

# SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

## APPLICATION DU CORRELOFILTRE A L'ELIMINATION DE RAIES EN PRESENCE DE BRUIT STATIONNAIRE

D. BAUDOIS, A. SILVENT

CEPHAG (Equipe de recherche associée au CNRS) B.P: 46, 38 402 SAINT MARTIN D'HERES

### RESUME

Après avoir resitué le problème général de l'estimation d'un signal aléatoire stationnaire additivement perturbé par un bruit stationnaire, en présence d'une référence bruit seul, nous nous intéressons à la transposition de la méthode classique (filtrage optimal de WIENER de la référence bruit seul) au cas où le bruit parasite est constitué d'une ou plusieurs raies de fréquences connues.

On montre alors que la technique consiste à égaliser les raies qui constituent la référence bruit seul, à réaliser l'inter-corrélation entre celle-ci et l'observation et à filtrer cette référence bruit seul par un filtre dont la réponse est égale à cette intercorrélacion. Ce filtre fournit alors une estimation du signal, qui est alors retranchée à l'observation

Dans une première étape, nous avons analysé les performances du dispositif (corrélateur + filtre) appelé correlo-filtre, lorsque le bruit perturbateur est composé d'une seule raie (étude de la sensibilité, de l'adaptativité dans le cas où la raie dérive lentement...), et sous certaines hypothèses, de deux raies. En particulier, nous avons envisagé le cas où les raies n'étaient pas égalisées et avons évalué dans ce cas, les pertes de performance.

Dans une seconde étape, la méthode a été testée sur des signaux réels. Nous avons alors pu dégager un certain nombre de points qui permettent d'expliquer en quoi les résultats obtenus diffèrent en partie des conclusions tirées des simulations.

### SUMMARY

We outline at first the problem of estimate of a stationary random signal, disturbed additively by a stationary noise in presence of a "reference of noise alone". Thereafter we study the adaptation of the classical method (optimal WIENER filtering of the "reference noise alone") to the case of a parasite noise constituted of one or several known frequency rays.

It is then shown that the technique consists in equalizing the rays constituting the "reference noise alone", to perform the cross-correlation between this reference and the observation and to filter this "reference noise alone" by means of a filter the response of which is equal to this cross-correlation. This filter gives thus an estimate of the signal, which is subtracted from the observation.

In a first time, we analysed the performances of the device (correlator plus filter), called "correlo-filter", when the disturbing noise is composed of a unique ray (study of sensitiveness, of adaptability in the case where the ray drifts slowly ...) and, under particular hypotheses, of two rays. Particularly, we have considered the case of non equalized rays and have evaluated the loss of performance.

A second step was to test the method on real signals. It was then possible to clear some points, allowing to explain why the obtained results differ partially from the conclusions of simulation results.



APPLICATION DU CORRELOFILTRE A L'ELIMINATION DE RAIES EN PRESENCE DE BRUIT STATIONNAIRE.

PREMIERE PARTIE: RAPPELS CONCERNANT L'ESTIMATION AU SENS DE WIENER D'UN SIGNAL ALEATOIRE STATIONNAIRE ADDITIVEMENT PERTURBE PAR UN BRUIT STATIONNAIRE.

I.1 Cas où la seule quantité observée est la somme du signal et du bruit.

Le filtre optimal de WIENER [1] permet d'estimer un signal stationnaire additivement perturbé par un bruit stationnaire, le critère d'estimation étant la minimisation de l'écart quadratique (Fig.1).

Le gain complexe du filtre optimal, sans contrainte de causalité est alors égal à :

$$\frac{S_{ZS}(v)}{S_{ZZ}(v)}$$

expression dans laquelle  $S_{ZS}(v)$  est la densité interspectrale de puissance entre l'observation bruitée  $Z(t)=S(t)+b(t)$  et le signal  $S(t)$  et  $S_{ZZ}(v)$ , la densité spectrale de puissance moyenne de  $Z(t)$ .

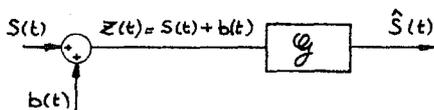


Fig 1: Estimation de WIENER

Il est donc clair que la construction de ce filtre exige la connaissance a priori ou l'estimation préalable de ces deux quantités.

Le signal  $S(t)$  et le bruit  $b(t)$  jouant des rôles analogues, le filtre de gain complexe

$$\frac{S_{Zb}(v)}{S_{ZZ}(v)}$$

est le filtre optimal au sens de WIENER qui estime au mieux le bruit  $b(t)$ . Il est tel que  $E\{[b(t)-\hat{b}(t)]^2\}$  est minimal ( $\hat{b}(t)$  étant l'estimée de  $b(t)$ ).

I.2 Cas où l'observateur a également accès à une "référence-bruit-seul".

Nous allons désormais considérer le cas où en plus de l'observation bruitée  $Z(t)$ , l'observateur a accès à un signal  $X(t)$ , stationnaire au second ordre, corrélé avec  $b(t)$ , mais non corrélé avec  $S(t)$ . Pour cette raison, nous conviendrons d'appeler  $X(t)$ , une "référence-bruit-seul". [ II ]

Eneffet, la connaissance de la densité interspectrale  $S_{Xb}(v)$  entre  $X(t)$  et  $b(t)$  permet de définir le gain complexe du filtre linéaire et homogène  $\mathcal{F}$  qui excité par  $X(t)$  engendre  $b(t)$ .

L'estimation de  $b(t)$  sera obtenue en filtrant  $X(t)$ . Le filtre optimal de WIENER, sans contrainte de causalité a alors pour gain complexe

$$G_1(v) = \frac{S_{Xb}(v)}{S_{XX}(v)} = \frac{S_{XZ}(v)}{S_{XX}(v)}$$

puisque par hypothèse  $X(t)$  et  $S(t)$  sont décorrelés (fig 2)

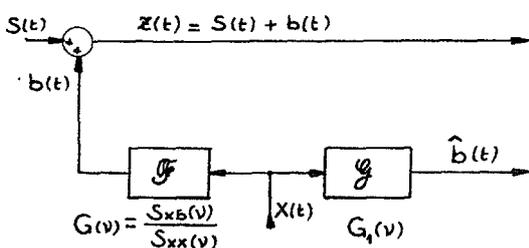


Fig 2: Estimation de  $b(t)$  par filtrage optimal de la "référence-bruit-seul"

l'erreur d'estimation  $E\{[b(t)-\hat{b}(t)]^2\}$  est alors nulle [III]:  $\hat{b}(t) = b(t)$  "presque sûrement".

Le filtre optimal de WIENER  $G_1$  ainsi trouvé est causal: il s'identifie au filtre  $\mathcal{F}$ .

