

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

LES NON-LINEARITES ET LEURS EFFETS - UN ALGORITHME POUR LE
CALCUL DES COMPOSANTES DU SIGNAL, A PARTIR DES POINTS D'UN
TRACE DE COURBE.

G. LENGLET Ingénieur Service Technique

THOMSON-CSF - 110, Avenue du Maréchal Leclerc 49300 CHOLET

RESUME

SUMMARY

Sur le plan des circuits électroniques, les non-linéarités peuvent être profitables (modulation, détection, etc..), ou au contraire nuisibles à une transmission la plus fidèle possible du signal.

Pour ces deux cas, l'algorithme étudié permet le calcul en temps partagé ordinateur, des composantes principales du signal de sortie d'un système non-linéaire, pour plusieurs signaux sinusoïdaux appliqués à l'entrée.

Les applications peuvent concerner des circuits non-linéaires divers dont on connaît la fonction en statique, ou seulement la courbe de façon empirique. La réponse conjointe en phase de ces circuits, elle aussi très importante, fait l'objet d'une autre étude, qui n'est pas rapportée ici.

Pour les calculs, on part d'un relevé de la fonction, à pas constant de la variable. Le nombre de points m est impair, compris le point de repos situé au milieu. A ce point de repos, l'algorithme permet d'effectuer le développement en série de Taylor, limité au terme d'ordre $m - 1$.

Le programme ordinateur est organisé ensuite pour faire apparaître les composantes de distorsion harmonique, intermodulation, transmodulation, etc, jusqu'à l'ordre $m - 1$.

Les développements reposent sur les bases mathématiques exposées ci-après, tandis que les aspects pratiques font l'objet de "posters".

La précision des calculs est d'autant meilleure que le nombre de points m est élevé et englobe une plus grande partie de la fonction.

Les développements n'en deviennent que plus complexes, mais l'ordinateur se prête très bien à ces développements, en opérant par séquences et compilations répétées.

Nonlinearities in networks are either welcome (modulators, rectifiers, etc..), or undesirable, in order to minimize amplifiers distortions.

In both cases the definite algorithm is useful for main components time shared computing, starting from output signal of a nonlinear system, excited with several input sinusoidal signals.

Different applications may be encountered in nonlinear networks, of which the static function is known, either mathematically, or through an empirical representation.

The networks associated phase properties are not included in this present design, but will be considered in another important development. Starting from m incremental points, plotted around the standing point, the Taylor serie is computed in this spot until the $(m - 1)$ th derivative.

The computer file include next calculus of harmonic and intermodulation figures until the $(m - 1)$ th order.

The mathematical designs are related further, while some practical features are described in "poster" presentation.

The more increased is the number of plotted points, the more accurate are the calculus. Large scale exploration is often the better mean, in order to include all imperfections.

The mathematical expressions become more complex, but computer aided-design is helpful, on account of his numerous possibilities of repeated sequences and compilations.



LES NON-LINEARITES ET LEURS EFFETS - UN ALGORITHME POUR LE CALCUL DES COMPOSANTES DU SIGNAL, A PARTIR DES POINTS D'UN TRACÉ DE COURBE.

I - DEVELOPPEMENT LIMITE D'UNE FONCTION NON-LINEAIRE, DONNEE EMPIRIQUEMENT PAR UNE SUITE DE POINTS.

La linéarité, la régularité, ne sont que des conceptions de l'esprit humain, basées sur la logique mathématique.

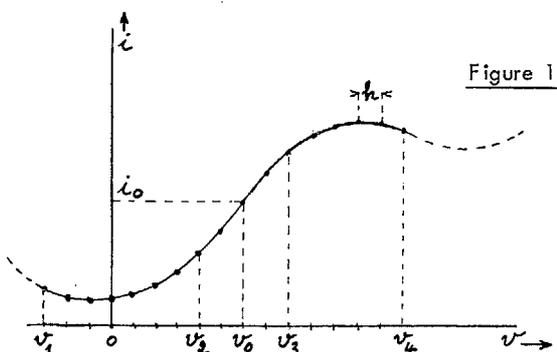
En physique, et par conséquent dans notre univers, rien n'est linéaire, chaque processus dépend principalement de toutes les conditions de son entourage direct et, dans une mesure de plus en plus faible, de l'ensemble de cet univers. Il en résulte que la caractérisation d'un processus fait intervenir des grandeurs diverses dont le nombre tend vers l'infini. Chaque grandeur n'a pas le sens algébrique que l'on croit, mais procède plutôt logarithmiquement avec des zones actives et des zones passives. Aucune grandeur ne devient nulle ou ne croît indéfiniment. Les régions actives sont séparées par des régions asymptotiques. Il résulte de tout cela une allure non-linéaire et les processus ne sont jamais connus analytiquement, au sens des mathématiques. Il est fréquent, par contre, de considérer les phénomènes par leur représentation graphique, à partir d'une suite d'appréciations diverses et notamment de mesures.

