

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

ETUDE DES RELATIONS STATISTIQUES ENTRE DEUX SIGNAUX TEMPORELS  
PAR ANALYSE INTERSPECTRALE.

A. KNOB, J.L. LACOUME

CENTRE D'ETUDE DES PHENOMENES ALEATOIRES ET GEOPHYSIQUES (associé au CNRS)  
B.P. 15, 38040 - GRENOBLE-CEDEX

## RESUME

La recherche des liaisons statistiques entre deux signaux temporels est un problème très important en physique de la mesure. Les liaisons entre deux signaux peuvent être de nature très diverse. Nous nous limiterons ici à la caractérisation de liaisons linéaires et stationnaires entre deux signaux temporels appréhendés à travers une réalisation particulière de durée finie de chacun d'entre eux.

Nous montrons tout d'abord que, dans la situation décrite ci-dessus et dans le cas de signaux localement blancs, la méthode optimale de recherche et de caractérisation des dépendances linéaires est une analyse interspectrale s'appuyant sur la mesure des densités spectrales de puissance et de la densité spectrale de puissance croisée.

Nous menons ensuite l'étude complète de la méthode de mesure de la matrice interspectrale dans le cas d'un dispositif réalisant la transformée de FOURIER des fonctions d'auto- et d'intercorrélation et nous discutons les propriétés au second ordre de l'estimation de la matrice interspectrale ainsi obtenue. Nous étudions également les problèmes posés par la quantification des signaux dans le corrélateur.

Enfin, nous présentons les résultats obtenus dans un cas pratique d'étude de signaux magnétiques naturels de la gamme de Hertz captés à 1 000 km de distance.

## SUMMARY

The search of statistical relations between two signals is a very important problem in measurement physics. The relations between two signals may be of much different kinds. In this paper we shall deal only with the characterization of linear and stationary connections between two signals apprehended through an individual record of finite duration of each one of them.

At first we show that, for the above situation and for the case of locally white signals, the optimal method of research and of characterization of the linear dependencies is an interspectral analysis, based on the measurement of spectral densities and of the cross spectral density.

Thereafter, we study the method of measurement of the interspectral matrix, for the case of a device performing the FOURIER transform of both the functions of autocorrelation and intercorrelation. We discuss the properties at the second order of estimation of the obtained interspectral matrix. We deal also with the problems of the quantification of signals in the correlator.

At last, we bring up the results we obtained in an actual case of study of natural magnetic signals of the order of one Hertz, recorded at two points 1 000 km distant of each other.



ETUDE DES RELATIONS STATISTIQUES ENTRE DEUX SIGNAUX TEMPORELS PAR  
ANALYSE INTERSPECTRALE

### 1. INTRODUCTION.

Dans de nombreux problèmes de mesure ou d'estimation, l'observation est constituée par  $N$  ( $N \geq 2$ ) signaux temporels, connus sur la durée  $-T, +T$ . Le but poursuivi par l'expérimentateur est de rechercher si ces  $N$  signaux dépendent d'une cause unique ou s'ils sont issus de plusieurs causes indépendantes. De nombreuses études ont été consacrées à ce type de situation, décrit de manière générale.

Nous allons présenter l'étude de cas où la liaison cherchée est linéaire et stationnaire (filtrage). On sait alors qu'en l'absence de perturbations la densité spectrale de puissance croisée (fonction spectrale d'intercorrélacion) est égale au gain complexe du filtre représentant la liaison et que la fonction de cohérence, ou fonction spectrale d'intercorrélacion normée, est égale à 1 en module.

### 2. ANALYSE THEORIQUE : RECHERCHE DU TRAITEMENT OPTIMAL

#### 2.1 Description du modèle :

Nous nous limitons à l'étude de deux signaux et nous considérons les deux situations suivantes, dénommées  $H_0$  et  $H_1$  :

Pour  $H_0$

$$R_1(t) = B_1(t) \quad -T < t < T$$

$$R_2(t) = B_2(t) \quad -T < t < T$$

$B_1$  et  $B_2$  : fonctions aléatoires, gaussiennes, centrées,  $\gamma_{B_1}(v) = \gamma_{B_2}(v)$  indépendantes.

Pour  $H_1$

$$R_1(t) = S(t) + B_1(t) \quad -T < t < T$$

$$R_2(t) = \mathcal{F}[S(t)] + B_2(t) \quad -T < t < T$$

$S(t)$ ,  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  : fonctions aléatoires gaussiennes centrées indépendantes.

