

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

81/1



NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

RENDEMENT ET DIRECTIVITE D'UNE ANTENNE PARAMETRIQUE EMETTRICE

D. ODERO

CIT/ALCATEL 1 AVENUE ARISTIDE BRIAND ARCUEIL

RESUME

Le calcul de la pression acoustique BF d'une antenne paramétrique ainsi que son rendement de conversion peut se faire en utilisant l'équation tridimensionnelle de LIDTHILL-WESTERVELT qui prend en compte les effets non-linéaires du deuxième ordre.

Lorsque la puissance acoustique HF émise par le transducteur devient élevée, cette équation n'est plus valable et il est alors nécessaire d'utiliser l'équation unidimensionnelle de BURGERS.

Nous présentons ici une résolution de cette dernière équation dans le cas de l'émission paramétrique pour des ondes HF planes ou sphériques. Nous développons une solution exacte et une solution approchée utilisant la méthode de la phase stationnaire.

Nous présentons également une solution numérique de l'équation de LIDTHILL-WESTERVELT tenant compte des fortes non-linéarités par l'introduction d'un facteur d'extra-atténuation. Nous donnons enfin une solution analytique de cette dernière équation dans le cas où l'observateur est loin de la zone d'interaction des ondes HF et lorsque le facteur d'extra-atténuation peut être négligé.

Ces travaux ont été soutenus par le CETHEDC (DRME).

SUMMARY

It is possible to calculate the acoustical LF pressure amplitude of a parametric transmitting array as well as its conversion efficiency by using the three-dimensional equation of LIDTHILL-WESTERVELT which takes into account the non linear effects of the second order.

When the two high frequency primary waves transmitted by the transducer are strong, this equation is no longer valid and one must then use the BURGERS unidimensional equation.

We are presenting here a solution to this latter equation considering the case of the parametric transmission for plane and spherical primary waves. We develop both an accurate solution and an approximate solution that uses the method of the stationary phase.

We are presenting also a numerical solution to the LIDTHILL-WESTERVELT equation taking into account strong non linearities due to the introduction of an extra-attenuation factor. We then give an analytical solution to this latter equation considering the case when the observer is at long ranges from the interaction region of the primary HF waves and when the extra-attenuation factor may be neglected.

This work was sponsored by CETHEDC (DRME).



1. INTRODUCTION

On peut montrer que la propagation d'une onde unidimensionnelle d'amplitude finie dans un fluide thermovisqueux et non dispersif est décrite correctement par l'équation de BURGERS (cf. par ex. LOCKWOOD, réf.1).

Dans la première partie, nous présentons une solution exacte et une solution approchée de l'équation de BURGERS lorsque celle-ci est appliquée au cas des antennes paramétriques émettrices. Ces solutions permettent de calculer le champ acoustique BF et le rendement de conversion de ce type d'antennes, quelle que soit la puissance acoustique des deux fréquences HF émises.

Au chapitre 2, nous rappelons les formes de l'équation de BURGERS pour des ondes planes et sphériques. Au chapitre 3 nous présentons les solutions exactes et approchées pour le cas où les ondes HF sont planes, et au chapitre 4 pour le cas où elles sont sphériques. Au chapitre 5, nous appliquons ces solutions au problème des antennes paramétriques émettrices.

Dans la deuxième partie, nous étudions le diagramme de directivité BF d'une antenne paramétrique en fonction de la puissance HF émise et en fonction de la longueur de la zone d'interaction HF. Il n'est pas possible de déterminer ce diagramme au moyen de l'équation de BURGERS. Il est alors nécessaire d'utiliser l'équation tridimensionnelle de LIGHTHILL-WESTERVELT (chapitre 6). Nous appliquons cette dernière équation au cas de l'antenne constituée d'un piston circulaire. Puisque l'équation de LIGHTHILL-WESTERVELT n'est pas valable pour de forts niveaux HF, nous introduisons un facteur d'extra-atténuation supplémentaire permettant de calculer l'élargissement du diagramme BF en fonction de la puissance HF émise. Ces calculs aboutissent à une solution numérique exposée au chapitre 7. Enfin, au chapitre 8, nous présentons les solutions analytiques qu'il est possible d'obtenir dans les cas particuliers suivants : observateur loin de la zone d'interaction et niveaux HF faibles.

PREMIERE PARTIE

RENDEMENT D'UNE ANTENNE PARAMETRIQUE EMETTRICE

2. EQUATION DE BURGERS

Cette équation est généralement présentée sous forme adimensionnelle dans un système de coordonnées tel qu'elle garde la même forme pour des ondes planes, cylindriques et sphériques :

$$(1) \quad \partial W / \partial f - W \partial W / \partial y = E(f) \partial^2 W / \partial y^2$$

Pour des ondes planes :

$W = V = u/u_0$; V est la vitesse d'une tranche de fluide normalisée par rapport à son amplitude maximum.

$E(f) \equiv G^{-1}$; G est le nombre de GOLD'BERG : rapport des termes non linéaires aux termes de dissipation ($G = \beta N k_0 / \alpha_0$; β est le paramètre de non linéarité du fluide, N le rapport u_0 / C_0 , C_0 la célérité du son infinitésimale, k_0 le vecteur d'onde et α_0 le facteur d'atténuation du fluide à la fréquence f_0).

$f \equiv \sigma$; variable adimensionnelle : $\sigma = r/\bar{r}$ ou \bar{r} est la distance de formation de l'onde de choc.

$y = \omega(t-r/C_0) = \omega\tau$; variable adimensionnelle (τ est le temps retardé).