Il est d'usage de partir ensuite de cette fonction graphique pour assimiler certains intervalles à des fonctions simples se prêtant bien au calcul mathématique.

Cette façon d'étudier les effets des non-linéarités supprime les relations entre intervalles et appauvrit le contenu informationnel du processus réel, le débarassant notamment de son "histoire", nécessaire à la "prévision", sur la base des enchaînements continus.

Les procédés peuvent être révisés, compte tenu de l'apport de la puissance de l'ordinateur.

Sur le plan de l'électronique, soit $i = f(v)$ une fonction caractérisant un circuit présentant des non-linéarités par hypothèse. Seule la courbe est connue, à l'aide d'un relevé en statique. La figure 1 en donne un exemple.



La plage utile est $v_3 - v_2$, et la plage totale explorée $v_4 - v_1$. Le pas h des mesures est constant, pour m (impair) points relevés.

Par rapport à la fonction purement mathématique du premier degré :

$$i = i_0 + a \Delta v \quad (1)$$

l'analyse des fonctions transcendentes montre que

les non-linéarités ne peuvent être mise en évidence que par une infinité d'autres termes de degré supérieur, tels que ceux résultant par exemple, du développement suivant :

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Delta v^n \quad \text{avec } C_0 = i_0 \text{ à priori} \quad (2)$$

Cependant, les coefficients C_n ne peuvent être définis qu'à partir des m points relevés, de sorte que le polynôme ne comporte alors que m termes, soit :

$$i = \sum_{n=0}^{m-1} C_n \Delta v^n \quad (3)$$

Si l'on choisit de recouper le tracé en ses m points, le calcul des C_n peut être fait en résolvant un système de m équations à m inconnues. Le développement est considéré valable autour d'un point de repos déterminé. Il existe donc m solutions, si le point de repos peut occuper l'une des m positions du tracé.

Les fonctions considérées ici n'étant pas déjà des polynômes en Δv^n , un développement limité ne peut être qu'une approximation, et des oscillations, plus ou moins importantes, apparaissent par rapport au tracé réel. On verra plus loin l'incidence du choix du point de repos sur la précision de la simulation.

Partant de ces remarques, il est bon d'observer pour la décomposition de la courbe les conditions suivantes, en vue de la meilleure précision possible de l'approximation recherchée dans la zone utile :

- la largeur $v_4 - v_1$ doit être aussi grande que possible, en particulier pour englober les fortes irrégularités, s'il y en a.
- les points doivent englober aussi toutes les irrégularités locales, par exemple pour une caractéristique affectée d'ondulations. Il ne doit pas y avoir d'inversion de pente entre les points.

L'augmentation du nombre de points est toujours intéressante, mais un bon compromis doit être recherché entre l'augmentation, par élargissement à pas h constant, et l'augmentation, par diminution de h .

Cela tient à l'imprécision des mesures faisables. En effet, on peut imaginer que, théoriquement, toute fonction, au sens donné ici, connue dans un intervalle, aussi petit soit-il, le devient pour toute l'étendue de $-\infty$ à $+\infty$, par le jeu de la continuité. Il serait nécessaire alors de mesurer de façon extrêmement précisée les moindres écarts de la fonction. Les moyens de calcul qui suivraient devraient aussi être exempts des moindres écarts.

De façon plus objective, il vaut mieux étendre la plage des mesures et minimaliser ainsi l'effet des imprécisions de mesure. Ainsi, plutôt que d'explorer de façon trop détaillée la zone utile, il vaut mieux faire ressortir ses défauts de linéarité, par le développement, sur la base d'une exploration faisant intervenir tous les accidents de la courbe, en dehors de cette région, selon la recommandation a) plus haut.

LES NON-LINEARITES ET LEURS EFFETS - UN ALGORITHME POUR LE CALCUL DES COMPOSANTES DU SIGNAL, A PARTIR DES POINTS D'UN TRACÉ DE COURBE.

Partant d'un tracé comme celui de la figure 1, Newton, Bessel et Stirling ont établi chacun une formule permettant de simuler la fonction, avec la condition que tous les points du tracé soient recoupés exactement. La zone de meilleure précision, en dehors des points recoupés, varie selon les formules de ces trois auteurs. Celle de Stirling convient mieux pour obtenir la meilleure précision au voisinage du point de repos. Elle utilise les valeurs du tableau des différences situées sur la ligne horizontale médiane. Ce tableau se présente comme la figure 2 en donne un exemple. Il concerne 11 points de la fonction suivante :

$$i = \alpha^{(5+\Delta v)} \text{ pour } \alpha = 2 \quad (4)$$

Les valeurs entre parenthèses du tableau représentent la moyenne arithmétique des 2 quantités placées de part et d'autre verticalement, pour le cas de la ligne médiane seulement, qui sera retenu plus loin.