$\mathcal{F}$  : filtre linéaire et stationnaire de gain complexe  $G(v)e^{j\phi(v)}$ .

L'hypothèse  $\gamma_{B_1}(v) = \gamma_{B_2}(v)$  est évidemment restrictive. Nous supposons que le signal est assez fort pour que la détection ne pose aucun problème, alors nous admettrons qu'au cours du temps on passe du cas  $H_0$  au cas  $H_1$  et cela sans ambiguïté au niveau de la détection. On peut alors ajuster les gains lorsque  $H_0$  est réalisée et l'hypothèse faite revient à supposer les bruits  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$  stationnaires.

#### 2.2 Base de KARHUNEN-LOEVE.

Les signaux étant définis sur  $-T, +T$ , soit la base orthonormale :

$$\phi_{iK}(t) = v_{iK} \theta_K(t)$$

avec

$$\theta_K(t) = \frac{1}{2T} \Pi_T(t) e^{2\pi j K v_0 t} \quad |t| \in [-T, +T]$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad |t| > T$$

$$v_0 = \frac{1}{2T}$$

Le coefficient de corrélation entre deux composantes du signal s'écrit :

$$E[R_{jK_1 iK_2}^* R_{jK_1 iK_2}] = \int \tilde{w}_{jK_1} \gamma_R(u) \tilde{w}_{iK_2} g(u-K_1 v_0) g^*(u-K_2 v_0) du$$

où  $g(u) = \text{TF}[\Pi_T(t)]$  TF : transformation de FOURIER

$$\gamma_R(u) = \text{TF}[\Gamma_R(\tau)]$$

Cette base est de KARHUNEN-LOEVE si l'on a

$$\int \gamma_R(u) \cdot g(u-K_1 v_0) g^*(u-K_2 v_0) = \delta_{K_1-K_2}$$

$$\tilde{w}_{jK_1} \cdot \gamma_R(K_1 v_0) \cdot \tilde{w}_{iK_1} = \delta_{ij} \lambda_{K_1}$$

Ces conditions sont approximativement remplies si la matrice interspectrale est peu différente d'une constante sur une plage de fréquence

$$B = \beta v_0$$

où  $\beta \sim 10$

La valeur de l'approximation est chiffrée dans [7] et définit ce que nous appellerons un signal localement blanc. Nous avons également montré [5] que, en fonction de  $\beta$  les corrélations résiduelles relatives  $\Delta\Gamma_{\Delta K}$  vérifient :

$$\Delta\Gamma_{\Delta K} \leq \frac{0,25}{\beta}$$

soit une précision de 2,5 % pour  $\beta = 10$ . Notons que cette condition doit être vraie pour  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $S(t)$  et pour le filtre  $\mathcal{F}$ .

#### 2.3 Fonctionnelle du rapport de vraisemblance.

Calculons la conditionnellement à  $G(v)$  :

$$[R(t) | G(v)] = \frac{P_{R|H_1, G}(r)}{P_{R|H_0}(r)}$$



ETUDE DES RELATIONS STATISTIQUES ENTRE DEUX SIGNAUX TEMPORELS PAR  
ANALYSE INTERSPECTRALE

Posant  $L_G = \text{Log}[A(r(t) | G(v))]$  on obtient facilement avec  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  bruits blancs gaussiens de dsp  $N_0$ ;  $S(t)$  fonction aléatoire gaussienne de dsp  $\gamma_S(v)$

$$r_{1K} = 1/\sqrt{2T} e^{2\pi j v_0 K t} |r_1(t)|; \quad r_{2K} = 1/\sqrt{2T} e^{2\pi j v_0 K t} |r_2(t)|$$

$$L_G = L_1 + \sum_K A(Kv_0) [ |r_{1K}|^2 + |G(Kv_0)|^2 |r_{2K}|^2 + G^*(Kv_0) r_{1K}^* r_{2K} ]$$

où  $L_1 = \frac{1}{2} \sum_K \text{Log} \frac{N_0}{N_0 + \gamma_S(Kv_0) [1 + |G(Kv_0)|^2]}$

$$A(Kv_0) = \frac{-\gamma_S(Kv_0)}{2N_0 [N_0 + \gamma_S(Kv_0) (1 + |G(Kv_0)|^2)] (1 + |G(Kv_0)|^2)}$$