Pour des ondes sphériques

$W \equiv V\sigma/\sigma_0 = Vr/r_0$; r_0 est la distance de RAYLEIGH ($r_0 = S/\lambda_0$, où S est la surface émettrice, λ_0 la lon-

gueur d'onde à la fréquence f_0).

$$E(f) = G^{-1} \exp(f/\sigma_0) = G^{-1} r/r_0$$

Nous ne donnerons pas ici le cas ondes cylindriques, n'en ayant pas besoin dans la suite. Pour les détails cf. par ex. réf.2.

3. SOLUTION DE L'EQUATION DE BURGERS. CAS ONDES PLANES

3.1 - Solution exacte

Pour résoudre (1), on utilise la méthode de HOPF et COLE (réf. 3 et 4).

Par le changement de variables suivant $V=2(\partial\xi/\partial y)/G\xi$ l'équation (1) prend la forme d'une équation de diffusion linéaire :

$$(2) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

La solution de (2) sous forme intégrale est classique :

$$(3) \quad \xi(\sigma, y) = \sqrt{\frac{G}{4\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0(\lambda) \exp\left[-\frac{G(y-\lambda)^2}{4\sigma}\right] d\lambda$$

La fonction $\xi_0(\lambda)$ est définie par les conditions aux limites : $\xi_0(y) \equiv \xi(0, y) \quad \forall y$.

3.1.1 - Calcul de $\xi_0(\lambda)$

Plaçons nous dans le cas général où la source émet N excitations aux N fréquences $\omega_1 \dots, \omega_1 \dots, \omega_N$ également espacées ($\omega_{i+1} - \omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$) ; on a :

$$u|_{r=0} = \sum_{i=1}^N u_i \sin \omega_i t$$

où u représente la vitesse d'une tranche de fluide soumise à l'action des N excitations :
Nous posons en $r = 0$:

$$n_i = \frac{\omega_i}{\omega_0} ; y_i = \omega_0 t ; y_i = \omega_i t \quad \text{d'où} : y_i = n_i y ; V_i = u_i / u_0 ; u_0 = \sum u_i$$

où ω_0 est une fréquence de référence. Il vient :

$$V(0, y) = \sum_{i=1}^N V_i \sin n_i y$$

D'où :

$$(4) \quad \xi_0(\lambda) = \exp\left[\frac{G}{2} \sum_{i=1}^N \frac{V_i}{n_i} (1 - \cos n_i \lambda)\right]$$

3.1.2 - Calcul de $V(\sigma, y)$

L'expression (4) est introduite dans (3). On revient à la fonction $V(\sigma, y)$ et on obtient :

$$(5) \quad V(\sigma, y) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda - y}{\sigma} F(\lambda) d\lambda}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) d\lambda}$$

$$\text{Avec : } F(\lambda) = \exp\left[-\frac{G}{2} \sum_{i=1}^N \frac{V_i}{n_i} \cos n_i \lambda - G \frac{(y-\lambda)^2}{4\sigma}\right]$$

Il est possible d'évaluer analytiquement (5) pour $N=1$ (source monochromatique) et $N=2$ (source paramétrique). Le cas $N=1$ a été traité par BLACKSTOCK (réf.5). Nous avons généralisé sa solution au cas $N=2$. Nous obtenons :

$$(6) \quad V(\sigma, y) = -\frac{2}{G} \frac{N}{D}$$



Avec :

$$D = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_i \epsilon_j (-1)^{i+j} I_i(G_1) I_j(G_2) \left[\left(\cos(in_1 + jn_2)y \right) e^{-\frac{(in_1 + jn_2)^2 \sigma}{G}} + \cos\left((in_1 - jn_2)y\right) e^{-\frac{(in_1 - jn_2)^2 \sigma}{G}} \right]$$

$$N = \partial D / \partial y ; G_1 = GV_1 / 2n_1 ; G_2 = GV_2 / 2n_2$$

ϵ_i : facteurs de NEUMANN ($\epsilon_0 = 1, \epsilon_i = 2, i > 1$)

I_i : fonctions de BESSEL modifiées de première espèce. Pour une source monochromatique, on a : $V_1 = 1, V_2 = 0$ et $n_1 = n_2 = 1$. Pour $V_2 = 0, I_j(0)$ sauf pour $j = 0$ où $I_0(0) = 1$. On retrouve la solution de BLACK-STOCK.

3.1.3 - Forme asymptotique de $V(\sigma, y)$ quand $\sigma \rightarrow \infty$

Revenons aux grandeurs dimensionnelles ; on peut écrire : $(in_1 \pm jn_2)^2 \frac{\sigma}{G} \equiv (i\omega_1 \pm j\omega_2)\delta r$ et

$(in_1 \pm jn_2)^2 y \equiv (i\omega_1 \pm j\omega_2)\tau$ car le fluide étant par hypothèse, non dispersif, le terme $\alpha_0 / \omega_0^2 = \delta$ est constant.

