

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

SYNCHRONISATION D'UN SIGNAL NUMERIQUE PAR FILTRAGE NON-LINEAIRE RECURSIF
SYNCHRONIZATION OF DIGITAL DATA BY RECURSIVE NON-LINEAR FILTERING

P.R. HIRSCHLER et J.P. PERONNET

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS 46 Rue Barrault 75634 PARIS Cedex 13

RESUME

Un des aspects les plus importants dans la réception et la régénération des signaux numériques est la synchronisation de la base de temps du récepteur à celle de l'onde reçue.

Dans la problème étudié, le signal reçu est échantillonné :

$$y_n = \sum_k \psi(t_n; \theta_n; a_k) + b_n$$

où a_k représente la polarité du $k^{\text{ième}}$ symbole émis, θ_n le décalage de phase entre les horloges, ψ la forme d'onde de base nulle sauf sur un intervalle $(0, T_b)$ où T_b est la durée d'un symbole binaire, et $\{b_n\}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Nous développons un algorithme de filtrage numérique quasi optimal permettant d'effectuer simultanément la synchronisation et la détection du train binaire. Le modèle choisi est très général et permet de traiter le problème de la gigue. L'algorithme de calcul est du type récursif et se prête bien à une réalisation sous forme de microprocesseurs.

SUMMARY

One of the most important aspects in receiving and regenerating digital signals is the synchronization of the receiver clock to the data clock.

In the problem considered, the received signal is sampled :

$$y_n = \sum_k \psi(t_n; \theta_n; a_k) + b_n$$

where a_k is the polarity of the k th transmitted symbol, θ_n is the phase shift between the clocks, ψ is the signal waveshape which is zero except on a interval $(0, T_b)$ where T_b is symbol time, and $\{b_n\}$ is a sequence of independent gaussian random variables.

We develop a quasi-optimal digital filtering algorithm realizing simultaneously the synchronization and detection of the binary data. The model chosen is general and permits the treatment of timing jitter. The recursive computation scheme seems well-fitted to microprocessor implementation.



SYNCHRONISATION D'UN SIGNAL NUMERIQUE PAR FILTRAGE NON-LINEAIRE RECURSIF
SYNCHRONIZATION OF DIGITAL DATA BY RECURSIVE NON-LINEAR FILTERING

I. PRESENTATION DU PROBLEME

La conception d'une chaîne de réception optimale, pour des données numériques, fait intervenir différents organes dont le fonctionnement nécessite une connaissance précise de la cadence et de la position des transitions successives. La plupart des synchroniseurs travaillent en bande de base, sur le train numérique bruité, issu de la chaîne de démodulation. Ce sont souvent des filtres analogiques qui mettent en oeuvre des boucles à verrouillage de phase, capables de fournir aux organes de détection du message et de régénération du signal une estimation fine et rapide des instants de transition.

Toutefois, un certain nombre d'inconvénients sont liés à la technologie utilisée. Citons en particulier les instabilités d'oscillateurs, la présence de bruit d'origine thermique, l'apparition de dérives dues au vieillissement des organes.

Il semble dès lors préférable, compte tenu de la nature discrète des signaux, de concevoir des synchroniseurs entièrement numériques dont la réalisation est envisageable sous forme de microprocesseurs même pour des trains numériques à débit élevé.

Les techniques numériques, les plus employées actuellement, semblent se répartir en deux classes :

Les premières sont basées sur la théorie de la détection, et utilisent le critère du maximum de vraisemblance. Elles nécessitent, dans leur réalisation, l'intervention d'une mémoire [1].

Les deuxièmes résolvent une équation de Fokker-Planck pour obtenir la densité de probabilité des variables à estimer [2].

Le point commun à toutes ces méthodes est la formulation de ce problème d'estimation sous la forme d'un test entre un nombre fini d'hypothèses.

Nous nous proposons de développer une technique d'estimation numérique capable d'effectuer, en temps réel, de façon quasi optimale et simultanée la synchronisation et la détection d'un train binaire, sous les contraintes suivantes :

- La synchronisation doit être faite directement sur les symboles d'information. Ceci exclut, en

particulier, toute utilisation de préfixes, suffixes, ou autre adjonction de signaux spéciaux pour faciliter la synchronisation, et qui nécessitent notamment une puissance accrue, un débit réduit, ou la mise en jeu de techniques de codage.