A partir de cette expression de  $L_G$  nous allons traiter les problèmes d'estimation de la phase de  $\hat{\phi}$

2.4 Estimateur optimal de la phase du filtre

Ecrivons :  $G(v) = |G(v)| e^{i\phi(v)}$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\phi$  est solution de

$$\frac{\partial L_G}{\partial \phi} \Big|_{\hat{\phi}_{MV}} = 0$$

Soit

$$\sum_K iA(Kv_0) |G(Kv_0)| [r_{1K} r_{2K}^* e^{i\hat{\phi}_{MV}(Kv_0)} - r_{1K}^* r_{2K} e^{-i\hat{\phi}_{MV}(Kv_0)}] = 0$$

Supposons  $\phi(v)$  constant sur  $K_1v_0$ ,  $K_2v_0$  et  $-K_1v_0$ ,  $-K_2v_0$ ; alors

$$e^{2i\hat{\phi}_{MV}(Kv_0)} = \frac{K_2(-K_2) \sum M(K) \Gamma_{1K}^* \Gamma_{2K}}{K_2(-K_2) \sum M(K) \Gamma_{1K} \Gamma_{2K}^*} = \frac{N}{N^*}$$

$M(K)$  : facteur de pondération réel dépendant de  $\gamma_S(Kv_0)$  et  $|G(Kv_0)|$ .

En revenant à la définition des  $r_{iK}$ , il vient ;

$$N = \int_{-2T}^{+2T} F(v) \hat{\Gamma}_{2R}(v) dv$$

où

$$\hat{\Gamma}_{2R}(v) = \begin{cases} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T+v} r^*(t) r(t-v) dt & v < 0 \\ \frac{1}{2T} \int_{-T+v}^T r^*(t) r(t-v) dt & v > 0 \end{cases}$$

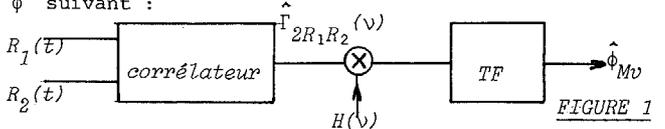
avec  $K_2 - K_1 = \frac{2P}{M}$  ( $K_2 - K_1$  pair)

$$K = \frac{K_2 + K_1}{2} + P = K_M + P$$

$$F(v) = H(v) \cos 2\pi K_M v_0 v + j \sin 2\pi K_M v_0 v$$

$$H(v) = \sum_{-P}^{+P} M(P) e^{2\pi j P v_0 v}$$

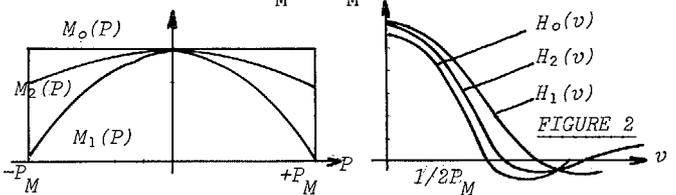
Ces résultats montrent que  $\hat{\phi}_{MV}$  est la phase d'une estimée de la dspc obtenue en prenant la transformée de FOURIER d'une estimée ( $\hat{\Gamma}_{2R}(v)$ ) de la fonction de corrélation multipliée par une fonction de pondération  $H(v)$ . Nous obtenons donc le dispositif d'estimation de  $\phi$  suivant :



$\hat{\Gamma}_{2R}(v)$  est l'estimée de la fonction de corrélation définie plus haut

$H(v)$  est une fonction de pondération dont nous donnons la forme dans deux cas typiques (figure 2).

Nous retiendrons seulement que  $H(v)$  est limitée à  $-\tau_m$ ,  $+\tau_m$  où  $\tau_m = \frac{2T}{2P+1} \sim \frac{T}{P_M}$ ;  $P_M = \frac{K_1 - K_2}{2}$



3. DEFINITION ET ETUDE DE L'INSTRUMENT DE MESURE.

Après avoir établi que l'estimateur optimal en présence de signaux et d'un filtrage localement blancs est la phase de la dspc, nous allons étudier les propriétés d'un instrument de mesure de la phase de l'interspectre. L'estimation d'une dspc peut être faite selon plusieurs procédures équivalentes. Nous avons mis au point une méthode de mesure par transformation de FOURIER de la fonction d'intercorrélation, appliquant les résultats précédents. Le dispositif étudié réalise donc le calcul de la transformée de FOURIER d'une estimée de la fonction d'intercorrélation  $\hat{\Gamma}_{XY}(\tau)$ . Plus précisément, nous calculerons la T.F. de  $F(\tau) \hat{\Gamma}_{XY}(\tau)$  où  $F(\tau)$  est une fonction de pondération nulle au delà d'une certaine valeur  $\tau_m$  de  $\tau$ .