L'expression (6), développée au premier ordre, fait apparaître des termes correspondant aux fréquences primaires ω_1 et ω_2 et les termes induits aux fréquences somme $(\omega_1 + \omega_2)$ et différence $(\omega_1 - \omega_2)$. En continuant le développement, on obtient les harmoniques des fréquences primaires, somme et différence. Lorsque $\sigma \rightarrow \infty$, compte tenu des divers coefficients d'amortissement, seul le terme correspondant à la fréquence différence demeure :

$$(7) |V_-(r, \tau)| \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{4}{G} \frac{\omega_-}{\omega_0} \frac{I_1(G_1) I_1(G_2)}{I_0(G_1) I_0(G_2)} e^{-\alpha_- r}$$

Lorsque le nombre de GOLD'BERG est faible, (7) devient :

$$(8) |V_-(r, \tau)| \approx -\frac{\omega_-}{\omega_0} \frac{GV_1 V_2}{4n_1 n_2} e^{-\alpha_- r} = -\frac{\omega_- \beta}{4\pi \rho_0 C_0^3 \alpha_0} \frac{P_1 P_2}{P_0} e^{-\alpha_- r}$$

On retrouve la solution "pre-shock" de FENLON (éq.10b de la réf.6). La figure 1 représente les solutions (7) et (8) en fonction de G dans le cas particulier suivant : $f_1 = 100$ kHz, $f_2 = 120$ kHz, $V_1 = V_2 = .5, \alpha_0 = .92 \times 10^{-2}$

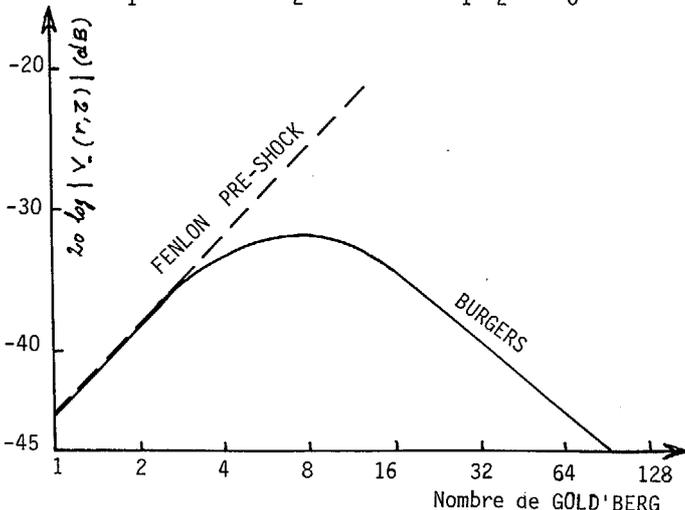


Figure 1

3.2 - Solution approchée quand $G \rightarrow \infty$

Lorsque le nombre de GOLD'BERG G tend vers l'infini, on peut résoudre les intégrales de (5) en utilisant la méthode de la phase stationnaire. Cette dernière a déjà été utilisée par WHITMAN (réf.7), SOLUYAN et KHOKHLOV (réf.8) dans le cas monochromatique (N=1), et par CARY (réf.9) pour N=2.

La solution approchée de (5), pour une source émettant N fréquences, lorsque $G \rightarrow \infty$, est donnée par :

$$(9) V_a(\sigma, y) = \frac{\sum_{k=1}^M \frac{\lambda_k - y}{\sigma} \xi_k(\sigma, y)}{\sum_{k=1}^M \xi_k(\sigma, y)} V_{\sigma, y}$$

Avec :

$$(10) \xi_k(\sigma, y) = \frac{\exp\left\{\frac{G}{2} \sum_{i=1}^N \frac{V_i}{n_i} (1 - \cos n_i \lambda_k)\right\} \exp\left\{-\frac{G(y - \lambda_k)^2}{4\sigma}\right\}}{\sqrt{\left| \sum_{i=1}^N V_i \sin n_i \lambda_k - (1/\sigma) \right|}}$$

M étant le nombre de points de phase stationnaire λ_k , qui sont les racines de l'équation :

$$(11) \sum_{i=1}^N V_i \sin n_i \lambda + \frac{y - \lambda}{\sigma} = 0$$

Nous nous limitons maintenant à deux fréquences primaires (N=2). Pour simplifier, nous posons : $V_1 = V_2 = 1, n_1 = 1, n_2 = \omega_2 / \omega_1 \equiv n$. Alors, dans l'expression (11), $\sin \lambda$ a une période $T = 2\pi$ et $\sin n \lambda$ a une période $T' = 2\pi/n$. La fonction $\sin \lambda + \sin n \lambda$ a une période $2b\pi$ telle que : $2b\pi = (b+1)2\pi/n$. Ceci entraîne que $bn = b+1$. Pour qu'il en soit ainsi, puisque $b \in \mathbb{N}$ il faut que le produit $bn \in \mathbb{N}$. Le nombre b doit donc être le plus petit entier qui rend le produit nb entier. On en déduit que les racines de l'équation (11) doivent être cherchées dans l'intervalle $\{-b\pi, +b\pi\}$.

3.2.1 - Formes asymptotiques de $V_a(\sigma, y)$ pour N=2

Lorsque $\sigma < 1$, l'équation (11) a une seule racine λ_1 qui tend d'ailleurs vers y lorsque $\sigma \rightarrow 0$. Pour $\sigma < 1$ la solution (9) se réduit donc à : $V_a(\sigma, y) = (\lambda_1 - y) / \sigma$.

Lorsque $\sigma \gg 1$, l'expression (11), pour N=2, s'écrit :

$$\sin \lambda + \sin n \lambda = 2 \sin\left(\frac{n+1}{2}\lambda\right) \cos\left(\frac{n-1}{2}\lambda\right) \approx 0.$$

Les racines sont symétriques et données par :

$$\lambda_k = \pm 2k\pi / (n+1) \text{ et } \lambda_k = \pm (2k+1)\pi / (n-1)$$

On peut montrer que les séries apparaissant dans (9) ont un seul terme prépondérant lorsque $\sigma \rightarrow \infty$, correspondant au λ_k de plus faible valeur, c'est-à-dire :

$\lambda_1 = 2\pi / (n+1)$. Il vient :

$$(12) V_a(\sigma, y) = \frac{1}{\sigma} \left[\lambda_1 \operatorname{th} \left(\frac{G \lambda_1 y}{2\sigma} \right) - y \right]$$

Lorsque N=1 (source monochromatique), $n=1$ et $\lambda_1 = \pi$ (12) devient alors identique à la solution de FAY (cf. par ex. réf.2).