Ainsi, en calculant  $Z(t) - \hat{b}(t)$ , nous estimons le signal  $S(t)$  sans erreur.

I.3 Mise en oeuvre du filtrage optimal de la "référence-bruit-seul".

Dans le cas général, la détermination du filtre optimal de WIENER est assez complexe à réaliser.

Cependant, dans le cas présent, la contrainte de causalité est superflue puisque nous savons que le filtre recherché est identique à un filtre réel  $\mathcal{F}$ . (Fig 3)

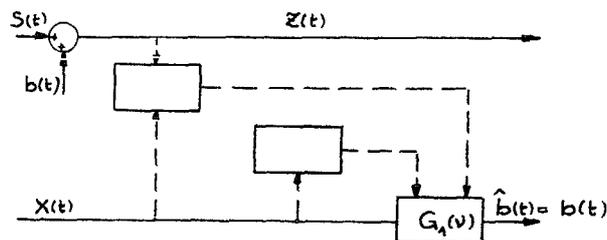


Fig 3: Principe général du filtrage optimal.

La mise en oeuvre, conforme à la méthode classique [1] consiste à décomposer le filtre en deux filtres en cascade, le premier étant un filtre blanchisseur et normeur (fig 4), inversible.

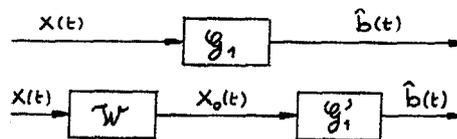


Fig 4: décomposition du filtre optimal

Le gain  $W(v)$  du filtre blanchisseur  $\mathcal{W}$  est tel que

$$|W(v)|^2 = \frac{1}{S_{XX}(v)}$$

Dans ces conditions, la d.s.p.m. de  $X_0$  est égale à 1  $V_v$

Le gain du filtre  $G_1'$  est alors égal à  $S_{X_0z}(v)$ ; autrement dit, il est égal à la densité interspectrale de puissance entre  $X_0(t)$  et  $Z(t)$ .

En d'autres termes, la réponse impulsionnelle  $h_1'(\tau)$  du filtre  $G_1'$  s'identifie à la fonction d'intercorrélation  $\Gamma_{X_0z}(\tau)$ . (fig 5)

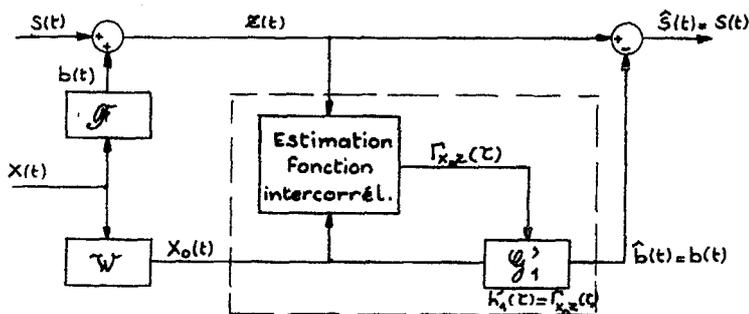


Fig 5: Mise en oeuvre du filtrage.

En conclusion, le problème de l'estimation du bruit  $b(t)$  consiste donc à blanchir la "référence-bruit-seul" puis à la filtrer par un filtre dont la réponse impulsionnelle est égale à l'intercorrélation entre la "référence-bruit-seul" blanchie et l'observation bruitée  $Z(t)$ .



Cette dernière opération est réalisée à l'aide d'un CORRELOFILTRE; celui-ci se compose d'un corrélateur qui estime la fonction d'intercorrrelation  $\Gamma_{xz}(t)$  (autrement dit il procède à l'identification du filtre  $\mathcal{F}$ , qui engendre  $b(t)$  à partir de  $X_0(t)$ ) et d'un filtre ajustable (fig 6), la réponse impulsionnelle de ce dernier étant égale à la fonction d'intercorrrelation  $\Gamma_{xz}(t)$  préalablement estimée.

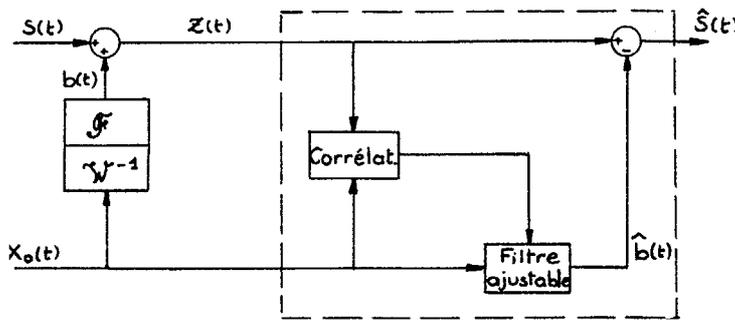


Fig 6: Utilisation du corrélofiltre.

**SECONDE PARTIE: TRANSPOSITION DE LA METHODE AU CAS OU b(t) SE COMPOSE D'UNE OU PLUSIEURS FONCTIONS SINUSOYDALES.**

Nous nous proposons de transposer la méthode au cas où  $b(t)$  se compose d'une ou plusieurs sinusoïdes. En effet le problème de l'élimination de signaux parasites sinusoïdaux (ou périodiques en général) intervient fréquemment, par exemple en acoustique sous-marine, lorsque le signal utile est additivement perturbé par des bruits parasites provenant des machines tournantes du bâtiment sur lequel sont situés les capteurs. Au préalable il nous faut préciser ce que l'on entend dans ce cas par "référence-bruit-seul", filtre blanc-chisseur et identification du filtre  $\mathcal{F}$ .

**II.1 - Etude du cas où  $b(t)$  ne se compose que d'une sinusoïde de fréquence  $\nu_0$**

Dans ce cas, il est clair que la "référence-bruit-seul" est une sinusoïde de même fréquence  $\nu_0$ , le filtre linéaire et homogène qui engendre  $b(t)$  à partir de  $X(t)$  étant toujours noté  $\mathcal{F}$ .

En posant  $X(t) = A \cos 2\pi\nu_0 t$ ,  $b(t)$  s'écrit alors  $b(t) = A F_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \theta_0)$ ,

expression dans laquelle  $F_0$  et  $\theta_0$ , sont respectivement le module et la phase du gain complexe du filtre  $\mathcal{F}$  à la fréquence  $\nu_0$ .

Il n'est donc pas nécessaire de construire un filtre identique au filtre  $\mathcal{F}$ . Il suffit de déterminer un filtre  $\mathcal{F}'$  dont le comportement est identique à celui de  $\mathcal{F}$  à la fréquence  $\nu_0$ .