Après avoir étudié l'estimateur de la fonction d'intercorrélation, nous étudierons les différentes causes d'erreurs (erreurs statistiques dues au temps d'observation fini et erreurs de quantification). Nous terminerons par une caractérisation expérimentale de l'instrument de mesure ainsi réalisé.



ETUDE DES RELATIONS STATISTIQUES ENTRE DEUX SIGNAUX TEMPORELS PAR ANALYSE INTERSPECTRALE

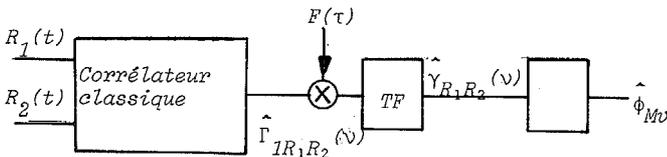
3.1 Estimation de la fonction de corrélation :

Les corrélateurs habituels calculent une estimée de la fonction de corrélation définie par :

$$\hat{\Gamma}_{R_1 R_2}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} R_1(t) R_2(t-\tau) dt$$

différente de l'estimée  $\hat{\Gamma}_{2R_1 R_2}$  définie plus haut. On peut cependant montrer [1] que si le support de la dsp  $\gamma_S(\nu)$  est grand devant le support du gain complexe du filtre  $\mathcal{N}$ , ces deux estimateurs sont équivalents. Plus précisément, il est montré dans [1] que :

- bien qu'au premier ordre les deux estimateurs soient différents ( $\hat{\Gamma}_{2R_1 R_2}(\tau)$  est biaisé), le résultat final est identique, car la présence d'un biais revient à modifier légèrement la fonction de pondération  $F(\tau)$  ;
- au deuxième ordre (variance) dans les conditions indiquées plus haut, la différence de comportement est négligeable. Nous aboutissons donc au schéma fonctionnel représenté sur la figure 3 pour le dispositif de mesure :



ESTIMATEUR PRATIQUE DE LA dspc - FIGURE 3

3.2 Caractérisation des propriétés de second ordre du dispositif de mesure de la dspc.

Il est bien connu que, dans le cas général, l'estimateur de la dspc défini en 3.1 est biaisé. Dans le cas considéré ici avec l'hypothèse de signaux localement blancs, le biais est petit et nous le considérerons comme nul. L'estimateur  $\hat{\gamma}_{R_1 R_2}(\nu)$  est alors caractérisé par sa variance, qui mesure la dispersion des résultats. La variance  $\sigma_{\hat{\gamma}}^2$  a deux causes principales que nous allons étudier successivement :

- les fluctuations statistiques venant de l'utilisation d'une observation de durée finie
- les erreurs supplémentaires introduites par la quantification des signaux dans le carrélateur.

3.21 Erreurs statistiques dues à la durée finie de l'échantillon.

En reprenant les méthodes classiques de calcul des variances de l'estimation de l'intercorrélacion, on a réalisé dans [1,2] le calcul numérique de la covariance de l'estimateur de la dspc  $\hat{\gamma}_{R_1 R_2}(\nu)$ .

En posant :

$$\hat{\gamma}_{R_1 R_2}(\nu) = [R + i J] z$$

$z$  : nombre complexe de module unité proportionnel à  $\gamma_{R_1 R_2}(\nu)$ .

La covariance

$$\underline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{RR} & \Gamma_{RJ} \\ \Gamma_{JR} & \Gamma_{JJ} \end{pmatrix} \text{ se réduit à } \underline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{RR} & 0 \\ 0 & \Gamma_{JJ} \end{pmatrix}$$

Ceci nous indique que les erreurs proportionnelles à  $\gamma_{R_1 R_2}(\nu)$  (erreurs sur le module) et les erreurs dans la direction du plan complexe perpendiculaire à  $\hat{\gamma}_{R_1 R_2}(\nu)$  (associées aux erreurs sur la phase) sont décorrélées.