4. SOLUTION DE L'EQUATION DE BURGERS. CAS ONDES SPHERIQUES

Les transformations de HOPF et COLE : $W = \partial \psi / \partial y$ et

$\psi = \frac{2}{G} e^{f/\sigma_0} \operatorname{Ln} \xi$ appliquées à l'équation de BURGERS (1) dans le cas sphérique conduisent à l'équation :



$$(13) \quad \frac{\partial \xi}{\partial f} + \frac{\xi \text{Ln} \xi}{\sigma_0} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

Pour ramener (13) à une équation de diffusion linéaire, il faut que le terme $\xi \text{Ln} \xi / \sigma_0$ soit négligeable. C'est-à-dire que $\sigma_0 \rightarrow \infty$. Par définition $\sigma_0 = \alpha G r_0$. Ceci sera donc assuré pour $G \rightarrow \infty$ ou pour $\alpha r_0 \gg 1$. Il est donc possible de généraliser les résultats du chapitre 3 au cas ondes sphériques à condition que G soit grand.

4.1 - Solution exacte $W(f,y)$ quand G est grand

Elle est donnée par (6) en remplaçant $V(\sigma,y)$ par $W(f,y)$, G par E^{-1} , σ par f . Les termes V_1 et V_2 doivent être remplacés par W_1 et W_2 , valeurs qui correspondent aux amplitudes des fréquences primaires à la distance de RAYLEIGH r_0 . Puisque la solution $W(f,y)$ n'est valable que pour G grand, il est nécessaire de relier par continuité cette solution à une solution "pre-shock" valable pour G petit. Cette dernière solution existe et est due à FENLON (éq. 16b de la réf.6).

4.2 - Solution approchée $W_a(f,y)$

De même que pour la solution exacte, il est possible d'obtenir la solution approchée dans le cas sphérique en remplaçant dans l'expression (9) $V_a(\sigma,y)$ par $W_a(f,y)$, G par E^{-1} et σ par f . Cependant cette solution n'est valable que pour $E^{-1} \rightarrow \infty$. Or $E^{-1} = G r_0 / r$. Il faut donc non seulement que G soit grand mais encore que r soit suffisamment petit. Cette solution a donc un domaine de validité dans l'espace limité. Elle est dès lors beaucoup moins intéressante que dans le cas plan.

5. APPLICATION DES SOLUTIONS EXACTES ET APPROCHÉES AUX ANTENNES PARAMÉTRIQUES

Dans les solutions $V(\sigma,y)$ et $V_a(\sigma,y)$ (ou $W(f,y)$ et $W_a(f,y)$), il existe les fréquences fondamentales f_1 et f_2 , les fréquences somme ($f_1 + f_2$), différence ($f_1 - f_2$) ainsi que les harmoniques de f_1 , f_2 , ($f_1 + f_2$) et ($f_1 - f_2$)

La fréquence différence apparaît naturellement prépondérante lorsque $\sigma \rightarrow \infty$. A distance finie, il est possible de déterminer l'amplitude de la fréquence ($f_1 - f_2$) en calculant :

$$(14) \quad W_-(f) = \frac{2}{b\pi} \int_0^{b\pi} \left[W(f,y) \text{ ou } W_a(f,y) \right] \sin \{(n_1 - n_2)y\} dy$$

où b est défini en 3.2.

Pour appliquer les résultats précédents aux antennes paramétriques, on admet habituellement que les ondes primaires sont planes en champ proche jusqu'à la distance de RAYLEIGH r_0 , puis sphériques au-delà.

Pour obtenir le champ BF le long de l'axe acoustique de l'antenne, il faut donc calculer (14). $W(f,y)$ est obtenu à partir de (6). Les termes W_i qu'il est nécessaire d'introduire (cf. § 4.1) étant calculés au moyen de l'expression :

$$(15) \quad W_i = \frac{2}{b\pi} \int_0^{b\pi} V(\sigma_0,y) \sin n_i y dy$$

σ_0 correspond à la distance r_0 et $V(\sigma_0,y)$ est la solution onde plane. Dans le cas particulier où σ_0 est grand,

(15) peut être approché par :

$$(16) \quad W_i = \frac{4}{G} \frac{I_1\left(\frac{G V_i}{2 n_i}\right)}{I_0\left(\frac{G V_i}{2 n_i}\right)} n_i e^{-\alpha_i r_0}$$

Les expressions (14) et (15) permettent de calculer le champ BF le long de l'axe acoustique, quelle que soit la position du point d'observation.

