acoustique donne en électromagnétisme et plus particulièrement en radar les diagrammes de rayonnement de cibles complexes avec une très bonne précision [35] et ceci même pour le champ proche.

IX - LA METHODE DE L'EQUATION PARABOLIQUE :

Cette méthode s'appelle aussi méthode de l'approximation parabolique ou méthode de l'approximation paraxiale.

Nous la présentons comme dans [39]. Cependant beaucoup de variantes sont possibles et peuvent être



trouvées dans l'article [42] ou dans ses nombreuses références.

Nous cherchons u dans le cas de la symétrie cylindrique de révolution. Quand $n=1$, une solution de (1) est une onde cylindrique de la forme $H_0^{(n)}(K_0 r)$.

On cherche une solution de (1) sous la forme :

$$(33) \quad u(r, z) = \Psi(r, z) H_0^{(n)}(K_0 r).$$

Ψ est donc une fonction complexe lentement variable. Quand $K_0 r \gg 1$, c'est à dire que l'on est à grande distance :

$$(34) \quad H_0^{(n)}(K_0 r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi K_0 r}} e^{i K_0 r}, \quad K_0 r \rightarrow \infty$$

de telle sorte que (1) s'écrit :

$$(35) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2i K_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + K_0^2 (n^2 - 1) \Psi = 0.$$

L'approximation paraxiale consiste à supposer

$$(36) \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right| \ll 2 K_0 \left| \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|,$$

pour se ramener à l'équation parabolique :

$$(37) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2i K_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + K_0^2 (n^2 - 1) \Psi = 0.$$

Cette équation prend en compte les phénomènes de diffraction transverse par le terme $\partial^2 \Psi / \partial z^2$.

Les conditions (34) et (36) sont nécessaires mais ne sont pas suffisantes.

L'équation (37) peut être résolue par des méthodes asymptotiques ou des méthodes numériques.

La méthode de l'équation parabolique est très intéressante du point de vue numérique car elle se ramène à la résolution d'un problème de Cauchy avec conditions initiales. On obtient la solution discrétisée de rang n dans la direction r à partir de la solution de rang $n-1$, donc méthode simple et rapide.

Elle permet de résoudre numériquement des problèmes tels que la propagation d'un faisceau gaussien dans l'espace libre [42], la propagation dans un chenal sous-marin [42], la diffraction d'une onde plane par un tourbillon [41], etc...

X - CONCLUSION :

Nous venons de présenter plusieurs méthodes d'uniformisation de la solution de l'acoustique géométrique classique.

Avant de décrire brièvement chacune de ces méthodes, nous avons insisté sur les outils mathématiques qui sont d'un emploi constant : les méthodes de développements asymptotiques et la méthode de la phase stationnaire. Nous avons aussi insisté sur la solution de l'acoustique géométrique classique et ses domaines de non validité.

Toutes ces méthodes asymptotiques haute fréquence s'appliquent en principe à des situations bien précises. Cependant, les méthodes à la Ludwig-Bleistein qui en sont à notre avis à leur naissance devraient permettre, en généralisant les singularités de l'intégrande, de décrire des situations de plus en plus compliquées.

Un problème d'ordre théorique serait de comparer les différentes méthodes exposées dans leurs domaines communs de validité.

Il serait bon de tester ces différentes méthodes par des expériences en vraie grandeur.

XI - BIBLIOGRAPHIE

Sur les méthodes en général :

- [1] B. POIREE Introduction aux méthodes de calcul de champ sonore en acoustique sous-marine.
Revue du CETHEDC 48, 1976, p. 7 - 34

- [2] L. SALTIEL Les méthodes asymptotiques en acoustique sous-marine.
Revue du CETHEDC 42, 1975, p. 3 - 60
- [3] L. SALTIEL Modèles asymptotiques non-uniformes et uniformes de la propagation acoustique au voisinage d'une caustique régulière ou cuspidée.
Revue du CETHEDC 48, 1976, p. 35 - 74
- [4] L. SALTIEL Propagation acoustique dans un chenal profond.
Revue du CETHEDC NS 78 - 3, 1978
- [5] P.L.E. USLENGHI High frequency scattering methods Computer Electromagnetics Course Sorrento (Italy) 5 - 8 sept 1972 ; Istituto Elettrotecnico. Università di Napoli (317 références)
- [6] V.A. BOROVNIKOV, B. YE. KINBER Some problems in the Asymptotic Theory of Diffraction.
Proceedings of the IEEE vol 62, n° 11, novembre 1974, p. 1416 - 1437 (199 références).

Développements Asymptotiques :

- [7] A. ERDELYI Asymptotic Expansions
Dover Publications, 1956
- [8] C. FRANCOIS Les Méthodes de Perturbation en Mécanique.
Publications de L'ENSTA. 1973
Tome 1 pour les développements asymptotiques raccordés.
Tome 2 pour la méthode des échelles multiples.
- [9] A.H. NAYFEH Perturbation Methods
John Wiley 1973

Evaluation asymptotique des intégrales oscillantes :

- [10] L.B. FELSEN, N. MARCUVITZ Radiation and Scattering of Waves.
Prentice-Hall 1973
§ 4, p. 370 - 441 - 2 p. de références.
- [11] A. ERDELYI Asymptotic Expansions Chapitre II
Dover Publications 1956

Acoustique géométrique classique :

- [12] A.H. NAYFEH réf [9], p. 374 - 377
- [13] L.B. FELSEN, N. MARCUVITZ réf [10], p. 125 - 139
- [14] Y.A. KRAVTSOV Two new asymptotic methods in the theory of wave propagation in inhomogeneous media (Review)
Soviet Physics Acoustics 14 (1) 1978 p. 1 - 17 (23 références).
- [15] P. GERMAIN Progressive waves
Jahrbuch der Deutschen Gesellschaft für Luft und Raumfahrt E.V. (D.G.L.R.) 1971 p. 11 - 30
- [16] U. FRISCH La propagation des ondes en milieu aléatoire et les équations stochastiques. II Applications. Annales d'Astrophysique tome 30, 1967, Fascicule 3, p. 565 - 601.
- [17] G.D. MALYUZHINETS Développements in our concepts of diffraction phenomena.
Soviet Physics Uspekhi vol 69 (2) n° 5, 1959, p. 749 - 758.