Δv	i	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}
-5	1										
-4	2	1									
-3	4	2	1								
-2	8	4	2	1							
-1	16	8	4	2	1						
0	32	(24)	16	(12)	8	(6)	4	(3)	2	(1,5)	1
1	64	32	16	8	4	2	1				
2	128	64	32	16	8	4	2	1			
3	256	128	64	32	16	8	4	2	1		
4	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	
5	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Figure 2

La courbe correspondant à la fonction (4) est donnée ci-après, figure 3 :

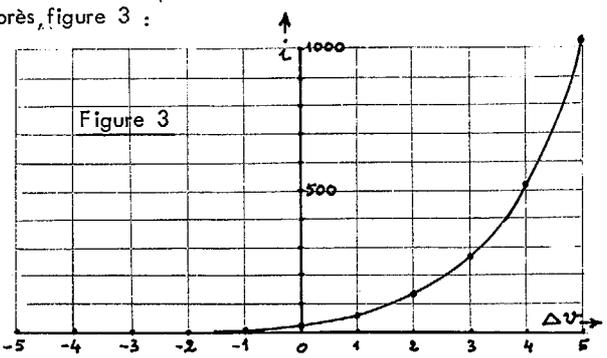


Figure 3

Partant des valeurs $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{m-1}$, placées sur la ligne horizontale médiane d'un tableau concernant m (impair) points, la formule de Stirling s'écrit comme suit, avec les notations utilisées jusqu'à présent :

$$i = i_0 + \sum_{n=1}^{m-1} \left[\frac{\Delta_n}{n!} \left(\frac{\Delta v}{h} \right)^n (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\Delta v^2}{h^2} - k^2 \right) \right] \quad (5)$$

avec $k_1 = [n-2 + \sin^2(n\pi/2)]/2$

Le produit de (5) étant développé par la formule du binôme, et, les termes en puissance égale de $\frac{\Delta v}{h}$ étant regroupés,

l'expression (3) peut être écrite comme suit :

$$i = i_0 + \sum_{n=1}^{m-1} \left[\left(\frac{\Delta v}{h} \right)^n \sum_{p=n}^{p_1} \frac{\Delta_{2p-n}}{(2p-n)!} S_{p-n} \right] \quad (6)$$

avec $p_1 = \frac{m-1 - \sin^2(n\pi/2) + n}{2}$

S_{p-n} désigne la somme des produits de (p - n) facteurs, parmi les $p - [n - \sin^2(n\pi/2)]/2$ premières valeurs de $-k^2$, à partir de 0, soit : 0, -1, -4, -9, -16, -25 la suite normale des valeurs pouvant être créées. $S_0 = 1$ a priori.

Par exemple, pour $m = 11$ ($n = 1$ à $n = 10$), les valeurs de S_{p-n} sont,

n	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
1	1	-1	4	-36	576
2	1	-1	4	-36	576
3	1	-5	49	-820	
4	1	-5	49	-820	
5	1	-14	273		
6	1	-14	273		
7	1	-30			
8	1	-30			
9	1				
10	1				

Figure 4

Les coefficients C_n de (3), compte tenu des valeurs $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{10}$ de la figure 2, deviennent alors :

$C_0 = 1, C_1 = 22,181, C_2 = 7,68726, C_3 = 1,77578,$
 $C_4 = 0,30776, C_5 = 4,27951 \times 10^{-2}, C_6 = 4,93634 \times 10^{-3}$
 $C_7 = 4,7123 \times 10^{-4}, C_8 = 4,1336 \times 10^{-5}, C_9 = 4,1336 \times 10^{-6}$
 $C_{10} = 2,75573 \times 10^{-7}$

La courbe de la figure 3 peut être reconstituée à l'aide de ces valeurs, et il se confirme que les dérivées successives, obtenues par le produit $n! \times C_n$ sont très proches de celles de la fonction réelle exprimée en (4).

L'écart existant entre les points n'exécède pas 0,45%, vers les extrémités, et $3,6 \times 10^{-6}$, vers le milieu de la courbe, malgré la rusticité du tableau, lequel est simplifié volontairement, pour permettre de suivre les calculs.

Avec 51 points, l'écart se réduit à $3,5 \times 10^{-7}$, et 3×10^{-16} respectivement. Le maniement de l'expression (6) devient moins commode, mais cela ne représente aucune difficulté pour l'ordinateur, grâce à la facilité de compilation répétée de séquences déterminées.

Indépendamment de l'objectif du chapitre II ci-après, le présent algorithme sert, d'une façon plus générale, à l'étude des fonctions.



LES NON-LINEARITES ET LEURS EFFETS - UN ALGORITHME POUR LE CALCUL DES COMPOSANTES DU SIGNAL, A PARTIR DES POINTS D'UN TRACE DE COURBE.

II - DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FONCTIONS SINUSOIDALES, D'UN SIGNAL COMPLEXE AFFECTE DE DISTORSION.