- La méthode développée ne doit pas être basée sur la forme d'onde des symboles binaires. En particulier on ne fera pas d'hypothèses sur la largeur de bande des signaux.

- La méthode doit être adaptée au problème de la gigue ; c'est-à-dire être capable d'incorporer sans grande modification l'information statistique dont on dispose sur la gigue.

- Le système doit avoir une performance globale, en synchronisation et détection, quasi optimale.

II. MODELISATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

Nous considérons un train numérique, perturbé par un bruit additif gaussien, utilisant un codage de type NRZ à deux niveaux, $-A$ et $+A$. Un oscillateur local à la réception fournit une horloge de même fréquence, $f_b = 1/T_b$, que l'horloge d'émission. Le signal reçu est échantillonné par l'horloge de réception et des "sous-horloges" de même fréquence, régulièrement décalées en phase. Par exemple, dans le cas de trois "sous-horloges", nous avons le schéma ci-dessous :

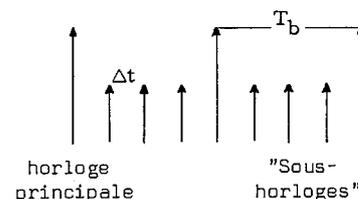


Figure 1

Désormais nous ne ferons plus de distinction entre ces différentes horloges. Dans le développement qui suit, l'indice k a trait aux symboles binaires, tandis que l'indice n sera réservé aux échantillons. Nous serons amenés à distinguer les deux types de problème de synchronisation suivants :

a) Le décalage entre les horloges de réception et d'émission est constant dans le temps. Le problème est donc l'estimation de l'instant d'arrivée d'un train numérique.

SYNCHRONISATION D'UN SIGNAL NUMERIQUE PAR FILTRAGE NON-LINEAIRE RECURSIF
 SYNCHRONIZATION OF DIGITAL DATA BY RECURSIVE NON-LINEAR FILTERING

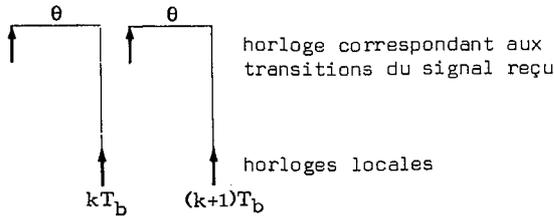


Figure 2

L'hypothèse faite s'exprime ainsi :

$$\theta(n+1) = \theta(n) = \theta(o) \text{ constant.}$$

b) Le décalage entre l'horloge de réception et les instants de transition du train numérique est variable dans le temps. C'est en particulier le cas si le signal reçu subit les effets d'une gigue sur les instants de transition.

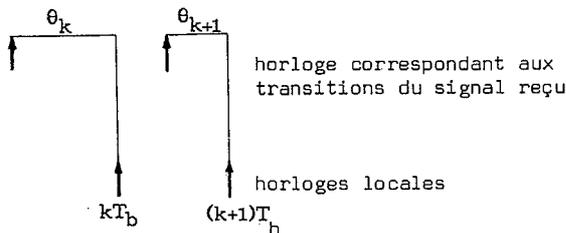


Figure 3

Dans ce cas, {θ_n} est un processus aléatoire discret représentant les effets de la gigue aux instants d'échantillonnage. Nous supposons que ce processus est gaussien markovien. Dès lors, nous pouvons écrire θ_n comme la sortie d'un filtre linéaire numérique commandé par une suite de variables aléatoires indépendantes, gaussiennes, centrées, de variance V_v. Soit, en l'absence de dynamique propre

$$\theta_{n+1} = \theta_n + V_n$$

Nous supposons que les fluctuations dues à la gigue ont une amplitude efficace faible devant la période bit, et que les variations correspondantes sont lentes devant la fréquence bit. Ceci est réalisé dans la plupart des cas, notamment en téléphonie. De sorte que

$$\sqrt{V_v} \ll T_b$$

c'est la formulation la plus générale que nous envisagerons dans ce problème de synchronisation.

Chaque échantillon d'observation est modélisé de la façon suivante :

$$y_n = y(n\Delta t) = A\epsilon_n \Psi(\theta_n ; n) + b_n$$

où

- {ε_n} est un processus aléatoire à valeurs dans {-1,1} formé à partir d'un schéma de Bernouilli qui modélise une suite binaire décorrélée ; ceci constitue en fait le cas le plus défavorable pour le problème de détection.