$\Gamma_{RR}$  est donnée (pour  $\tau_m \ll T$ ) par l'expression classique (pour la dspc) :

$$\epsilon_{RR}^2 = \frac{\Gamma_{RR}}{|\hat{\gamma}_{R_1 R_2}(\nu)|^2} = \frac{2 \int |F(\tau)|^2 d\tau}{2T}$$

soit pour

$$F(\tau) = \pi_{2\tau_m}(\tau) \quad \epsilon_{RR}^P = \frac{2\tau_m}{T}$$

$$F(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_m}\right) \pi_{2\tau_m}(\tau) : \text{fonction de pondération de BARTLETT} :$$

$$\epsilon_{RR}^B = \frac{2\tau_m}{T} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\epsilon_{RR}^P = \frac{T}{2\tau_m}$  et  $\epsilon_{RR}^B \times \frac{T}{2\tau_m}$  ont été représentés, en fonction de  $\frac{T}{2\tau_m}$  sur la figure [4].

L'erreur sur la phase définie par  $\Gamma_{JJ}$  ne peut se calculer simplement. On a montré dans [1,2] que

$$\Gamma_{JJ} = g_F\left(\frac{T}{2\tau_m}\right) \Gamma_{RR} \quad g_F\left(\frac{T}{2\tau_m}\right) \text{ est représenté sur la figure 4.}$$

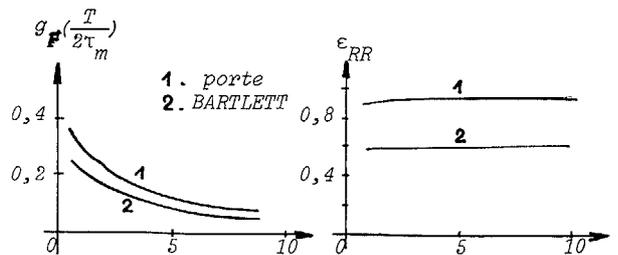


FIGURE 4

Il résulte de cette étude que, pour ce qui concerne les fluctuations dues au temps fini d'observation :

- l'ellipse isodensité des fluctuations de la dspc



ETUDE DES RELATIONS STATISTIQUES ENTRE DEUX SIGNAUX TEMPORELS PAR  
ANALYSE INTERSPECTRALE

a son axe principal dirigé vers l'origine dans le plan complexe ;

- en augmentant le rapport  $T/2\tau_m$  le petit axe de l'ellipse isodensité décroît plus vite que le grand axe.

### 3.22 Erreurs dues à la quantification des signaux par le corrélateur :

On prend pour la quantification le modèle suivant [4, 6]

$$R_{1g}(t) = R_1(t) + B_{g1}(t)$$

$$R_{2g}(t) = R_2(t) + B_{g2}(t)$$

$B_{g1}(t)$  et  $B_{g2}(t)$  sont les bruits de quantification. Ces bruits sont :

- centrés,
- indépendants entre eux et indépendants des signaux,
- leur densité de probabilité d'amplitude est constante sur le pas de quantification.

Nous avons également besoin de la fonction de corrélation des bruits de quantification qui sera uniquement caractérisée par la bande passante équivalente

$$B_{eq} : B_{eq} = \frac{\Gamma_{B_g}(0)}{\int \Gamma_{B_g}(\tau) d\tau} = \frac{\int \gamma_X(v) dv}{\gamma_X(0)} = \frac{1}{\Theta(0)}$$

En posant alors, comme précédemment :

$$\hat{\gamma}(v) = [R + iJ]z$$

il vient

$$\Gamma^g = \begin{pmatrix} \Gamma_{RR}^g & \Gamma_{RJ}^g \\ \Gamma_{RJ}^g & \Gamma_{JJ}^g \end{pmatrix}$$

avec

$$\Gamma_{RJ}^g = 0$$

$$\Gamma_{RR}^g = \Gamma_{JJ}^g \sim \frac{\sigma^2 (\gamma_{R1}(v) + \gamma_{R2}(v))}{2T B_{eq}} \int |F(\tau)|^2 d\tau$$

lorsque

- le bruit de quantification est faible,

En tenant compte des résultats de 3.1 il vient :

$$\frac{\Gamma_{RR}^g}{\Gamma_{RR}} = \frac{\sigma^2 \Theta(0) |\gamma_{R1}(v) + \gamma_{R2}(v)|}{2 |\gamma_{R1R2}(v)|^2}$$

REMARQUE :  $\Theta(0)$  a été déterminée :

- théoriquement à partir des résultats de [4], où il est montré que :

$$\Gamma_{B_g}(\tau) \propto e^{-\alpha \rho_R^2(\tau)}$$

$$\alpha = \frac{4\pi^2 \sigma^2}{q^2}$$

$\rho_R(\tau)$  fonction de corrélation normée du signal,  $\sigma_R^2$  variance du signal quantifié.