Pour calculer le rendement de conversion, habituellement défini par (cf. réf.10) :

$$(17) \quad \eta = \left| \frac{p_{-r} e^{-\alpha r}}{p_0 r_0} \right|$$

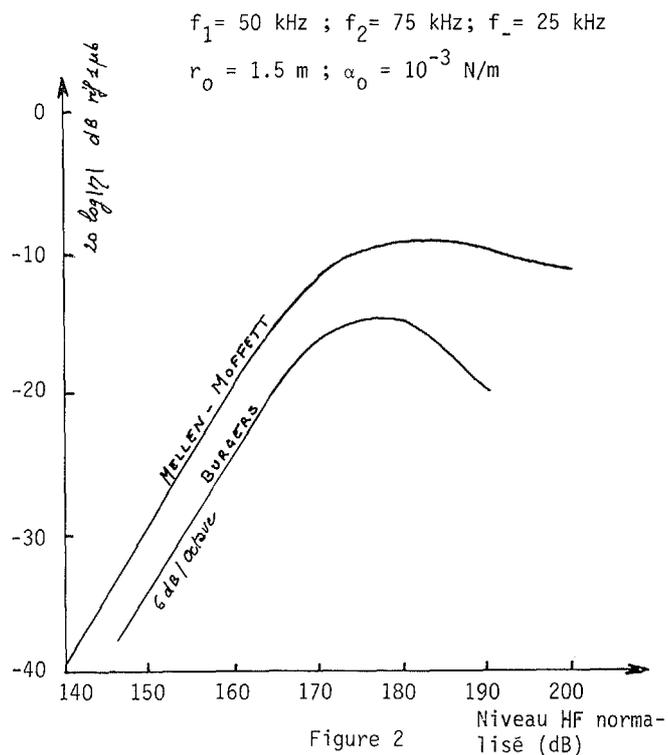
On peut calculer $W_-(f)$ en $f = f_m$, tel que f_m représente la fin de la zone "dent de scie" c'est-à-dire la fin de la zone d'interaction (cf. réf.2) :

$$f_m = \alpha_0 G r_0 \text{Ln} \frac{r_m}{r_0} ; r_m = G r_0 \left[1 + \alpha_0 G r_0 (r_m / r_0) \right]$$

On aura donc : $\eta = |W_-(f_m)|$ pour G grand.

Pour G petit, c'est-à-dire dans la partie où le rendement croît linéairement avec la puissance HF émise, la solution (14) n'est plus valable et il faut prendre la solution de FENLON déjà mentionnée.

Nous avons programmé les formules précédentes. Les diverses intégrales sont calculées numériquement en utilisant la méthode de ROMBERG. La figure 2 représente un exemple de calcul de rendement que l'on peut obtenir. Sur la même figure, nous avons représenté le rendement déduit de la formule de MELLETT et MOFFETT (réf.10). Les parties linéaires sont proches. Par contre, pour des puissances HF élevées, les deux courbes s'écartent fortement. Ceci s'explique par le fait que la formule de MELLETT et MOFFETT est déduite de l'équation de LIGHTEHILL-WESTERVELT qui ne tient pas compte des termes non linéaires supérieurs au second ordre.





DEUXIEME PARTIE

CALCUL DU DIAGRAMME DE DIRECTIVITE D'UNE ANTENNE PARAMETRIQUE CONSTITUEE PAR UN PISTON CIRCULAIRE

6. EQUATION DE LIDTHILL-WESTERVELT ET HYPOTHESES FONDAMENTALES

Cette équation est donnée par :

$$(18) \square p_- = -\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t}; \quad q = \frac{\beta}{\rho_0 C_0^4} \frac{\partial p_1^2}{\partial t}$$

ρ_0 est la densité du fluide, le terme p_1 correspond aux pressions primaires HF émises par la source et p_- est la pression secondaire BF créée par l'interaction des ondes HF. Le terme q correspond à une densité de source, les autres termes ont déjà été définies dans la première partie (β, C_0).

La solution de (18) est donnée par (cf. fig.3) :

$$(19) p_-(\vec{r}) = -\frac{\rho_0}{4\pi} \int_V \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\exp[-jk_- - \alpha_-] \xi}{\xi} dv.$$

Avec : $\xi = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}$; $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi$. Le terme α_- a été ajouté pour tenir compte de l'absorption à la fréquence BF.

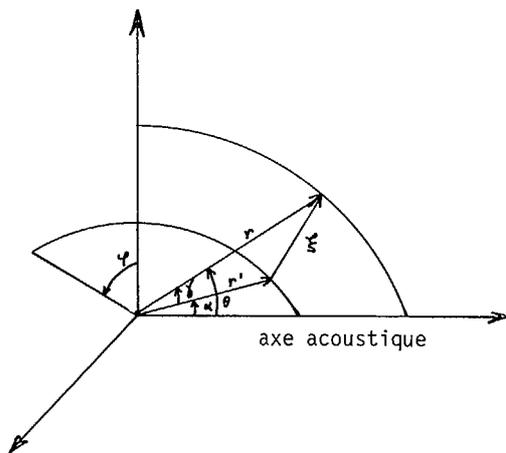


Figure 3

Pour résoudre (19), nous appliquons les hypothèses suivantes :

- 1) la source est un piston circulaire de rayon a .
- 2) la source n'émet que des ondes sphériques. Ceci est valable à condition que : $k_0 a \geq 10$; $r > r_0$; $k_a < 1$ où k_0 est le vecteur d'onde HF moyen et r_0 la distance de RAYLEIGH (ROLLEIGH, réf.11).
- 3) les directivités primaires sont symétriques par rapport à l'axe acoustique :

$$D_i(\alpha) = 2J_1(k_i a \sin \alpha) / k_i a \sin \alpha.$$

- 4) on intègre (19) sur une distance finie toujours inférieure à la distance r du point d'observation. Les hypothèses 2 et 3 conduisent à ce que le volume d'interaction soit un anneau centré sur l'axe acoustique. Cet anneau rayonne suivant la loi : $D_0(\alpha) = J_0(k_- r r' \sin \alpha \sin \theta / \xi)$.