Il reste enfin à définir ce que nous appellerons "blanchiment" pour un signal sinusoïdal. Pour l'instant nous introduirons un amplificateur de gain K sur la voie "référence-bruit-seul" et déterminerons après coup la valeur à donner à K (Fig 7).

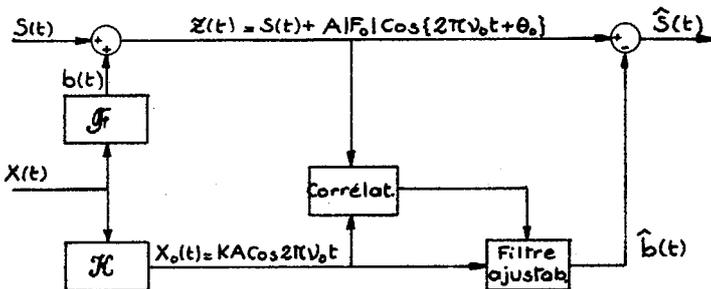


Fig 7: Schéma de principe.

**II-2- Evaluation des performances du corrélofiltre dans le cas où  $b(t)$  ne se compose que d'une sinusoïde.**

Nous supposons désormais l'existence d'erreurs d'estimation dues aux temps d'intégration nécessairement finis des dispositifs expérimentaux (corrélateur et filtre ajustable).

L'estimation de la fonction d'intercorrrelation entre  $X_0(t)$  et  $Z(t)$ , évaluée sur une durée T s'écrit:

$$\hat{\Gamma}_{xz}(\tau) = \hat{\Gamma}_{x_0b}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \{ A F_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \theta_0) K A \cos 2\pi\nu_0(t-\tau) \} dt$$

$$= \frac{K A^2 F_0}{2} \left[ \cos(2\pi\nu_0 \tau + \theta_0) + \frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} \cos(2\pi\nu_0 \tau - 2\pi\nu_0 T - \theta_0) \right]$$

Dans ces conditions, la sortie du filtre ajustable, de réponse impulsionnelle

$$h'_1(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T'} \hat{\Gamma}_{xz}(\tau) & \text{pour } \tau \in [0, T'] \\ 0 & \text{pour } \tau \notin [0, T'] \end{cases}$$

excité par  $X_0(t)$  s'écrit:

$$y(t) = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} \frac{K^2 A^3 F_0}{2} \cos[2\pi\nu_0(t-\tau)]$$

$$\left\{ \cos(2\pi\nu_0 \tau + \theta_0) + \cos(2\pi\nu_0 \tau - 2\pi\nu_0 T - \theta_0) \frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} \right\} d\tau$$

$$= \frac{K^2 A^3 F_0}{4} \cos(2\pi\nu_0 t + \theta_0) + \frac{K^2 A^3 F_0}{4T'} \int_0^{T'} \cos[2\pi\nu_0(2\tau - t + \theta_0)] d\tau$$

$$+ \frac{K^2 A^3 F_0}{4\pi\nu_0 T'} \sin(2\pi\nu_0 T) \int_0^{T'} \cos[2\pi\nu_0(t-\tau)] \cos(2\pi\nu_0 \tau - 2\pi\nu_0 T - \theta_0) d\tau$$

Si T et T' sont grands devant  $\frac{1}{\nu_0}$ , les deux intégrales sont négligeables devant le premier terme et

$$y(t) = \frac{K^2 A^3 F_0}{4} \cos(2\pi\nu_0 t + \theta_0)$$

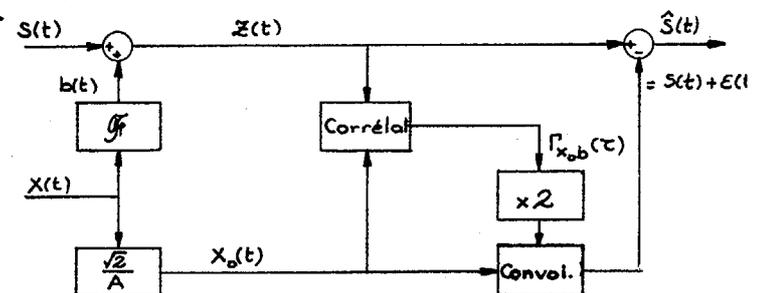
On constate donc que l'estimation de  $b(t)$  est correcte si  $\frac{K^2 A^2}{4} = 1$ , autrement dit si  $K = \frac{2}{A}$

En réalité, ce résultat pouvait être acquis d'emblée à la suite d'une remarque:

Il semble naturel, par analogie avec le cas d'un bruit  $b(t)$  de type continu de choisir  $K = \frac{A}{2}$ , ce qui revient à dire que le signal  $X(t)$  est normé à partir du moment où l'on choisit sa puissance moyenne égale à 1.

Dans ces conditions on peut se rendre compte que pour traduire le comportement de l'ensemble  $\mathcal{F}'\mathcal{F}$  vis à vis d'un signal sinusoïdal de puissance moyenne égale à 1, la réponse impulsionnelle du filtre ajustable doit être choisie égale au double de la fonction d'intercorrrelation.

Le schéma du dispositif utilisé est alors le suivant (fig 8).





l'estimée  $\hat{b}(t)$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \hat{b}(t) = & AF_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \theta_0) \\ & + AF_0 \frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} \cos [2\pi\nu_0(T - t) + \theta_0] \\ & + AF_0 \frac{\sin(2\pi\nu_0 T')}{2\pi\nu_0 T'} \cos [2\pi\nu_0(T' - t) + \theta_0] \\ & + AF_0 \frac{\sin(2\pi\nu_0 T) \sin(2\pi\nu_0 T')}{2\pi\nu_0 T \cdot 2\pi\nu_0 T'} \cdot \\ & \cdot \cos [2\pi\nu_0(t + T - T') + \theta_0] \end{aligned}$$

Le signal d'erreur  $\epsilon(t) = b(t) - \hat{b}(t)$ , nul pour T et T' infinis, peut être nul quelque soit t si T et T' sont l'un et l'autre des multiples entiers de la demi-période du signal X(t).