- Ψ est une fonction dérivable de période T_b, dont chaque arche modélise la forme d'onde du symbole binaire reçu, et qui sera précisé ultérieurement.

- {b_n} est une suite de variables aléatoires indépendantes, gaussiennes, centrées, de variance $\frac{N_0}{2}$.

Notons que l'observation y_n est une fonction non linéaire du déphasage θ_n.

Après avoir considéré plusieurs formulations en variables d'état, nous avons été conduits au choix suivant :

Equations dynamiques.

$$(I) \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \alpha V_n \\ X_{n+1} = X_n [1 - f_1(\theta_n ; n)] + f_1(\theta_n ; n) W_n \end{cases}$$

où X_n est un processus aléatoire gaussien markovien, engendré par une suite {W_n} de variables aléatoires gaussiennes centrées, de variance V_w.

Le processus ε_n, représentant l'information, est exprimé sous la forme non linéaire suivante :

$$\epsilon_n = \text{sign } X_n$$

La fonction f₁(θ_n ; n) est du type logique, prenant les valeurs 1 ou 0 selon qu'il existe ou non une transition entre les instants n et n+1.

Ceci nous conduit à l'équation d'observation suivante :

$$(II) y_n = A \text{sign}(X_n) \cdot \Psi(\theta_n ; n)$$



SYNCHRONISATION D'UN SIGNAL NUMERIQUE PAR FILTRAGE NON-LINEAIRE RECURSIF
SYNCHRONIZATION OF DIGITAL DATA BY RECURSIVE NON-LINEAR FILTERING

III. ALGORITHME RECURSIF D'ESTIMATION

Pour les raisons indiquées précédemment, nous développons un algorithme récursif non linéaire, qui est tout à fait satisfaisant pour les niveaux de bruit envisagés. L'algorithme choisi est le filtre non linéaire au 1er ordre, aussi connu sous le nom de K.B.G.

- Equations de prédiction à court terme

$$\hat{\theta}_{n+1|n} = \hat{\theta}_n$$

$$\hat{X}_{n+1|n} = \hat{X}_n [1 - f_1(\hat{\theta}_n; n)]$$

- Equations de filtrage

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_{n+1|n} + K_{\theta}(n+1) [y_{n+1} - A \text{sign} \hat{X}_{n+1|n} \cdot \Psi(\hat{\theta}_{n+1|n}; n+1)]$$

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_{n+1|n} + K_X(n+1) [y_{n+1} - A \text{sign} \hat{X}_{n+1|n} \cdot \Psi(\hat{\theta}_{n+1|n}; n+1)]$$

- Gain du filtre

$$K_{\theta}(n+1) = \frac{2A}{N_0} (V_{n+1}^{k1} \cdot DH_1 + V_{n+1}^{l2} \cdot DH_2)$$

$$K_X(n+1) = \frac{2A}{N_0} (V_{n+1}^{l2} \cdot DH_1 + V_{n+1}^{22} \cdot DH_2)$$

- Propagation de la variance

$$\vartheta_n = V_{n+1|n}$$

$$\vartheta_n^{11} = V_n^{11} + \alpha V_n$$

$$\vartheta_n^{12} = V_n^{12} [1 - f_1(\hat{\theta}_n; n)]$$

$$\vartheta_n^{22} = V_n^{22} [1 - f_1(\hat{\theta}_n; n)] + V_w f_1(\hat{\theta}_n; n)$$

$$V_{n+1}^{11} = \frac{DH_2^2 \cdot \det \vartheta_n + \frac{N_0}{2A^2} \cdot \vartheta_n^{11}}{DH_1^2 \cdot \vartheta_n^{11} + 2DH_1 \cdot DH_2 \cdot \vartheta_n^{12} + DH_2^2 \cdot \vartheta_n^{22} + \frac{N_0}{2A^2}}$$

$$V_{n+1}^{12} = \frac{-DH_1 \cdot DH_2 \cdot \det \vartheta_n + \frac{N_0}{2A^2} \cdot \vartheta_n^{12}}{DH_1^2 \cdot \vartheta_n^{11} + 2DH_1 \cdot DH_2 \cdot \vartheta_n^{12} + DH_2^2 \cdot \vartheta_n^{22} + \frac{N_0}{2A^2}}$$