On obtient ainsi

$$B_{eq} = \sqrt{2\pi\alpha} B_R$$

$B_R$  bande passante du signal quantifié

$$B_R = \begin{cases} \int v^2 \gamma_R(v) dv / \int \gamma_R(v) dv & \text{Si } B_{eq} < F_{ech} \end{cases}$$

par ailleurs  $B_{eq}$  est bornée par  $F_{ech}$  ( $F_{ech}$  : fréquence d'échantillonnage).

- Expérimentalement, en calculant la variance des erreurs sur un point de la fonction de corrélation avec et sans quantification.

Les deux approches donnent le même résultat dans la zone utile (figure 5).

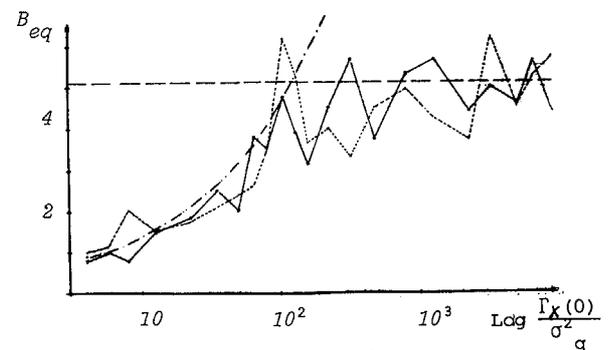


FIGURE 5 :  $B_{eq}$  théorique et expérimental.

### 3.23 Vérification expérimentale des résultats sur les erreurs.

Nous présentons sur les deux figures suivantes la comparaison des résultats expérimentaux et des évaluations théoriques sur la dispersion des mesures.

Le signal traité est un bruit blanc filtré par un filtre de BUTTERWORTH à 24 dB par octave. Nous précisons



ETUDE DES RELATIONS STATISTIQUES ENTRE DEUX SIGNAUX TEMPORELS PAR  
ANALYSE INTERSPECTRALE

dans chaque cas sur les figures :

- la fréquence de coupure  $f_c$
- le temps d'intégration  $T$
- le nombre de pas de quantification (sur  $-36, +36$ )
- le nombre de "filtres" sur lequel se fait la moyenne ( $\Delta K = K_2 - K_1$  défini en 2.4).

Sur la figure 6 on voit la forme allongée vers l'origine de l'ellipse isodensité de probabilité.

La figure 7 montre la réduction des fluctuations statistiques apportée par un changement de la fonction d'apodisation.

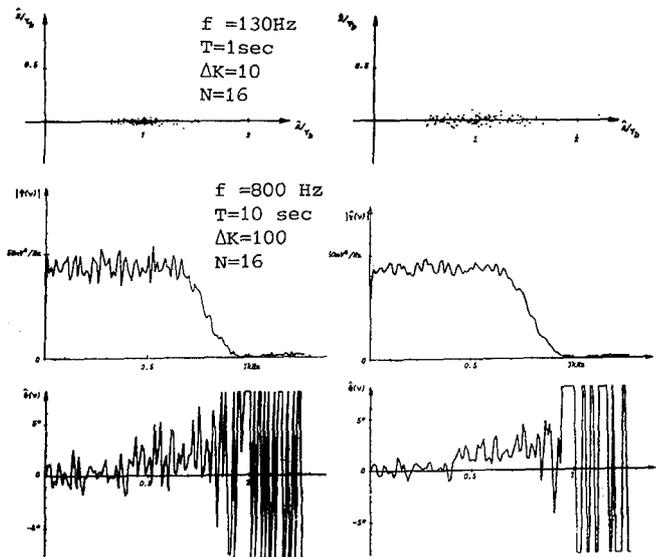


FIGURE 7

#### 4. APPLICATION : MESURES DE PHASES OU DE RETARDS.

##### 4.1 Etude des propriétés au second ordre de l'estimateur de la phase :

En revenant au modèle décrit dans 2, soit :