La puissance de  $\epsilon(t)$  s'écrit alors:

$$\begin{aligned} P_\epsilon(T, T') = & \frac{(AF_0)^2}{2} \left[ \left( \frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} \right)^2 \right. \\ & + \left( \frac{\sin(2\pi\nu_0 T')}{2\pi\nu_0 T'} \right)^2 \\ & + \left( \frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin(2\pi\nu_0 T')}{2\pi\nu_0 T'} \right)^2 \\ & + 2 \frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} \frac{\sin(2\pi\nu_0 T')}{2\pi\nu_0 T'} \cos[2\pi\nu_0(T - T')] \\ & + \left\{ 2 \left( \frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} \right)^2 \frac{\sin(2\pi\nu_0 T')}{2\pi\nu_0 T'} \right. \\ & \cdot \cos [4\pi\nu_0(T - T') + 2\theta_0] \left. \right\} \\ & + \left\{ 2 \frac{\sin(2\pi\nu_0 T)}{2\pi\nu_0 T} \left( \frac{\sin(2\pi\nu_0 T')}{2\pi\nu_0 T'} \right)^2 \right. \\ & \cdot \cos (2\pi\nu_0 T + 2\theta_0) \left. \right\} \end{aligned}$$

Les courbes de la figure 9 montrent l'évolution de  $P_\epsilon(T, T')$  en fonction de T et T' pour  $\theta_0 = 0$ .

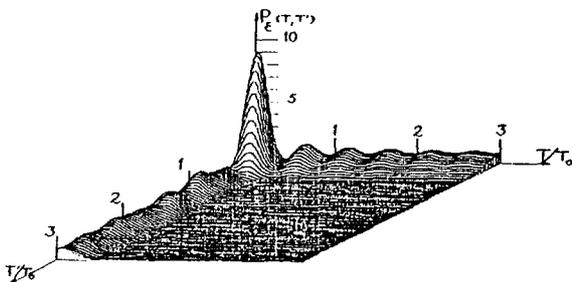


Fig 9:  $P_\epsilon(T, T')$

On constate que dès que T et T' atteignent la valeur  $\frac{3}{\nu_0}$ ,  $P_\epsilon(T, T') \sim 0$ .

II-3 - Etude expérimentale / comparaisons des résultats expérimentaux et théoriques.

Dans une première étape nous avons testé la méthode d'estimation en simulant le système physique.

La référence X(t) est issue d'un générateur G multifréquence [IV] qui fournit des signaux périodiques formés par la superposition de composantes monochromatiques programmables.

La fonction d'intercorrélation est calculée par un corrélateur numérique [V] les transmissions sont réalisées sous forme série [VI]. Le convolveur [VII] utilisé en tant que filtre ajustable a sa mémoire "réponse impulsionnelle" adressée par la sortie du corrélateur. Cette réponse est renouvelée à cadence réglable.

les performances de l'estimation seront appréciées par la comparaison entre les d.s.p.m. du signal Z(t) (S(t) étant nul) et du signal d'erreur  $\epsilon(t)$ . Pour faciliter l'exploitation des résultats, ces deux courbes ont été rapportées aux mêmes axes de coordonnées.

II - 3.1. Cas où le filtre  $\mathcal{F}$  est à structure passe-bas.

La figure 10 indique en coordonnées universelles les caractéristiques du filtre  $\mathcal{F}$  utilisé et la position

relative par rapport à la fréquence de coupure  $\nu_c$  de la raie X(t) dans deux cas.

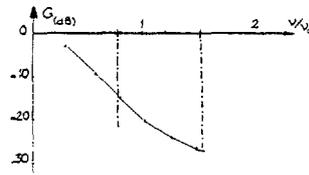


Fig 10: caractéristique du filtre.

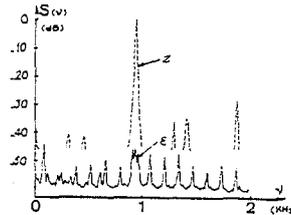


Fig 11: élimination dans le cas où  $\nu_0 < \nu_c$

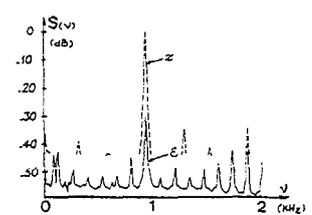


Fig 12: élimination dans le cas où  $\nu_0 > \nu_c$

Dans le premier cas [ $\nu_0 < \nu_c$ ; fig 11], l'affaiblissement apporté à  $b(t)$  par le corrélofiltre est voisin de 45db. Dans le second cas [ $\nu_0 > \nu_c$ ; fig 12], l'affaiblissement est plus faible mais dépasse néanmoins 30db.

La perte de performance par rapport au résultat théorique indiquant une rejection totale de  $b(t)$  ne peut s'expliquer par la durée finie des temps d'intégration. Dans le cas présent, nous avons en effet choisi  $\nu_0 T \approx 500$  pour le corrélateur et  $\nu_0 T' \approx 20$  pour le filtre. Il existe en fait d'autres défauts d'appareils (échantillonnage, quantification, non linéarités...) dont l'influence, si elle n'est pas envisagée ici est néanmoins ressentie à l'examen de la figure 13.

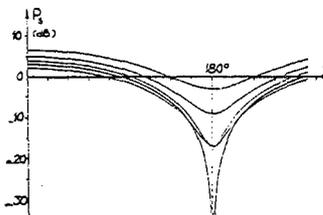


Fig 13: puissance de la somme de deux sinusoides de même fréquence.

Celle-ci montre l'évolution de la puissance de la somme de deux sinusoides de même fréquence en fonction de leur phase relative  $\theta$  et du rapport K de leurs amplitudes. On voit donc, en particulier avec quelle précision en phase doit être réalisée l'estimation de  $b(t)$  (donc de  $\mathcal{F}$ ) pour que la puissance relative de  $\epsilon(t)$  soit inférieure à 30db.

II-3-2 Cas où le filtre est à structure passe haut.

Les figures 15 et 16 illustrent les performances du corrélofiltre, le filtre  $\mathcal{F}$  dont les caractéristiques sont indiquées figure 14 ayant pour fréquence de coupure 75 Hz puis 150 Hz ( $\nu_c = 100$  Hz).

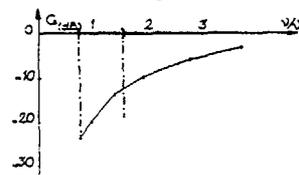


Fig 14: caractéristique du filtre

Dans ces deux cas l'affaiblissement atteint au moins 25 db.

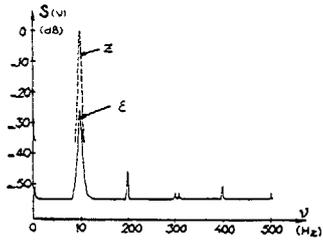


Fig 15: élimination dans le cas où  $v_0 < v_c$

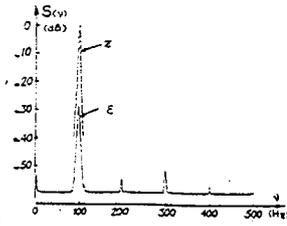


Fig 16: élimination dans le cas où  $v_0 > v_c$

II-4. Etude et mise en oeuvre sur bruits réels.