Les hypothèses 1 à 4 permettent de ramener (19) à :

$$(20) p_-(r, \theta) = -\frac{2\beta P_1 P_2 \omega^2 r_0^2}{k_1 k_a^2 \rho_0 C_0^4} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} T^2(r') D_1(\alpha) D_2(\alpha)$$

$$D_0(\alpha) e^{-j(k_- - j\alpha_T)r'} \frac{e^{-j(k_- - j\alpha_-)\xi}}{\xi} \sin \alpha d\alpha r'$$

Avec : $\xi = (r^2 + r'^2 \cos^2 \alpha - 2rr' \cos \alpha \cos \theta)^{1/2}$; $\alpha_T = \alpha_1 + \alpha_2$

Le terme $T^2(r')$ a été rajouté à (19) pour tenir compte de l'extra-atténuation. Nous choisissons celui proposé par MELLEN et MOFFETT (réf.10).

$$(21) T^2(r') = \left[1 + \left(\frac{X}{2} \operatorname{Argsh} \frac{r'}{r_0} \right)^2 \right]^{-1/2} \text{ où}$$

$$X = \beta P_0 k_0 r_0 / \rho_0 C_0^2 ; \quad P_0 = (P_1 + P_2) / 2$$

7. EVALUATION NUMERIQUE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION DE LIDTHILL-WESTERVELT

La directivité de l'antenne est définie par :

$$(22) D(\theta) = 20 \log |p_-(r, \theta) / p_-(r, 0)|.$$

Nous avons calculé numériquement (20) pour obtenir (22). La borne en r' est limitée à $r - \Delta$ où Δ est une quantité petite. La borne en α est limitée à θ ($\theta = 2\theta_\infty$ des fréquences HF).

La méthode d'intégration numérique utilisée est celle de ROMBERG. Nous avons vérifié les points suivants :

- La zone d'interaction HF, en l'absence d'extra-atténuation, s'étend jusqu'à une distance de l'ordre de $1/\alpha_T$ (α_T : coefficient d'absorption HF).
- Le $2\theta_3$ BF atteint sa valeur asymptotique, en l'absence d'extra-atténuation, bien avant la fin de la zone d'interaction HF.
- Pour une fréquence HF fixée, le $2\theta_3$ BF croît lorsque la fréquence BF décroît.
- La limitation de la zone d'interaction, par une frontière naturelle ou par l'effet de l'extra-atténuation entraîne un accroissement du $2\theta_3$ BF et ceci d'autant plus que la fréquence BF est faible. Les points précédents sont illustrés par les figures 4 à 7.

8. SOLUTIONS ANALYTIQUES DE L'EQUATION DE LIDTHILL-WESTERVELT

Lorsque le point d'observation est loin de la zone d'interaction ($r \gg r'$) la solution (20) est une forme exacte de la solution (19). Lorsque de plus on suppose la puissance HF émise faible ($T^2(r') \cong 1$) on peut essayer d'évaluer analytiquement (20). En intégrant d'abord sur r' , il vient :

$$(23) p_-(r, \theta) \propto \frac{e^{-j(k_- - j\alpha_-)r}}{r} \int_0^{\pi/2} D_1(\alpha) D_2(\alpha) G(\alpha) \sin \alpha d\alpha$$

Avec :

$$G(\alpha) = \{\alpha_T + jk_- [1 - \cos(\theta - \alpha)]\}^{-1/2} \{\alpha_T + jk_- [1 - \cos(\theta + \alpha)]\}^{-1/2}$$

L'expression (23) permet de donner une signification physique : si les directivités D_1 et D_2 sont très

étroites, elles peuvent être approchées par :

$$\sin \alpha D_1(\alpha) D_2(\alpha) \sim \delta(\alpha) \text{ où } \delta(\alpha) \text{ est la distribution de}$$

DIRAC. A condition que $\int D_1(\alpha) D_2(\alpha) \sin \alpha d\alpha = 1$.

Alors (23) s'écrit :

$$(24) p_-(r, \theta) \propto \frac{e^{-j(k_- - j\alpha_-)r}}{r} \frac{1}{\alpha_T + 2jk_- \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

et on retrouve la directivité de WESTERVELT (réf.12). Si au contraire, c'est la fonction $G(\alpha) \sin \alpha$ qui se comporte comme une impulsion (c'est-à-dire pour $k_-/\alpha_T \rightarrow \infty$)



RENDEMENT ET DIRECTIVITE D'UNE ANTENNE PARAMETRIQUE EMETTRICE

autour de l'angle θ : $\sin\alpha G(\alpha) \sim \delta(\alpha-\theta)$ avec la condition $\int G(\alpha)\sin\alpha d\alpha = 1$, alors :

$$(25) p_-(r,\theta) \propto \frac{e^{-j(k_- - j\alpha_-)r}}{r} D_1(\theta)D_2(\theta)$$