LES METHODES ASYMPTOTIQUES "HAUTES FREQUENCES"

EN ACOUSTIQUE SOUS-MARINE

LES GENERALISATIONS DE L'ACOUSTIQUE GEOMETRIQUE CLASSIQUEMéthode des développements asymptotiques raccordés :

- [18] R.N. BUCHAL, J.B. KELLER Boundary layer Problems in diffraction Theory Communications on pure and applied mathematics vol XIII, p. 85 - 114, 1960.
I : the field at a caustic
II : diffraction by an aperture

Méthode des Echelles Multiples :

- [19] N.D. FOWKES A singular perturbation method Quarterly on applied Mathematics ; vol 26, 1968, Part I, p. 57 - 69 ; part II, p. 71 - 85

La méthode de LUDWIG :

- [20] D. LUDWIG Uniform asymptotic expansion at a caustic. Communications on pure and Applied Mathematics vol 19, (2), 1966, p. 215 - 250

- [21] Y.A. KRAVTSOV réf. [14]

La méthode de MASLOV :

- [22] Y.A. KRAVTSOV réf [14]

Visualisation du champ en différentes caustiques :

- [23] J.F. NYE Optical caustics in the near field from liquid drops. Proceedings of the Royal Society of London A 361, p. 21 - 41, 1978.
- [24] M.V. BERRY Les jeux de lumière dans l'eau La Recherche n° 92, p. 760 - 768, 1978.
- [25] L.M. BREKHOVSKIKH Waves in layered media. Academic Press 1960. p. 495.

Expériences :

- [26] B.K. BILLEN, D.G. CORR Experimental measurements and theoretical calculations for the sound field in the vicinity of a caustic. Conférence 1.4 dans Proceedings of the Satellite Symposium on Underwater Acoustics 8th. ICA Birmingham 1974.

La méthode des intégrales canonique de BLEISTEIN :

- [27] L. SALTIEL réf [2]

La théorie des rayons modifiés :

- [28] J. JOSEPH Application de la théorie des rayons modifiés à la propagation acoustique sous-marine aux basses fréquences par grands fonds. 6ième Colloque GRETSI, Nice, avril 1977, communication n° 11.
- [29] H. WEINBERG Application of ray theory to acoustic propagation in horizontally stratified oceans JASA, vol 58, n° 1, 1975, p. 97 - 109

La théorie des modes :

- [30] A. GILLES, D. ODERO Résolution de l'équation de propagation du son pour des profils de célérité quelconques et des fonds composites. Sième Colloque GRETSI, Nice, 1975, communication n° 26.

- [31] J.B. KELLER, J.S. PAPADAKIS wave propagation and Underwater Acoustics. Lecture Notes in Physics n° 70, 1977 Springer-Verlag.

Généralisations de la méthode WKB :

- [32] A. NAYFEH dans réf [9], voir les méthodes où il existe des points tournants.

Théorie géométrique de la diffraction :

- [33] P.F. COMBES Introduction à la théorie géométrique de la diffraction et aux coefficients de diffraction. Revue du CETHEDC n° 55, 1978 p. 77 - 104
- [34] G.L. JAMES Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves. Peter Peregrinus ltd 1976.
- [35] C. LOUET Champ électromagnétique diffracté par une cible de forme complexe. Annales des Télécommunications tome 32, n° 5 - 6, 1977, p. 171 - 178
- [36] Special issue on rays and beams. Proceedings of the IEEE novembre 1974, vol 62, n° 11, p. 1409 - 1616
- [37] Annales des Télécommunications Tome 32, n° 5 - 6 mai-juin 1977.
- [38] P.F. COMBES Etude de la zone de Rayleigh des ouvertures circulaires par les formules de KOTTLER et la théorie géométrique de la diffraction. Revue du CETHEDC NS 78-2, 1978

La méthode de l'équation parabolique :

- [39] F. JENSEN, H. KROL The use of the parabolic equation method in sound propagation modeling. SACLANT ASW Research Centre Memorandum SM-72 ; 1975
- [40] S.M. CANDEL Résolution numérique de problèmes de propagation et de rayonnement à l'aide de l'équation parabolique. Publication n° 5 de l'Université de Technologie de Compiègne, 1978 (26 réf)
- [41] S.M. CANDEL Numerical Solution of wave scattering problems in the parabolic approximation. Journal of Fluid Mechanics 1979.
- [42] F.D. TAPPERT The parabolic Approximation Method Chapitre V de la réf [31] (65 références).

Références de caractère général :

- [43] L.M. BREKHOVSKIKH Acoustics of the ocean Parties I et II, 1975, NTIS
- [44] L.M. BREKHOVSKIKH waves in layered media Academic Press, 1960
- [45] L.B. FELSEN, N. MARCUVITZ Radiation and Scattering of waves. Prentice - Hall 1973
- [46] PLE. USLENGHI high-frequency scattering methods. cf réf [5].
- [47] J.B. KELLER, J.S. PAPADAKIS wave propagation and Underwater Acoustics cf réf [31].
- [48] A.H. NAYFEH Perturbation Methods John Wiley, 1973.