Le corrélofiltre a été testé sur bruits réels dans les conditions suivantes: sur le pourtour d'un caisson métallique partiellement immergé, était placée une série d'hydrophones recevant les bruits provenant de la mer. L'ensemble électronique destiné à enregistrer ces bruits était alimenté par un groupe convertisseur d'énergie. Les vibrations de cette machine, transmises par la structure métallique étaient perceptibles au niveau des hydrophones. Un accéléromètre, fortement couplé à l'ossature du convertisseur délivrait un signal qui, enregistré en même temps que les voies hydrophoniques a été utilisé comme "référence-bruit-seul". Les figures 17 et 18 montrent respectivement l'allure de la d.s.p.m. d'une voie signal comportant un certain nombre de raies à éliminer et de la "référence-bruit-seul" correspondant.

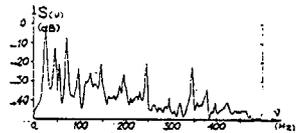


Fig 17: dspm de la voie signal.

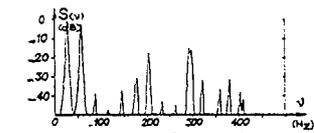


Fig 18: dspm de la "référence-bruit-seul".

Nous nous sommes proposés d'éliminer une seule raie de la voie signal (en l'occurrence celle de fréquence 29Hz). Pour cela nous avons isolé la raie à 29 Hz de la "référence-bruit-seul" par filtrage passe-bande. Les figures 19 et 20 indiquent, pour deux enregistrements différents les résultats du traitement.

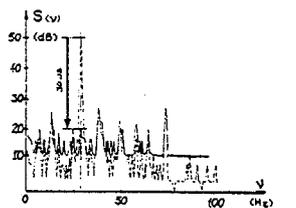


Fig 19.

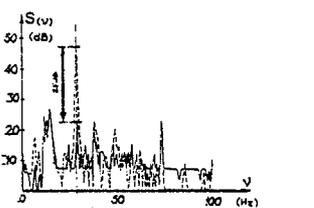


Fig 20:

Élimination de la raie à 29 Hz.

III- Cas où  $b(t)$  est la somme de signaux sinusoïdaux.

Avant de développer la méthode générale d'étude lorsque  $b(t)$  se compose de  $n$  raies, il nous semble intéressant de nous arrêter tout d'abord au cas de deux raies, le cas général apparaissant comme une extension pure et simple de celui-ci.

III-1. Etude de l'erreur d'estimation de  $b(t)$  lorsque  $X(t)$  est la somme de deux fonctions sinusoïdales de fréquences  $v_1$  et  $v_2$  ( $v_1 \neq v_2$ ).

En s'inspirant des résultats établis en (II,1), il convient de construire un filtre  $\mathcal{F}$  dont le comportement est identique au filtre  $\mathcal{F}$  pour les fréquences  $v_1$  et  $v_2$ .

Dans une première étape, nous allons conserver le schéma de la figure 8, élaboré pour une seule raie d'amplitude  $A$ .

Si  $X(t)$  s'écrit  $X(t) = A_1 \cos(2\pi v_1 t) + A_2 \cos(2\pi v_2 t)$ ,  
 $b(t)$  s'écrit  $b(t) = A_1 F_1 \cos(2\pi v_1 t + \theta_1) + A_2 F_2 \cos(2\pi v_2 t + \theta_2)$

et  $X_0(t)$  s'écrit  $X_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{A} X(t)$

Dans ces conditions, l'estimée de la fonction d'inter-corrélation  $\hat{\Gamma}_{x,b}(\tau)$  calculée sur une durée  $T$  est telle que:

$$\hat{\Gamma}_{x,b}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{AT} \int_0^T X(t-\tau) b(t) dt$$

En supposant  $T$  suffisamment grand devant  $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}$  et  $\frac{1}{|v_1 - v_2|}$

$$\hat{\Gamma}_{x,b}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{AT} \left( -\frac{A_1 F_2}{2} \cos(2\pi v_1 \tau + \theta_1) + \frac{A_2 F_2}{2} \cos(2\pi v_2 \tau + \theta_2) \right)$$

le signal estimé  $\hat{b}(t)$  s'écrit alors:

$$\hat{b}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{A} \int_0^{T'} \hat{\Gamma}_{x,b}(\tau) X_0(t-\tau) d\tau$$

En supposant  $T'$  grand devant  $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{|v_1 - v_2|}$ ,

$$\hat{b}(t) = \frac{1}{A} (A_1^2 F_1 \cos(2\pi v_1 t + \theta_1) + A_2^2 F_2 \cos(2\pi v_2 t + \theta_2))$$

Nous constatons que si  $A_1 = A_2 = A$ ,  $\hat{b}(t)$  s'identifie à  $b(t)$  et le signal d'erreur  $\mathcal{E}(t)$  est nul quelque soit  $t$ .

$X(t)$  est alors égal à  $\sqrt{2}(\cos 2\pi v_1 t) + \sqrt{2} \cos(2\pi v_2 t)$ . La puissance de chaque raie composant  $X_0(t)$  est normée. Ce résultat est à comparer à celui où  $X(t)$  est un bruit à spectre continu. Alors que dans ce cas il faut blanchir  $X(t)$ , lorsque nous sommes en présence de raies, il faut les égaliser et les normer.

III-2 Optimisation de l'erreur d'estimation.

En conservant les hypothèses sur  $T$  et  $T'$  il est facile de montrer que la puissance du signal d'erreur  $\mathcal{E}(t)$  est minimale pour  $A_1 = A_2$ . En supposant maintenant  $A_1 \neq A_2 \neq A$ , le signal  $\mathcal{E}(t)$  est alors non nul. Le coefficient  $A$  étant arbitraire, cherchons pour quelle valeur il minimise la puissance du signal  $\mathcal{E}(t)$ .

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{j=1}^2 A_j F_j \left(1 - \frac{A_j}{A}\right) \cos(2\pi v_j t + \theta_j)$$

La puissance de  $\mathcal{E}(t)$ ,

$$P_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 A_j^2 F_j^2 \left(1 - \frac{A_j}{A}\right)^2$$

est alors minimale pour  $A = A_0 = \frac{A_1^2 F_1^2 + A_2^2 F_2^2}{A_1 F_1 + A_2 F_2}$ , en posant  $A_2 = K A_1$ ,  $P_{\mathcal{E}}$  minimale

est alors égale à  $\frac{A_1}{2} \frac{K F_1 F_2}{F_1^2 + K^2 F_2^2} (1 - K^2)^2$  et  $A_0$  à

$$A_1 \frac{F_1 + K F_2}{F_1^2 + K^2 F_2^2}$$

Ce résultat est conforme à la conclusion du paragraphe précédent: la puissance du signal d'erreur  $\mathcal{E}(t)$  est nulle si les deux raies sont d'égales amplitudes ( $K=1$ ).