Soit $v = f(t)$ un signal d'origine quelconque, formé d'une somme de q fonctions sinusoïdales déterminées, pouvant être exprimé comme suit :

$$v = f(t) = v_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + v_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + v_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \dots v_q \cos(\omega_q t + \varphi_q) \quad (7)$$

Cette fonction est supposée représenter maintenant la quantité Δv de l'expression (3), caractérisant un circuit non-linéaire, excité par ce type de signal.

L'ensemble des termes de (7) va donc subir une élévation en puissance, croissant avec l'exposant n figurant en (3).

Chacun de ces termes provoque alors un nouveau développement, duquel apparaîtront de nombreuses composantes étrangères au signal d'origine, comprenant, avec les termes d'intermodulation, la valeur moyenne et les harmoniques de chaque signal fondamental.

Ce nouveau développement ayant un caractère mathématique particulier, une notation appropriée est adoptée momentanément, pour la formule suivante, relative à la puissance des polynômes :

$$(a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_q)^n = \sum \frac{n!}{b_1! b_2! b_3! \dots b_q!} a_1^{b_1} a_2^{b_2} a_3^{b_3} \dots a_q^{b_q} \quad (8)$$

Par convenance, $0! = 1$.

Chaque terme de ce développement comporte un coefficient numérique $n! / (b_1! b_2! b_3! \dots b_q!)$, positif, et un produit des q lettres, positif ou négatif, selon les divers signes de ces lettres. Toutes les combinaisons avec répétition sont explorées, de sorte qu'un exposant est affecté à chaque lettre, correspondant à la répétition de celle-ci dans le produit considéré. Une lettre ne devant pas figurer dans la combinaison effective prend l'exposant 0. Soit $b_1, b_2, b_3 \dots b_q$, les divers exposants, leur somme doit être égale à n .

Le nombre des diverses combinaisons, donc le nombre de termes de (8), est donné par :

$$K_q^n = \prod_{p=0}^{n-1} \frac{q+p}{1+p} \quad (9)$$

Par ailleurs, la somme des coefficients numériques est q^n .

Par exemple, pour $n = 7$ et $q = 3$, la somme des coefficients est 2187, et, parmi les 84 termes de (8), il existe les deux suivants :

$$\left. \begin{aligned} \frac{7!}{2! 3! 2!} a_1^2 a_2^3 a_3^2 &= 210 a_1^2 a_2^3 a_3^2 \\ \frac{7!}{1! 6! 0!} a_1^6 a_2^0 a_3^0 &= 7 a_1^6 a_2^0 a_3^0 \end{aligned} \right\} (10)$$

Pour revenir à la notation objective, les termes du premier membre de (8) sont à remplacer par les fonctions sinusoïdales de (7), en considérant momentanément :

$$\theta_1 = \omega_1 t + \varphi_1, \theta_2 = \omega_2 t + \varphi_2 \dots \theta_q = \omega_q t + \varphi_q \quad (11)$$

Soit, pour l'expression (8) complète :

$$(v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2 \dots + v_q \cos \theta_q)^n = \sum \frac{n!}{b_1! b_2! b_3! \dots b_q!} \times v_1^{b_1} \cos^{b_1} \theta_1 \cdot v_2^{b_2} \cos^{b_2} \theta_2 \dots v_q^{b_q} \cos^{b_q} \theta_q \quad (12)$$

Au second membre, le produit peut être considéré comme étant le produit de n fonctions sinusoïdales simples, une puissance étant en fait un produit. Le produit des deux premiers facteurs apporte deux termes, l'un en somme, l'autre en différence, des arcs concernés. Le produit de ces deux termes avec le troisième facteur donne lieu à quatre termes au total, et ainsi de suite, soit 2^n termes pour le produit complet. Par le jeu des sommes et différences d'arcs, l'expression du résultat peut être la suivante pour l'opération complète :

$$\cos \left[\sum_0^{b_1} (\pm \theta_1) + \sum_0^{b_2} (\pm \theta_2) + \sum_0^{b_3} (\pm \theta_3) \dots \dots \dots + \sum_0^{b_q} (\pm \theta_q) \right] \quad (13)$$

Par convenance, le premier terme est seulement positif, afin qu'il n'y ait bien que 2^n combinaisons et non 2^{n+1} , en fonction des signes adoptés. Ceci appliqué aux deux cas de l'exemple (10), donnerait respectivement :

$$\left. \begin{aligned} 210 a_1^2 a_2^3 a_3^2 \cos(\theta_1 \pm \theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_2 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \theta_3) \\ 7 a_1^6 a_2^0 a_3^0 \cos(\theta_1 \pm \theta_1 \pm \theta_1 \pm \theta_1 \pm \theta_1 \pm \theta_1) \end{aligned} \right\} (14)$$

Pour un développement jusqu'à la puissance $m - 1$ dans (12), toutes les combinaisons typiques se produisent, en considérant les deux dernières puissances, soit $m - 1$ et $m - 2$, afin d'englober les valeurs paires et impaires des coefficients des arcs multiples des arcs fondamentaux. Toutes ces combinaisons sont contenues dans l'expression générale suivante, relative aux composantes engendrées par les non-linéarités transcendantes, à la fois paires et impaires, pour un développement jusqu'à l'ordre $m - 1$:

$$\cos(k_1 \theta_1 \pm k_2 \theta_2 \pm k_3 \theta_3 \dots \dots \pm k_q \theta_q) \quad (15)$$

avec $k_1, k_2, k_3 \dots \dots k_q$, des entiers positifs, compris entre 0 et $m - 1$, et dont la somme $S = k_1 + k_2 + k_3 \dots + k_q$ est comprise, elle aussi, entre 0 et $m - 1$.