$$V_{n+1}^{22} = \frac{DH_1^2 \cdot \det \vartheta_n + \frac{N_0}{2A^2} \cdot \vartheta_n^{22}}{DH_1^2 \cdot \vartheta_n^{11} + 2DH_1 \cdot DH_2 \cdot \vartheta_n^{12} + DH_2^2 \cdot \vartheta_n^{22} + \frac{N_0}{2A^2}}$$

où DH_1 et DH_2 sont les dérivées partielles de la fonction définie par (II) :

$$DH_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi(\hat{\theta}_{n+1|n}; n+1)) \cdot \text{sign} \hat{X}_{n+1|n}$$

$$DH_2 = \frac{\partial}{\partial X} (\text{sign} \hat{X}_{n+1|n}) \cdot \Psi(\hat{\theta}_{n+1|n}; n+1)$$

On vérifie aisément par récurrence que les matrices V et ϑ sont symétriques, défini-positives.

Nous obtenons par ces formules un filtre quasi-optimal qui effectue simultanément les opérations de synchronisation et de détection.

IV. TRAITEMENT DES NON-LINEARITES

L'algorithme décrit précédemment suppose l'existence des dérivées suivantes, en presque tout point de \mathcal{R} :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\theta_n; n), \quad \frac{\partial \text{Sign} X_n}{\partial X}$$

- La fonction sign est donc une approximation dérivable de la fonction en escalier qui vaut -1 sur \mathcal{R}^- et +1 sur \mathcal{R}^+ . Nous avons choisi la forme suivante qui représente convenablement la non-linéarité :

$$\text{sign } x = \frac{2}{\pi} \text{Arctg } Dx$$

où D est un paramètre qui permet de faire varier la pente de la fonction sign au point ($x = 0$). D'après l'équation (I), les points X_n se répartissent autour de l'origine selon une loi normale de variance V_w . Nous imposons donc la contrainte

$$D \geq \frac{1}{\sqrt{V_w}}$$

- La fonction Ψ est périodique, de période T_b . Chacune de ses arches représente la forme de l'impulsion binaire reçue, en l'absence de bruit. Nous imposons à Ψ d'être dérivable partant sauf éventuellement sur l'ensemble dénombrable de points $\{0, T_b, 2T_b, \dots\}$ où elle peut même ne pas être continue (discontinuité par saut, avec limite à droite et limite à gauche).

Nous avons particulièrement étudié le cas d'impulsions "rectangulaires" de largeur T_b . Afin d'approcher au mieux le train binaire, nous avons choisi le faisceau de fonctions périodiques dont l'arche élémentaire est :

SYNCHRONISATION D'UN SIGNAL NUMERIQUE PAR FILTRAGE NON-LINEAIRE RECURSIF
 SYNCHRONIZATION OF DIGITAL DATA BY RECURSIVE NON-LINEAR FILTERING

$$\psi_c(\xi) = \begin{cases} \frac{(c+1) \sin \pi \xi / T_b}{1 + c \cdot \sin \pi \xi / T_b}, & \xi \in [0, T_b] \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

La fonction Ψ est alors définie par

$$\Psi(\theta_n; n) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_c(\xi - nT_b)$$

Le paramètre C doit être choisi en fonction des deux considérations suivantes :

(i) Plus C est grand, plus la fonction ψ_c est proche de la fonction en escalier caractéristique de l'intervalle $[0, T_b]$. L'écart entre ψ_c et ce rectangle peut être évalué par un critère du type

$$(III) \quad \eta_1 = 1 - \int_0^{T_b} \psi_c^2(\xi) \cdot d\xi$$

ou

$$(IV) \quad \eta_2 = \int_0^{T_b} [1 - \psi_c(\xi)]^2 d\xi$$

(III) représente la différence d'énergie entre la forme d'onde ψ et le signal rectangulaire. (IV) représente l'écart quadratique existant entre ces deux fonctions.

Il convient de prendre C suffisamment grand pour que l'approximation envisagée soit valable. Nous reviendrons sur le degré de précision obtenu, en étudiant la figure 4 où sont représentées en pourcentage les expressions η_1 et η_2 .