Alors  $A_0 = A_1 = A_2$ .

Dans le cas général ( $A_1 \neq A_2$ ), on remarque que  $A_0$  s'écrit sous la forme du produit de deux termes: l'un ( $A_1^2$ ), proportionnel à la puissance de l'une des raies prise comme référence, l'autre ne dépendant que du rapport des puissances entre les raies, les fréquences étant fixées.

En conservant ce schéma d'estimation, la puissance adéquate à chaque raie s'exprime par:

$$P_{\mathcal{E}_i} = \frac{A_i^2 F_i^2}{2} \left\{ \frac{A_j^2 (A_1 - A_2) F_j}{A_1 F_1 + A_2 F_2} \right\}^2 \quad i, j=1, 2 \quad i \neq j$$

Le gain en puissance, exprimé pour chaque raie est alors

$$\beta_i = \frac{P_{\mathcal{E}_i}}{\frac{1}{2} A_i^2 F_i^2} \quad i = 1, 2$$

En posant  $A_2 = K A_1$  et  $F_2 = Q F_1$

$$\beta_1 = \left\{ \frac{K^4 (1 - K^2) Q^2}{1 + K Q} \right\}^2 \quad \text{et} \quad \beta_2 = \left\{ \frac{1 - K^2}{1 + K Q} \right\}^2$$

Les courbes de la figure 21 montrent l'évolution de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  en fonction de  $K$  pour différentes valeurs du facteur de forme  $Q$  du filtre  $\mathcal{F}$ .

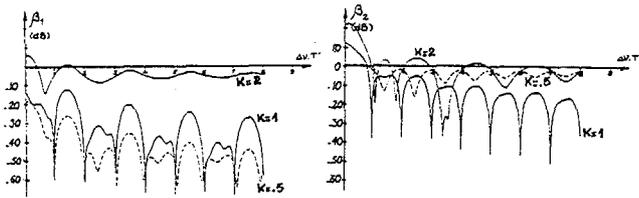


Fig 21: évolution des gains  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

L'examen des figures 21 montre que très rapidement, dès que K s'éloigne de 1, les performances de l'estimation deviennent médiocres; l'utilisation d'un égaliseur de raies est indispensable.

III-3. Généralisation: cas de n signaux sinusoidaux.

En utilisant la même démarche qu'en III-1, il est possible de calculer la puissance moyenne du signal d'erreur  $\mathcal{E}(t)$  lorsque  $X(t) = \sum_{j=1}^n A_j \cos(2\pi v_j t)$

En appelant  $F_j$  et  $\theta_j$  les valeurs du module et de la phase du gain complexe du filtre  $\mathcal{F}$  pour la fréquence  $v_j$ , et en supposant T et T' grands devant  $\sup \{ \frac{1}{|v_k - v_j|} \}$   $j \neq k$  et devant  $\sup \{ \frac{1}{v_j} \}$   $j$ ,  $b(t)$  s'écrit:

$$\frac{1}{A^2} \sum_j^3 A_j F_j \cos(2\pi v_j t + \theta_j)$$

On remarque que si tous les  $A_j$  sont égaux à A,  $\mathcal{E}(t) = 0 \forall t$ . S'il n'en n'est pas ainsi, la valeur  $A_0$  de A qui minimise la puissance de  $\mathcal{E}(t)$  est telle que:

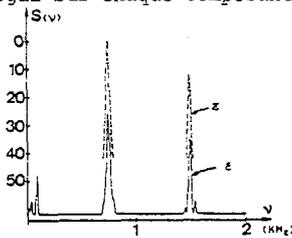
$$A_0^2 = \frac{\sum_j A_j F_j}{\sum_j A_j^2 F_j^2} \text{ . La puissance minimale est}$$

$$\text{alors égale à : } \frac{1}{2} \sum_j A_j^2 F_j^2 \left( 1 - \frac{A_j^2}{A_0^2} \right)^2$$

III-4. Etude expérimentale.

Nous ne présenterons dans ce paragraphe que le cas où le filtre  $\mathcal{F}$  est à structure passe-bas. (Fig 14).

Dans le cas où les deux raies (leurs positions sont indiquées fig 14) sont d'égales amplitudes, l'affaiblissement apparaît sensiblement égal sur chaque composante (fig 22) (26db et 22 db).



Ces résultats sont conformes aux résultats théoriques obtenus en calculant la puissance de  $\mathcal{E}(t)$  en fonction de  $|v_1 - v_2| T'$  [ III ], en supposant T' grand devant  $\frac{1}{v_1}$ ,  $\frac{1}{v_2}$ , et  $\frac{1}{|v_1 + v_2|}$ , mais non devant  $\frac{1}{|v_1 - v_2|}$ . Ces valeurs théoriques sont respectivement égales à 30db et 25 db.

En revanche, dans le cas où ces deux raies n'ont pas la même amplitude, comme il fallait s'y attendre, les résultats en l'absence d'égaliseur de raies sont médiocres: la figure 23 et la figure 24 montrent les résultats de l'élimination pour un rapport des amplitudes égal à 2 (la figure 23 correspond au cas où la raie de fréquence la plus basse a l'amplitude la plus élevée, la figure 24 correspond au cas contraire).

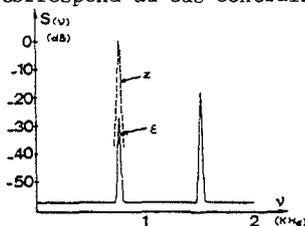


Fig 23

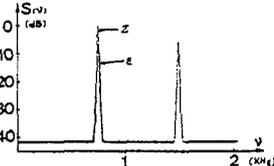


Fig 24

La mauvaise réjection, en particulier de la raie de fréquence la plus élevée confirme les résultats tirés des courbes théoriques de la figure 21. (pour K=2 et 0,5)

La figure 25 concerne le cas où X(t) est la somme de quatre sinusoides de même amplitude de fréquences relatives  $\frac{v_j}{v_c} = 0.75 ; 1.05 ; 1.2$  et  $1.5$  par rapport à la fréquence de coupure du filtre (figure 14)

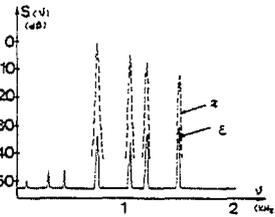


Fig 25: cas de 4 raies

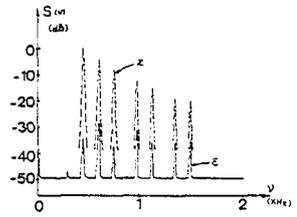


Fig 26: cas de 7 raies

Enfin, la figure 26 concerne le cas d'une somme de 7 sinusoides de même amplitude ( $\frac{v_j}{v_c} = 0.45 ; 0.6 ; 0.75 ; 0.975 ; 1.15 ; 1.35 ; 1.5$ ).