Par exemple, pour $k_1 = k_2 = k_3 \dots = k_q = 0$, $\cos(0)$ se rapporte à la valeur moyenne, dont chaque terme du développement (12) amène une partie, s'ajoutant à i_0 de (3).

Seules les puissances à n pairs permettent l'annulation de tous les coefficients k_1 à k_q de (15), car $b_1, b_2, b_3, \dots b_q$, de (13) doivent être chacun pair, pour que la somme sous \sum correspondante soit nulle, avec certaines combinaisons de signes deux à deux.

LES NON-LINEARITES ET LEURS EFFETS - UN ALGORITHME POUR LE CALCUL DES COMPOSANTES DU SIGNAL, A PARTIR DES POINTS D'UN TRACE DE COURBE.

Les harmoniques de 1 à m - 1 apparaissent pour chaque arc fondamental θ_1 à θ_q , lorsque tous les coefficients k autres que celui de l'arc concerné dans (15) sont nuls. Il est nécessaire alors que les exposants, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_q$ de (12) soient tous pairs, sauf celui se rapportant à l'arc considéré pour les harmoniques, qui peut être impair.

Les amplitudes des composantes contenues dans (15) sont calculées d'après (3) et (12), sachant que chaque terme de (3) provoque un développement du type (12), avec des composantes communes, mais néanmoins engendrées séparément. L'amplitude totale dépend donc de la somme des termes de forme identique trouvés à tous les niveaux de puissance et de combinaison. Chaque terme trouvé séparément a pour amplitude :

$$C_n \frac{n! a_1^{b_1} a_2^{b_2} a_3^{b_3} \dots a_q^{b_q}}{2^{n-1} b_1! b_2! b_3! \dots b_q!} \quad (16)$$

La phase est reconstituée d'après (7) et (15), en revenant aux variables d'origine, avec l'emploi de (11).

III - ASSISTANCE DE L'ORDINATEUR

Pour les valeurs m et q qui peuvent être envisagées dans le cadre de la présente étude, seul l'ordinateur est capable d'accomplir les nombreuses opérations, qui seraient impraticables autrement.

On donne au début du traitement les points du tracé de courbe, soit en intraduisant des résultats de mesure, dans le cas d'une fonction non connue analytiquement, soit en faisant calculer m points d'une fonction exprimée mathématiquement, dans le cas d'une étude d'après des principes bien établis.

On indique en cours de traitement le nombre et les amplitudes des composantes d'entrée. Sur la base des combinaisons possibles données par (15), on indique les composantes de sortie dont le calcul est demandé pour l'étude, car il n'est pas question de faire éditer toutes les composantes effectives, en général beaucoup trop nombreuses.

L'amplitude des composantes désirées est fournie à l'issue du traitement.

L'exemple suivant, utilisant les procédés ci-avant, fera mieux comprendre le processus. Des "posters" illustrent par ailleurs des exemples plus complets, dans les conditions réelles d'utilisation du programme ordinateur.

Exemple :

Pour ne pas devoir mettre en évidence trop de combinaisons et de termes dans les explications, on se limite au cas indiqué ci-après :

- caractéristique : figure 3, tableau figure 2, point de repos pour $\Delta v = 0$
- signal d'entrée : $\Delta v = v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2$
avec $v_1 = 1$ et $v_2 = 0,5$

Le processus de questions de l'ordinateur, et de réponse de l'opérateur est le suivant :

- a) nombre (impair) de points? : 11
- b) v et i pour chaque point, dans l'ordre incrémental?:
- 5,1 - 4,2 - 3,4 - 2,8 - 1,16 0,32
1,64 2,128 3,256 4,512 5,1024
- c) nombre de composantes d'entrée? : 2
- d) amplitude (dans l'ordre $v_1 v_2$) ? : 1 , 0,5
- e) composantes désirées en sortie?:
0 + 0 1 + 0 0 + 1 1 + 1 2 + 1
1 + 2 1 + 0 0 + 2 5 + 0 FIN

Pour les points b) et d), le point d'interrogation est posé autant de fois que le nombre a) ou c) le nécessite. Au point e), les questions sont arrêtées par la réponse "FIN". Le premier chiffre de chaque groupe tapé correspond ici à K_1 de (15), et le deuxième à K_2 , avec seulement θ_1 et θ_2 .