(ii) Le signal ψ_c a un contenu spectral voisin de $\sin \pi \xi / T_b$ vers lequel il tend lorsque $C \rightarrow \infty$. Toutefois, les fréquences élevées prennent, dans ce spectre, une place croissante avec C , comme l'indique la figure 4 où sont représentés en trait plein les pourcentages d'énergie de ψ_c contenus en dehors d'une bande de fréquence $[-N/T_b, N/T_b]$.

Soit $\rho_N(c)$ la courbe de pourcentage d'énergie de ψ_c au-delà de la fréquence N/T_b .

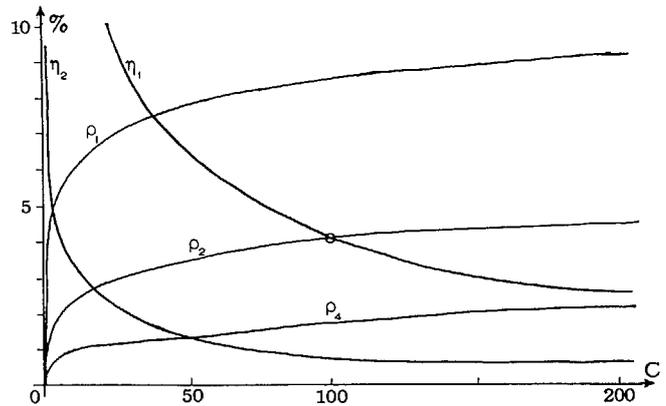


Figure 4

Ce diagramme permet de choisir la constante C lorsqu'on se fixe à priori ρ et η . On en déduit alors le nombre d'échantillons $2N$ par symbole binaire.

V. RESULTATS ET CONCLUSIONS

- Bien que les opérations de synchronisation et de détection soient effectuées simultanément, le comportement du filtre est étudié, dans chacune de ces phases, à l'aide de critères différents : vitesse d'acquisition et stabilité en ce qui concerne la synchronisation ; probabilité d'erreur par bit et probabilité d'erreur conditionnelle en présence de gigue en fonction du rapport signal à bruit, pour la détection.

L'étude des performances par simulations de Monte-Carlo pour la mesure de taux d'erreurs de l'ordre de 10^{-6} nécessitant un nombre d'expériences considérable, l'analyse complète des résultats en présence de gigue n'est pas encore disponible. Nous présenterons donc ensemble ces résultats avec et sans gigue. Signalons que les performances dans le premier cas sont excellentes avec, notamment, un temps moyen de synchronisation de l'ordre de vingt symboles binaires et une stabilité remarquable du filtre en dépit de sa structure récurrente.

- Ces facteurs ne sont pas les seuls qui soient pris en considération ; la largeur de bande du signal, la fréquence d'échantillonnage, l'immunité aux interférences et bruits, le coût et la complexité sont des aspects pratiques importants.

En ce qui concerne la forme d'onde du symbole, nous nous sommes placés dans des conditions peu favorables en choisissant un signal carré. Toutefois, en choisissant finalement $C = 100$ pour le point de



SYNCHRONISATION D'UN SIGNAL NUMERIQUE PAR FILTRAGE NON-LINEAIRE RECURSIF
SYNCHRONIZATION OF DIGITAL DATA BY RECURSIVE NON-LINEAR FILTERING

fonctionnement, nous avons $\eta_1 = 4,1 \%$ et $\eta_2 = 0,6 \%$ comme l'indique la figure 4. On dispose dans ce cas de quatre échantillons par symbole binaire.

Les phénomènes de bruit de quantification et erreurs d'arrondi propres aux systèmes numériques sont des inconvénients qu'il reste à évaluer. Toutefois le développement considérable ces dernières années des techniques LSI rend la numérisation techniquement et économiquement possible dans de nombreuses applications, offrant les avantages connus de précision, stabilité, fiabilité et compatibilité avec un nombre grandissant d'interfaces numériques.

VI. REFERENCES

McBRIDE A.L., SAGE A.P., "Optimum Estimation of Bit Synchronization", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. AES - 5, n° 3, mai 1969.

LEE G.M., KOMO J.J., "PCM Bit Synchronization and Detection by Nonlinear Filter Theory", IEEE Transactions on Communication Technology, vol. COM - 18, n° 6, décembre 1970.

SAGE A.P., MELSA J.L., Estimation Theory with Applications to Communications and Control, McGraw - Hill, 1971.