III-5. Etude sur bruits réels.

Dans les bruits enregistrés (cf. II-4) nous avons isolé par filtrage deux raies respectivement à 29 Hz et 58 Hz et les avons égalisées. Les résultats de la rejection présentés par les figures 27 et 28 sont, en première analyse, décevants.

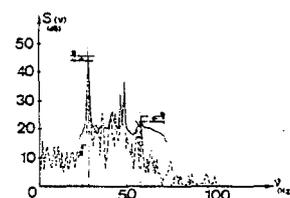


Fig 27

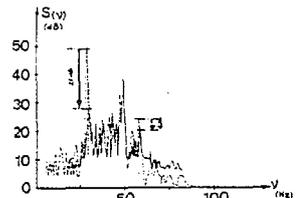


Fig 28

Si pour l'une des tranches temporelles, la raie de fréquence la plus basse est affaiblie d'environ 20db, alors que l'autre est peu affectée, on peut constater un échec total pour la seconde tranche.

En seconde analyse, la cause de cet échec est donnée par les oscillogrammes des figures 29, 30 et 31. Ces courbes de Lissajoux montrent que le "filtre  $\mathcal{F}$ " est homogène pour le canal 29 Hz et non pour le canal 58 Hz. Comme nous le montrons par ailleurs, et nous le constatons ici, l'influence de la bonne homogénéité s'exerce non seulement sur le canal incriminé mais aussi sur l'autre raie présente.



Fig 29

Entrée: 29Hz  
Sortie: 29Hz

Fig 30

Entrée: 29Hz  
Sortie: 58Hz

Fig 31

Entrée: 58Hz  
Sortie: 58Hz

III-6. Etude des performances dans le cas de l'utilisation d'un égaliseur de raies sur la voie "référence-bruit-seul".

L'étude de la puissance du signal d'erreur  $\mathcal{E}(t)$  [ III-2 et III-3 ] a permis de mettre en évidence la nécessité d'égaliser les raies constituant la "référence-bruit-seul", puis de les normer. Nous nous proposons, dans cette partie de préciser les sources d'erreurs qui dégradent l'estimation et de les situer les unes par rapport aux autres.

Egalisée et normée, la "référence-bruit-seul" s'écrit:

$$X_0(t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^n \cos(2\pi v_j t)$$

Dans ces conditions, en appelant  $F_j$  et  $\theta_j$ , le module et la phase du gain complexe du filtre qui engendre  $b(t)$  à partir de  $X_0(t)$ ,  $b(t)$  s'écrit:

$$b(t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^n F_j \cos(2\pi v_j t + \theta_j)$$



En supposant  $T \gg \sup \left\{ \frac{1}{|\nu_i - \nu_j|} \right\} \forall i \neq j$ ,

$$\hat{\Gamma}_{x_b}(\tau) = \sum_{j=1}^n F_j \cos(2\pi \nu_j \tau + \theta_j)$$

En filtrant  $X_0(t)$  par un filtre de réponse impulsionnelle égale à  $2\Gamma_{x_b}(t)$ ,  $\{t \in [0, T']\}$ ,  $\hat{b}(t)$  apparaît comme la somme de quatre termes  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$ ,  $b_3(t)$  et  $b_4(t)$  [IX] Le premier,  $b_1(t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^n F_j \cos(2\pi \nu_j t + \theta_j)$  est égal à  $b(t)$  Les trois autres termes composent donc l'erreur d'estimation.

III-6.1. Etude de  $b_2(t)$

Tous calculs faits,  $b_2(t)$  s'écrit [IX]

$$b_2(t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^n F_j \frac{\sin(2\pi \nu_j T')}{2\pi \nu_j T'} \cos(2\pi \nu_j t - \nu_j - 2\pi \nu_j T')$$

Les composantes de  $b_2(t)$  sont indépendantes les unes des autres et décroissent proportionnellement à  $\nu_j T'$ .

III-6.2. Etude de  $b_3(t)$

On montre [IX] que  $b_3(t)$  possède une composante à chacune des  $n$  fréquences  $\nu_j$ , dont l'amplitude et la phase dépendent de la position des  $(n-1)$  autres raies qui constituent  $X_0(t)$ .

La composante de  $b_3(t)$  à la fréquence  $\nu_i$  s'écrit:

$$b_3^i(t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^n F_j \cos(2\pi \nu_i t + \theta_j) \frac{\sin 2\pi (\nu_j - \nu_i) T'}{2\pi (\nu_j - \nu_i) T'}$$

$$- \sqrt{2} \sum_{j=1}^n F_j \sin(2\pi \nu_i t + \theta_j) \frac{1 - \cos 2\pi (\nu_j - \nu_i) T'}{2\pi (\nu_j - \nu_i) T'}$$

Afin d'obtenir l'extinction complète de la composante  $b_3(t)$ , il convient de choisir  $T'$  tel que

$$T' = \frac{K_i^1}{\nu_i - \nu_1} = \frac{K_i^2}{\nu_2 - \nu_1} = \dots = \frac{K_i^j}{\nu_j - \nu_1}$$

les  $K_i^j$  étant des entiers  $j \neq i$ . L'extinction simultanée de l'ensemble des composantes de  $b_3(t)$  est réalisée lorsque

$$T' = \frac{K_i^j}{\nu_j - \nu_1}$$

III-6.3. Etude de  $b_4(t)$

Le calcul [IX] montre que  $b_4(t)$  peut être considéré comme négligeable devant  $b_2(t)$  et  $b_3(t)$ . En réalité  $b_3(t)$  apparaît comme la partie prépondérante de l'erreur d'estimation.

III-6.4. Etude de la puissance de  $b_3^i(t)$

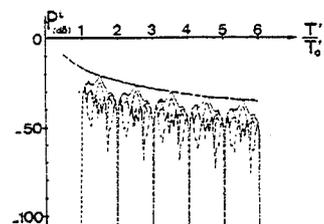
En posant  $\psi_j = 2\pi (\nu_j - \nu_i) T'$ , la puissance de  $b_3^i(t)$  s'écrit

$$P_3^i = \left[ \sum_{j=1}^n \frac{2F_j^2}{\psi_j^2} \sin^2 \frac{\psi_j}{2} \cos^2 \left( \theta_j + \frac{\psi_j}{2} \right) \right] + \left[ \sum_{j=1}^n \frac{2F_j^2}{\psi_j^2} \sin^2 \frac{\psi_j}{2} \sin^2 \left( \theta_j + \frac{\psi_j}{2} \right) \right]$$

On peut donc constater que pour chaque composante, la puissance de l'erreur de la forme de la relation linéaire  $\mathcal{F}$  et d'une combinaison de termes faisant intervenir la position relative des autres raies présentes dans  $X_0(t)$ .