$$\begin{aligned} R_1(t) &= S(t) + B_1(t) \\ R_2(t) &= \mathcal{F}[S(t)] + B_2(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} ) \\ ) \\ ) \end{array} \quad -T < t < T$$

où  $\gamma_{B_1}(\nu) = \gamma_{B_2}(\nu) = N_0$

$$\gamma_S(\nu) = N_S$$

$\mathcal{F}$  : filtre de gain complexe  $G^C(\nu)$

$$G^C(\nu) = G(\nu) e^{i\phi(\nu)}$$

On a vu que l'estimateur M.V. :  $\hat{\phi}$  de la phase est la phase de la dspe.

Les résultats du 3 nous permettent d'obtenir les propriétés à l'ordre 2 de cet estimateur [1,2,3]

$$- E[\hat{\phi}] = \phi \quad (\text{hypothèse signaux et bruits localement blancs})$$

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = g \left[ \frac{T}{2\tau_m} \right] \left[ \frac{|F(\tau)|^2 d\tau}{T} \right] \left[ 1 + \frac{1}{|c|^2} \right]$$

où

$$[c(\nu)] = \frac{\gamma_{R_1 R_2}(\nu)}{\gamma_{R_1}(\nu) \cdot \gamma_{R_2}(\nu)}$$

est la fonction de cohérence ou dspe normée.

On voit, comme cela était prévisible, que les erreurs dépendent :

- du temps d'intégration,
- de la fonction de pondération  $F(\tau)$
- de l'importance relative de la partie utile sur la partie inutile (rapport signal sur bruit) représenté ici par  $|c(\nu)|$ .

Notons qu'il n'est pas nécessaire de particulariser les bruits de quantification qui sont pris en compte dans  $c(\nu)$ .

Sur la figure 8 on représente le résultat de l'estimation de  $\hat{\phi}(\nu)$  pour un filtre passe bande de BUTTERWORTH à 24 dB/oct. de fréquences de coupure : 50 et 300 Hz en fonction de  $|c(\nu)|$  (obtenu par adjonction de bruits blancs gaussiens indépendants) avec une fonction de pondération de BARTLETT. On voit nettement la dégradation des mesures de phase lorsque  $|c|$  diminue.

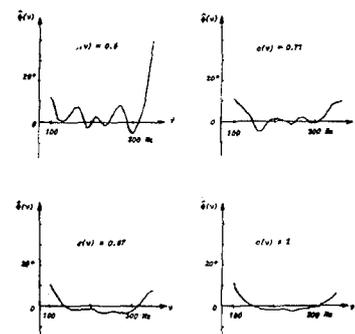


FIGURE 8 : Phase de la dspe estimée.

##### 4.2 Application à des signaux magnétiques naturels :

Les Pcl sont des pulsations magnétiques naturelles de la gamme du Hertz. Ces pulsations ont été enregistrées en 2 points du globe situés à 1 000 km de distance (SV-SO). L'observation de la représentation temps-fréquence des Pcl montre une certaine analogie entre les signaux reçus aux deux stations. Afin de préciser ce point, nous avons appliqué la méthode de mesure par interspectre à ces signaux avec le modèle suivant :

ETUDE DES RELATIONS STATISTIQUES ENTRE DEUX SIGNAUX TEMPORELS PAR  
ANALYSE INTERSPECTRALE

$$R_{SO}(t) = S(t) + B_{SO}(t)$$

$$R_{SV}(t) = \mathcal{F}[S(t)] + B_{SV}(t)$$

$\mathcal{F}$  est supposé formé d'une superposition de filtres passe bande parfaits disjoints et nous cherchons le déphasage introduit par chacun des filtres

$$G(v) = \sum_i G_i(v)$$

$$|G_i(v)| = 1 \quad \text{sur} \quad \pm v_i, \quad \pm (v_i + \Delta v_i)$$

$$\phi_i(v) = 2\pi v \tau_i$$

$\tau_i$  : retard introduit par  $G_i$ . Les résultats obtenus dans un cas particulier d'étude sont présentés sur la figure 9. On voit apparaître (et ceci est surtout clair sur  $c(v)$ ) deux filtres  $G_1$  et  $G_2$ . Le filtre  $G_1$  est relativement bruité, son support est contenu sur 0,1 - 0,55 Hz. La variation de phase est linéaire (aux fluctuations statistiques près) et l'on voit une fluctuation de phase importante associée à un "trou" de  $c(v)$ . Pour ce filtre prenant  $|c(v)| \sim 0,4$ , on obtient :