La directivité de l'antenne est alors proportionnelle au produit des directivités primaires. Les expressions (24) et (25) représentent les deux cas extrêmes de (23) qui aboutissent à une solution analytique, qui n'existe pas dans le cas général. Il est cependant possible d'aboutir à un résultat moyennant une hypothèse sur les directivités primaires : puisque la directivité BF provient des lobes principaux des deux directivités HF, on peut remplacer les $J_1(k_1\sin\alpha)/k_1\sin\alpha$ par :

$$(26) D_1(\alpha) \equiv D_2(\alpha) = A \cos^n \alpha \text{ Avec : } A^2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \alpha \sin \alpha d\alpha = 1$$

d'où $A = \sqrt{2n+1}$

Le facteur n peut être calculé par la formule suivante : $n = \text{partie entière de } (\text{Log}2/\theta_3^2)$ où θ_3 représente l'angle à -3 dB des directivités HF. Compte tenu de (26), pour $T^2(r') = 1$ et $r \gg r'$, on peut développer en série l'exponentielle qui se trouve dans (20). Il est possible de calculer l'intégrale en α qui est une intégrale de SONINE. Il reste à évaluer l'intégrale en r' qui se trouve être une intégrale de HANKEL. On aboutit à :

$$(27) p_-(r,\theta) \propto (2n+1)\pi \frac{e^{-j(k_- - j\alpha_-)r}}{r} \sum_0^{\infty} \frac{a^p}{p!} \Gamma(n + \frac{p+1}{2}) K_p$$

$$K_p = \sum_0^{\infty} (-1)^m \left(\frac{b}{2c}\right)^{2m} \frac{\Gamma(p+1+2m)}{m! \Gamma(n + (\frac{p+1}{2}) + m + 1)}$$

$a = j(k_- - j\alpha_-)\cos\theta$; $b = (k_- - j\alpha_-)\sin\theta$; $c = (k_- - j\alpha_T)$
 Γ est la fonction gamma.

Lorsque $\theta = 0$, la solution (27) se réduit à :

$$(28) p_-(r,0) \propto 2\pi(2n+1) \frac{e^{-j(k_- - j\alpha_-)r}}{j(k_- - j\alpha_T)r} e^M E_1(M)$$

Avec $M = -(2n+1) \text{Log}(1 + j\alpha_T/k_-)$

et où E_1 est la fonction exponentielle intégrale.

Quoique la solution (27) soit analytique, elle n'est pas d'une utilisation pratique car les séries qui la contiennent doivent être calculées avec un grand nombre de termes. Il est donc préférable de calculer numériquement (20).