Cette puissance est fonction de  $T'$ , temps d'intégration du filtre ajustable. Il nous a donc semblé intéressant d'observer l'évolution des performances du corrélofiltre en fonction de  $T'$  d'une part, et en fonction d'une désadaptation par rapport aux conditions optimales de fonctionnement,  $T'$  étant fixé.

Dans l'étude qui suit, nous avons considéré le cas où  $\mathcal{F}$  est un filtre passe bas du premier ordre, de fréquence 30Hz, 50Hz, 60Hz, 100Hz, 120Hz. La figure 32 représente l'évolution de la puissance de  $b_3^i(t)$  en fonction de  $\frac{T'}{T_0^i}$   $T'$  variant de  $T_0^i$  à  $6T_0^i$  (Dans ce cas  $T_0^i$ , valeur optimale de  $T'$ , définie en III-6.2., est égale à 0.1 sec)



Nous observons:  
 - Pour  $T' = KT_0^i$  ( $K$  entier), l'extinction complète des raies étudiées.  
 - l'étroitesse des crevasses dans les zones d'extinction  
 - une décroissance relativement lente de la puissance moyenne du bruit lié à chacune des raies.

La figure 33 se rapporte au test d'évolution de la puissance de la première raie (30Hz) en fonction de  $T'$ . Dans ce cas, la fréquence des raies a été légèrement modifiée (30Hz, 49.75Hz, 60.25Hz, 100.25Hz, 119.75Hz).

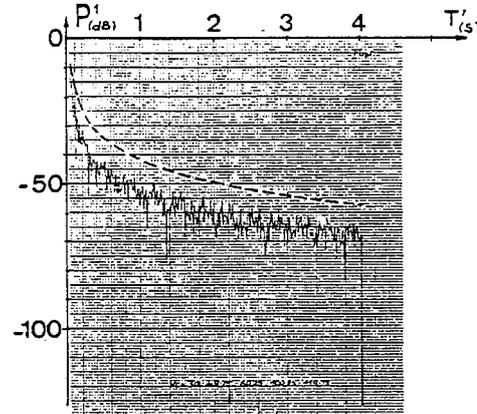


Fig 33

La valeur  $T_0^i$  est alors égale à 4 s. On observe, en effet une crevasse profonde lorsque  $T' = T_0^i = 4s$ . Cependant la décroissance moyenne de la puissance de chaque composante n'est pas modifiée.

La figure 34 décrit enfin les résultats du traitement lorsque l'une des raies s'éloigne de la valeur pour laquelle  $T_0^i$  a été calculé. En appelant  $\nu_i$  la valeur initiale de la fréquence de cette raie et  $\nu_i(1+\mu)$ , sa valeur après "désadaptation", les courbes de puissances qui suivent illustrent le comportement du dispositif en fonction de  $\mu$ .

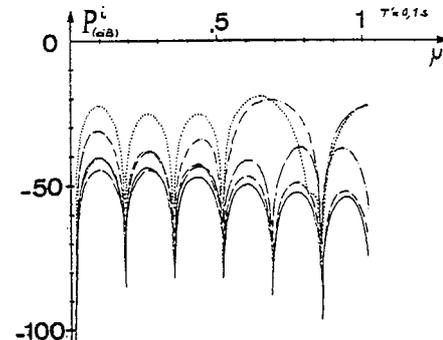


Fig 34

On constate que pour  $\mu=0$ , la réjection des 5 raies est parfaite. Cependant la variation d'une seule raie (dans cet exemple, la raie N°3) provoque un accroissement rapide de la puissance de toutes les autres raies. Pour certaines valeurs de  $\mu$ , on observe une évolution présentant des minima secondaires appréciables mais qui n'existent pas simultanément sur toutes les raies.

QUATRIEME PARTIE: CONCLUSION CRITIQUE ET PERSPECTIVES

La présente étude montre que l'élimination de signaux sinusoidaux mise en oeuvre en s'inspirant des résultats établis par WIENER est possible et donne de bons résultats, dès l'instant que l'on se trouve placé dans des conditions d'homogénéité stricte. Nous avons en effet constaté qu'un écart, même faible par rapport à la situation optimale (désadaptation d'une raie, non homogénéité du filtre, mauvaise égalisation des raies, erreur de phase dans l'estimation des raies...) dégradait fortement les performances de l'estimation des raies. Il nous semble donc désormais important de définir les limites dans lesquelles cette estimation peut être considérée comme satisfaisante en nous intéressant plus précisément à la capacité d'adaptativité du dispositif.



---

**BIBLIOGRAPHIE.**

- I H.L. VAN TREES - Détection, estimation & modulation theory, (Part I) (John Wiley & Sons Inc. New York 1968) p. 481
- II H. MERMOZ - Rapport technique sur un opérateur fondamental de détection (L.D.S.M., Le Brusco)  
H. MERMOZ - "Modularité" du traitement adaptatif d'antenne (Ann. des Télécom., 29, N° 1-2/1974 p. 43-54).
- III D. BAUDOIS, G. REVOL, A. SILVENT - Introduction à l'étude du corrélofiltre (Rapport CEPHAG 1/78) p. 44
- IV A. SILVENT, J.P. HENRIOUX, G. REVOL, D. MATHIEU - Générateur multifréquence (Rapport CEPHAG 34/74)
- V J. LIENARD, D. MATHIEU - Corrélateur numérique (Rapport CEPHAG N° 37/75)
- VI J. LIENARD - Considérations sur l'intérêt d'une transmission série des valeurs numériques dans une chaîne de traitement du signal (Rapport CEPHAG N° 42/75).
- VII J.P. HENRIOUX, F. VIAL, J. LIENARD - Etude et réalisation d'un multiconvolveur. (Rapport CEPHAG N° 25/77).
- VIII Ref. III, p. 29
- IX D. BAUDOIS, A. SILVENT - Etude du corrélofiltre (III<sup>e</sup> partie). (Rapport CEPHAG N° 42/78).
- X B. WIDROW et al - Adaptive Noise Cancelling : Principles and Applications. (Proceedings of the IEEE - December 1975, pp. 1692-1716.