Les réponses tapées correspondent successivement au désir de connaître les amplitudes des composantes suivantes :

- la valeur moyenne
- le fondamental en $\cos \theta_1$
- le fondamental en $\cos \theta_2$
- le terme en $\cos (\theta_1 \pm \theta_2)$
- le terme en $\cos (2\theta_1 \pm \theta_2)$
- le terme en $\cos (\theta_1 \pm 2\theta_2)$
- l'harmonique 2 en $\cos 2\theta_1$
- l'harmonique 2 en $\cos 2\theta_2$
- l'harmonique 10 en $\cos 5\theta_1$

D'autres réponses pourraient être introduites avant le mot FIN.

A la suite des réponses a) et b) ci-avant, l'ordinateur compile les points de la courbe et établit le tableau des différences de la figure 2, après quoi les valeurs de la ligne horizontale moyenne sont mémorisées. Le calcul est ensuite fait selon (5), pour aboutir aux coefficients C_0 à C_{10} de (3), donnés plus haut, à la suite de la figure 4.

Après les réponses aux questions c), d), e), ci-avant, étant alors connus les divers K_1 et K_2 , la recherche est faite, au niveau des puissances du développement (12), des termes qui correspondent aux combinaisons indiquées. Comme il a déjà été décrit au chapitre II, ces combinaisons ne peuvent être trouvées que pour des valeurs déterminées des exposants de (12). Dans le présent exemple, les exposants étant b_1 et b_2 , la correspondance K_1 , b_1 ou K_2 , b_2 doit être: pair pour pair, ou impair pour impair. Cela est évident au vu de (14), où les restes des sommes, ou différences, d'un même arc, dépendent des signes, mais aussi du nombre de termes, donc ici de b_1 , pour θ_1 , et b_2 , pour θ_2 .

Sachant que, pour chaque valeur de n, les valeurs b_1 et b_2 , correspondant à chaque combinaison rencontrée, doivent être telles que $b_1 + b_2 = n$, le calcul des composantes sera fait à partir des termes suivants, affectés des valeurs des coefficients particuliers, et de la puissance 2^{m-1} de (16) :

$$i_{moy} = i_0 + C_{10} (126 a_1^{10} a_2^0 + 3150 a_1^8 a_2^2 + 12600 a_1^6 a_2^4 + 12600 a_1^4 a_2^6 + 3150 a_1^2 a_2^8 + 126 a_1^0 a_2^{10}) / 512 + C_8 (35 a_1^8 a_2^0 + 560 a_1^6 a_2^2 + 1260 a_1^4 a_2^4 + 560 a_1^2 a_2^6 + 35 a_1^0 a_2^8) / 128 + C_6 (10 a_1^6 a_2^0 + 90 a_1^4 a_2^2 + 90 a_1^2 a_2^4 + 10 a_1^0 a_2^6) / 32 + C_4 (3 a_1^4 a_2^0 + 12 a_1^2 a_2^2 + 3 a_1^0 a_2^4) / 8 + C_2 (a_1^2 a_2^0 + a_1^0 a_2^2) / 2$$



LES NON-LINEARITES ET LEURS EFFETS - UN ALGORITHME POUR LE CALCUL DES COMPOSANTES DU SIGNAL, A PARTIR DES POINTS D'UN TRACE DE COURBE.

$$i_{\cos\theta_1} = C_9 (126 a_1^2 a_2^2 + 2520 a_1^3 a_2^2 + 7560 a_1^4 a_2^2 + 5040 a_1^5 a_2^2 + 630 a_1^6 a_2^2) / 256 + C_7 (35 a_1^3 a_2^2 + 420 a_1^4 a_2^2 + 630 a_1^5 a_2^2 + 140 a_1^6 a_2^2) / 64 + C_5 (10 a_1^3 a_2^2 + 60 a_1^4 a_2^2 + 30 a_1^5 a_2^2) / 16 + C_3 (3 a_1^3 a_2^2 + 6 a_1^4 a_2^2) / 4 + C_1 a_1^4 a_2^2$$

$$i_{\cos\theta_2} = C_9 (126 a_1^2 a_2^2 + 2520 a_1^3 a_2^2 + 7560 a_1^4 a_2^2 + 5040 a_1^5 a_2^2 + 630 a_1^6 a_2^2) / 256 + C_7 (35 a_1^3 a_2^2 + 420 a_1^4 a_2^2 + 630 a_1^5 a_2^2 + 140 a_1^6 a_2^2) / 64 + C_5 (10 a_1^3 a_2^2 + 60 a_1^4 a_2^2 + 30 a_1^5 a_2^2) / 16 + C_3 (3 a_1^3 a_2^2 + 6 a_1^4 a_2^2) / 4 + C_1 a_1^4 a_2^2$$