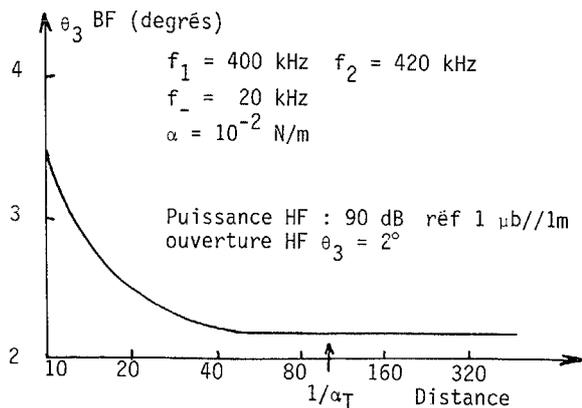


Figure 4

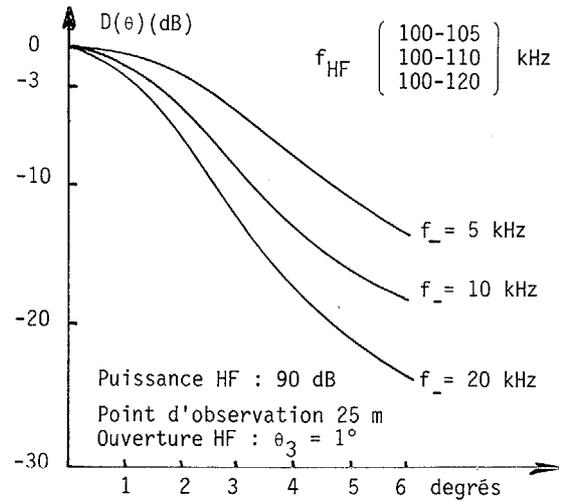


Figure 5

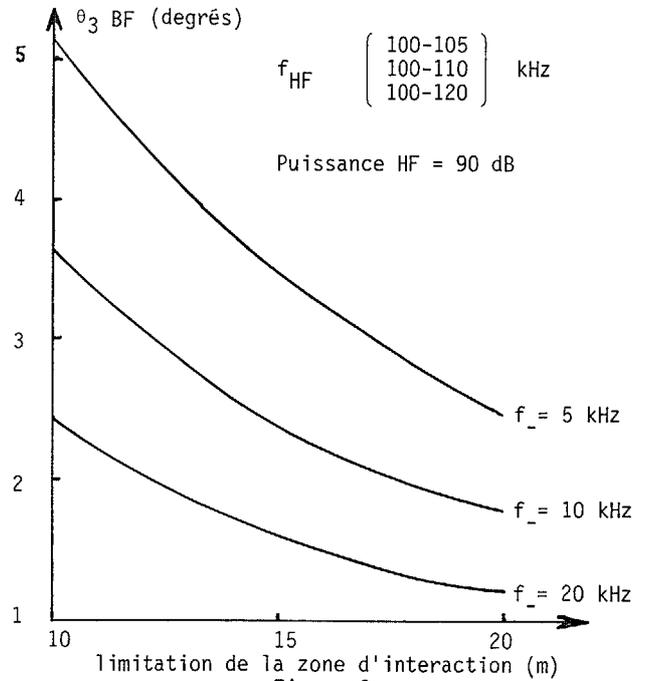


Figure 6

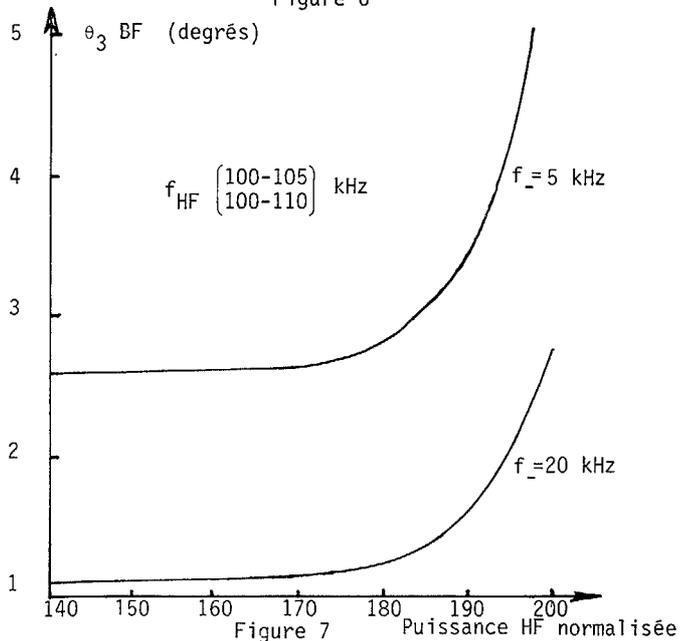


Figure 7



9. CONCLUSION

Dans la première partie de cette étude, nous avons utilisé la méthode de HOPF et COLE pour résoudre l'équation de BURGERS. Nous avons calculé ces solutions dans le cas de conditions aux limites correspondant à celles d'une antenne paramétrique émettant deux fréquences HF. Dans le cas où les ondes HF émises sont planes, la solution exacte trouvée est valable quel que soit le nombre de GOLD'BERG, c'est-à-dire quelle que soit la puissance HF émise. Dans le cas particulier où G est grand, nous avons développé une solution approchée utilisant la méthode de la phase stationnaire.

Dans le cas où les ondes HF émises sont sphériques, la solution exacte déduite de la méthode de HOPF et COLE n'est valable que pour G grand. Pour de faibles valeurs de G (dans la zone où le niveau BF croît linéairement avec le niveau HF émis) il faut prendre la solution "pre-shock" de FENLON. Toujours dans le cas d'ondes HF sphériques, la solution approchée (pour G grand) a un domaine de validité en distance depuis l'antenne limitée et est donc peu intéressante.

Les solutions précédentes permettent de calculer le niveau BF d'une antenne paramétrique le long de son axe acoustique, quel que soit le niveau HF émis. Elles permettent également de calculer le rendement de conversion tel qu'il a été introduit par MELLEEN et MOFFETT.

Les résultats obtenus montrent que ce rendement, dans la partie où le niveau HF est élevé (présence d'extra-atténuation) est nettement moins grand que celui prédit par MELLEEN et MOFFETT. Ceci est dû à ce que ces derniers ne prennent en compte les non linéarités supérieures au deuxième ordre que par l'intermédiaire d'un facteur d'extra-atténuation introduit artificiellement dans l'équation de LIGHTHILL - WESTERVELT.

L'équation de BURGERS ne permettant pas de déterminer le diagramme de directivité d'une antenne paramétrique, nous avons développé, dans la deuxième partie de l'étude, une solution numérique de l'équation de LIGHTHILL - WESTERVELT avec prise en compte de l'extra-atténuation par l'intermédiaire du facteur de MELLEEN et MOFFETT dans le cas particulier où l'antenne est constituée par un piston circulaire.

Cette solution numérique permet en particulier de prédire l'élargissement du diagramme BF avec l'augmentation du niveau HF. Elle permet également de déterminer le diagramme BF en fonction de la longueur de la zone d'interaction HF, en particulier lorsque celle-ci est limitée par une frontière naturelle.

Dans le cas particulier où le point d'observation est loin de la zone d'interaction et où le niveau HF est faible, nous avons développé une solution analytique qu'il est cependant moins commode de mettre en œuvre que la solution numérique.

REFERENCES

- (1) J.C LOCKWOOD "Finite - amplitude sound propagation in the farfield of non uniform sources" A.R.L. TR.7126. University of TEXAS at AUSTIN (1971)
- (2) D. ODERO, B. POIREE "L'acoustique non linéaire dans les fluides". Revue du CETHEDC n°46 (1976)
- (3) E. HOPF "The partial differential equation $u_t + uu_x = uu_{xx}$ " Comm. Pure Appl. Math.3, p.201-230 (1950)
- (4) J.D COLE "On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics" R. Appl. Math, 9, p. 225-236 (1951)
- (5) D.T BLACKSTOCK "Thermoviscous attenuation of plane periodic, finite - amplitude sound waves". JASA Vol 36, n° 3 (1964)
- (6) F.H FENLON "On the performance of a dual frequency parametric source via matched asymptotic solutions of BURGERS' equation" JASA, Vol 55, n°1, p.35-46 (1974)
- (7) G.B WHITHAM "Linear and non Linear waves" J. Wiley & Sons (1974)
- (8) S.I SOLUYAN, R.V. KHOKHLOV "Propagation of acoustic waves of moderate amplitude through dissipative and relaxing media" ACUSTICA Vol.14 n°5 (1964)
- (9) B.B CARY "An exact shock wave solution to BURGERS equation for parametric excitation of the boundary" Journal of sound and vibration, 30 (4), p. 455-464 (1973)
- (10) R.H MELLEEN, M.B MOFFETT "A model for parametric sonar radiator design" NUSC Rep.TM.PA 41-229-71 (1971)
- (11) R.L ROLLEIGH "Difference frequency pressure within the interaction region of a parametric array" JASA, Vol. 58, n° 5, p. 964-971 (1975)
- (12) P.J WESTERVELT "Parametric Acoustic Array" JASA, Vol.35, p.535-537 (1963)