$$\left[ g\left(\frac{T}{2\tau_m}\right) = 0,1 ; \frac{\int F(v)^2 d\tau}{T} = \frac{1}{30} \right] \quad \sigma_{\delta\phi} = 0,1 \text{ rd } (6^\circ)$$

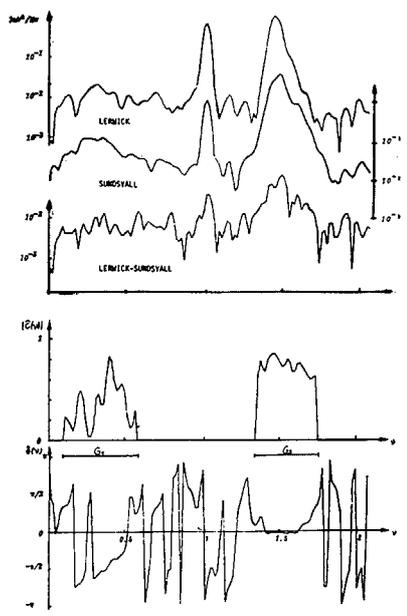


FIGURE 9  
Mesure du déphasage entre des signaux magnétiques naturels.

Le filtre  $G_2$  s'étend sur la bande de fréquences 1,3 - 1,7 Hz, il est beaucoup moins bruité. Pour  $G_2$  avec  $|c(v)| \approx 0,6$ ,  $\sigma_{\delta\phi} = 0,076 \text{ rd } (4,5 \text{ degrés})$ .

CONCLUSION.

Nous avons étudié une méthode de mesure de déphasage entre signaux bruités. Ce problème se ramène à la recherche de dépendances linéaires entre signaux.

Dans une situation localement blanche, nous avons montré que l'estimateur optimal se déduit de l'estimation de la dspc (ou fonction spectrale d'intercorrélation). Dans cette partie de l'étude certains points ont été traités complètement (estimateur de la phase), d'autres mériteraient d'être poursuivis, en particulier, il serait intéressant d'étudier le rôle du coefficient de cohérence comme indicateur des dépendances et de développer la notion de rapport signal sur bruit contenue dans  $c(v)$ .

Dans la partie pratique, nous avons présenté les propriétés d'un estimateur sous-optimal en théorie, mais pratiquement très proche de l'optimalité. Cette étude soulève de nombreuses questions concernant en particulier la forme des fonction d'apodisation intervenant dans la procédure de mesure. Les résultats essentiels obtenus sont la variance de l'estimation de la phase obtenue par le calcul et vérifiée par simulation.

Enfin, la puissance de cette méthode de mesure a été mise en évidence dans une mesure sur des signaux naturels complexes.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. KNOB - Etude d'une méthode d'estimation de la densité spectrale de puissance croisée (DSPC) ; méthode, évaluation des erreurs et applications à des signaux réels. Thèse de Docteurs Ingénieur, I.N.P.G., Mars 1977
- [2] A. KNOB, J.L. LACOUME - Etude de la précision de l'estimation de la densité spectrale de puissance croisée obtenue par transformation de FOURIER de la fonction de corrélation Rapport CEPHAG 55/75 (à publier aux Ann. des Télécomm.)
- [3] J.L. LACOUME - Recherche et caractérisation de dépendances linéaires entre signaux par analyse interspectrale NATO Advance Study Institute on Signal Processing, La Spezia, 1976
- [4] G. BONNET - Sur les corrélateurs utilisant la quantification des signaux NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, Grenoble, 1964
- [5] J.L. LACOUME - Sur la notion de base de KARHUNEN-LOEVE approximative (en préparation)
- [6] W. KOFMAN - Contribution à la mesure de la fonction d'ambiguïté" Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 13.4.1972
- [7] W.S. HODGKISS and L.W. NOLTE - Covariance between FOURIER coefficients representing the time waveforms observed from an array of sensors. J. Acoust. Soc. Am. Vol. 59, N°3, March 1976