$$i_{\cos(\theta_1 \pm \theta_2)} = C_{10} (1260 a_1^4 a_2^2 + 12600 a_1^3 a_2^2 + 25200 a_1^2 a_2^2 + 12600 a_1^2 a_2^2 + 1260 a_1^3 a_2^2) / 512 + C_8 (280 a_1^4 a_2^2 + 1680 a_1^3 a_2^2 + 1680 a_1^2 a_2^2 + 280 a_1^4 a_2^2) / 128 + C_6 (60 a_1^4 a_2^2 + 180 a_1^3 a_2^2 + 60 a_1^5 a_2^2) / 32 + C_4 (12 a_1^4 a_2^2 + 12 a_1^3 a_2^2) / 8 + C_2 a_1^4 a_2^2$$

$$i_{\cos(2\theta_1 \pm \theta_2)} = C_9 (1260 a_1^4 a_2^2 + 5040 a_1^5 a_2^2 + 3780 a_1^6 a_2^2 + 504 a_1^7 a_2^2) / 256 + C_7 (210 a_1^4 a_2^2 + 420 a_1^5 a_2^2 + 105 a_1^6 a_2^2) / 64 + C_5 (30 a_1^4 a_2^2 + 20 a_1^5 a_2^2) / 16 + C_3 3 a_1^2 a_2^2 / 4$$

$$i_{\cos(\theta_1 \pm 2\theta_2)} = C_9 (504 a_1^4 a_2^2 + 3780 a_1^5 a_2^2 + 5040 a_1^6 a_2^2 + 1260 a_1^7 a_2^2) / 256 + C_7 (105 a_1^4 a_2^2 + 420 a_1^5 a_2^2 + 210 a_1^6 a_2^2) / 64 + C_5 (20 a_1^4 a_2^2 + 30 a_1^5 a_2^2) / 16 + C_3 3 a_1^4 a_2^2 / 4$$

$$i_{\cos 2\theta_1} = C_{10} (210 a_1^4 a_2^2 + 5040 a_1^5 a_2^2 + 18900 a_1^6 a_2^2 + 16800 a_1^7 a_2^2 + 3150 a_1^8 a_2^2) / 512 + C_8 (56 a_1^4 a_2^2 + 840 a_1^5 a_2^2 + 1680 a_1^6 a_2^2 + 560 a_1^7 a_2^2) / 128 + C_6 (15 a_1^4 a_2^2 + 120 a_1^5 a_2^2 + 90 a_1^6 a_2^2) / 32 + C_4 (4 a_1^4 a_2^2 + 12 a_1^5 a_2^2) / 8 + C_2 a_1^4 a_2^2 / 2$$

$$i_{\cos 2\theta_2} = C_{10} (210 a_1^4 a_2^2 + 5040 a_1^5 a_2^2 + 18900 a_1^6 a_2^2 + 16800 a_1^7 a_2^2 + 3150 a_1^8 a_2^2) / 512 + C_8 (56 a_1^4 a_2^2 + 840 a_1^5 a_2^2 + 1680 a_1^6 a_2^2 + 560 a_1^7 a_2^2) / 128 + C_6 (15 a_1^4 a_2^2 + 120 a_1^5 a_2^2 + 90 a_1^6 a_2^2) / 32 + C_4 (4 a_1^4 a_2^2 + 12 a_1^5 a_2^2) / 8 + C_2 a_1^4 a_2^2 / 2$$

$$i_{\cos 5\theta_1} = C_9 (36 a_1^5 a_2^2 + 504 a_1^6 a_2^2 + 756 a_1^7 a_2^2) / 256 + C_7 (7 a_1^5 a_2^2 + 42 a_1^6 a_2^2) / 64 + C_5 a_1^5 a_2^2 / 16$$

Les calculs effectués donnent les sommes suivantes, pour chaque terme d'ordre décroissant ci-avant : ①

$$i_{moy} = 32 + 1,028 \times 10^{-4} + 8,48 \times 10^{-5} + 5,9 \times 10^{-3} + 0,238 + 4,8 = 37,048561$$

$$i_{\cos\theta_1} = 2,11 \times 10^{-4} + 1,33 \times 10^{-3} + 7,18 \times 10^{-2} + 1,997 + 22,181 = 24,252$$

$$i_{\cos\theta_2} = 2,44 \times 10^{-5} + 1,19 \times 10^{-3} + 6,1 \times 10^{-2} + 1,498 + 11,09 = 12,651047$$

$$i_{\cos\theta_1 \pm \theta_2} = 1,63 \times 10^{-3} + 1,3 \times 10^{-4} + 8,38 \times 10^{-3} + 6,288 + 3,843 = 4,1406751$$

$$i_{\cos 2\theta_1 \pm \theta_2} = 1,44 \times 10^{-5} + 8,21 \times 10^{-4} + 3,67 \times 10^{-2} + 0,665 = 0,70353036$$

$$i_{\cos\theta_1 \pm 2\theta_2} = 1,11 \times 10^{-5} + 5,91 \times 10^{-4} + 2,34 \times 10^{-2} + 0,3329 = 0,35696539$$

$$i_{\cos 2\theta_1} = 1,57 \times 10^{-6} + 1,22 \times 10^{-4} + 7,8 \times 10^{-3} + 0,269 + 3,84 = 4,120852$$

$$i_{\cos 2\theta_2} = 1,15 \times 10^{-6} + 8,34 \times 10^{-5} + 4,66 \times 10^{-3} + 0,125 + 0,96 = 1,09068354$$

$$i_{\cos 5\theta_1} = 3,78 \times 10^{-6} + 1,28 \times 10^{-4} + 2,67 \times 10^{-3} = 0,00280733303$$

Les termes d'ordre 10, 9 et 8 influent assez peu sur le résultat, car la fonction (4) est monotone. Elle correspond peu à la pratique, où les fonctions transcendentes s'infléchissent toujours, comme il est dit dès le début du chapitre 1.

La formation des coefficients des termes dans l'expression des composantes, faite plus haut, tient compte des règles suivantes :

Chaque coefficient est la somme des coefficients numériques exprimés par (12), soient : $n! / b_1! b_2! \dots b_q!$ ces coefficients. Le nombre de termes de la somme de ces coefficients est établi par les lois de permutation des θ de l'expression (14).

En prenant comme exemple, i moy, la somme des θ doit être nulle, c'est-à-dire que, pour $b_1, b_2, b_3 \dots b_q$ donnés, chacun pair, il existe autant de θ négatifs que de positifs. On trouve alors, pour $\theta_1 : b_1! / [(b_1/2)!]^2$ permutations possibles. De même, pour $\theta_2 : b_2! / [(b_2/2)!]^2$ permutations, etc... Le nombre 3150 du 2ème terme de i moy, par exemple, correspond à l'ordre $n = 10$, et est formé à partir de $b_1 = 2$ et $b_2 = 8$, soit, pour le coefficient numérique : $10! / 2! 8! = 45$, pour les permutations de $\theta_1 : 1$ ②, et, pour les permutations de $\theta_2 : 8! / (4!)^2 = 70$. Le produit 70×45 est bien égal à 3150.

A titre de deuxième exemple, le nombre 7560, 3è terme de $i_{\cos\theta_1}$, d'ordre 9, avec $b_1 = 5$ et $b_2 = 4$, est formé du coefficient numérique : $9! / 5! 4! = 126$, ainsi que du nombre de permutations de $\theta_2 : 4! / (2!)^2 = 6$, puis du nombre de permutations de $\theta_1 : 4! / (2!)^2 + 4! / 3! 1! = 10$, soit un produit $126 \times 6 \times 10 = 7560$.

- ① Les sommes indiquées tiennent compte de la totalité des décimales des termes d'origine, ceux-ci figurant ici avec une longueur réduite.
- ② Le premier θ_1 étant nécessairement positif, seule existe la combinaison $\theta_1 - \theta_1$, pour $b_1 = 2$.

Il faut savoir, pour la valeur 10 ci-avant, que les 5 termes en θ_1 doivent avoir une somme égale à θ_1 , ou à $-\theta_1$. Le premier terme étant toujours positif, les permutations ne portent que sur 4 termes. Pour avoir θ_1 , il existe : $4! / (2!) = 6$ permutations de 2 θ_1 positifs et 2 θ_1 négatifs. Il s'ajoute à ce nombre : $4! / 3! 1! = 4$ permutations de 1 θ_1 positif, et 3 θ_1 négatifs.

Les composantes calculées ci-avant sont des intermodulations ou des harmoniques. La transmodulation est calculée, elle, en considérant dans le signal d'entrée, tel que (7), 4 fonctions sinusoïdales, dont 3 pour le signal brouilleur modulé sinusoïdalement (porteuse + 2 bandes), et 1 pour le signal utile non modulé.

La modulation en sortie apparaît alors en isolant des calculs, les bandes latérales fondamentales et harmoniques, existant, du fait de la non-linéarité de modulation, avec la porteuse utile. Dans l'interprétation des résultats, avec les signaux reconstitués en fonction de t plutôt que de θ , il importe de bien considérer la phase exacte des bandes latérales du signal brouilleur modulé, appliqué à l'entrée.

La non-linéarité de transmodulation apparaît bien dans l'expression des composantes de courant plus haut, où tous les termes comportent le produit $a_1^{b_1} a_2^{b_2}$, tel que l'amplitude de ces composantes, y compris i moy, est bien fonction de l'amplitude de chacun des signaux d'entrée.

En prenant, par exemple, l'expression de $i_{\cos\theta_1}$, on calcule que, pour $v_2 = 1$, ce courant est égal à 26,45, tandis que, pour $v_2 = 0$, il est égal à 23,54. Cet effet d'asymétrie met bien en évidence la non-linéarité de transmodulation, provoquée ici par le signal $v_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, modulé en amplitude, au taux de 100%.