

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

45/1



NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

ESTIMATION ADAPTATIVE DES COVARIANCES DE BRUIT
POUR DES CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES
DE DYNAMIQUE CONNUE*

Alain GUILBERT

Claude A. BOZZO

Monique BOISOT

Laboratoire d'Automatique
et d'Informatique Appliquées
C.U. de TOULON

DCAN de TOULON
GESTA/CAPCA

DCAN de TOULON
S.D. Aéronautique

RESUME

On présente dans cette communication un algorithme de réalisation stochastique pour les processus multivariés gaussiens markoviens de dynamique connue permettant d'estimer de manière adaptative les covariances des bruits de dynamique et de mesure. On montre qu'une mesure des performances du filtre de KALMAN sous optimal élaboré à partir du modèle erroné du processus considéré, peut être déterminée à partir du gain d'un filtre π_a appliqué à la séquence d'erreur (pseudo-processus d'innovation). A partir du modèle gaussien markovien du pseudo-processus d'innovation et de la connaissance des statistiques de la séquence d'innovation, il est possible de déterminer le gain du filtre π_a dont on déduit un terme de correction faisant intervenir la différence entre les gains du filtre optimal et du filtre sous optimal.

Cette technique a été appliquée au développement d'un filtre adaptatif sous optimal qui a été présenté au cours du Sixième Congrès de l'IFAC à BOSTON en 1975. On peut montrer que l'algorithme présenté généralise certains résultats obtenus par MEHRA et BELANGER.

L'algorithme a été étudié en simulation et sur des données réelles (poursuite Radar, bruits Sonar et mouvements de plateforme d'un navire sur houle). Les résultats obtenus, qui ne sont présentés que succinctement dans cette communication (mouvements de navire), sont satisfaisants et apportent une contribution à la mise en lumière des possibilités d'application effective de cette catégorie d'algorithmes à l'estimation adaptative de covariances de bruits.

SUMMARY

The optimal estimate of the state of a linear dynamic system driven by white gaussian noise with unknown covariance Q and observed with additive white gaussian noise with unknown covariance R has not been previously implemented. In this paper we shall show that a measure for the filter performance is provided by the actual KALMAN gain of the " π_a filter" designed on the error sequence (pseudo-innovation): This π_a gain depends purely on the output statistics of the innovation sequence and it is possible to compute the filter from these statistics only, after having built a GAUSS MARKOV model for the pseudo innovation sequence.

This technique is applied to the development of an adaptive filter that has been presented in the Sixth Triennial IFAC World Congress (BOSTON Mass 1975). A tremendous amount of work and development has been done and is still being done on adaptive estimation of noise covariances. It can be proved that the solutions presented by MEHRA and BELANGER for this problem are equivalent to the approach of " π_a filter". This technique allows the knowledge in real time of the difference between the computed estimation error covariance matrix, the optimal and the actual estimation error covariance matrix (suboptimal filter).

The algorithm has been tested on simulated and real data (Radar tracking, Sonar noises and motions of ships) and appears to be robust: in all cases the KALMAN gain of the model converges to a solution which tracks the simulated or real system and gives a reasonable estimate of the error.

* Les travaux de recherche présentés dans cette communication ont été effectués dans le cadre de la Convention CETHDEC/DRME n° 75 34230 00480 7501.



ESTIMATION ADAPTATIVE DES COVARIANCES DE BRUIT
POUR DES CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES
DE DYNAMIQUE CONNUE

1. - MODELISATION D'UN PROCESSUS LINEAIRE - CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES ET NOTION DE FORME FILTRE

1.1 - Introduction

On s'intéresse à la classe des systèmes linéaires stochastiques stationnaires ou non stationnaires (processus gaussien markovien). Dans ce qui suit le problème est traité en temps discret et le processus considéré est représenté par l'équation aux différences linéaire suivante (équations du processus "objet")

$$(1) \begin{cases} x(k+1) = F(k) x(k) + w(k) \\ z(k) = H(k) x(k) + v(k) \end{cases}$$

ou $k \in [k_0, k_f]$ avec X matrice de covariance de l'état x du processus

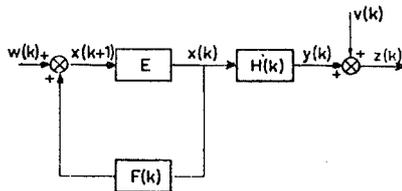


Figure 1 : Modélisation discrète du processus continu-discret considéré

$x(k)$ est un vecteur d'état de dimensions $[n \times 1]$
 $w(k)$ est un vecteur de bruit centré et blanc et de dimensions $[n \times 1]$
 $z(k)$ est un vecteur de mesure de dimensions $[m \times 1]$
 $v(k)$ est un vecteur de bruit de mesure centré et blanc et de dimensions $[m \times 1]$

Les matrices $F(k)$ et $H(k)$ sont respectivement de dimensions* $[n \times n]$ et $[m \times n]$. Nous ferons l'hypothèse que le système linéaire (1) est stable et est complètement observable.

Le vecteur $\{w'(k), v'(k)\}$ est un processus aléatoire gaussien blanc, de centré et de covariance :

$$(2) E \left\{ \begin{matrix} w(k) \\ v(k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} w'(j), v'(j) \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \delta_{k,j}$$

Q, S et R sont respectivement de dimensions $[n \times n], [n \times m]$ et $[m \times m]$.

Le vecteur d'état initial du système $x(k_0)$ est un vecteur aléatoire gaussien centré et de covariance:

$$(3) E [x(k_0) x'(k_0)] = X_0$$

Le modèle est caractérisé par les deux équations aux différences suivantes :

$$(4) \begin{cases} \underline{x}(k+1) = F(k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) & Q \rightarrow Q_c \\ \underline{z}(k) = H(k) \underline{x}(k) + \underline{v}(k) & R \rightarrow R_c \end{cases}$$

L'hypothèse effectuée est donc que les erreurs de modélisation ne portent que sur les termes de covariance $E(0), Q(k)$ et $R(k)$. Cette hypothèse peut être justifiée en analysant la structure des algorithmes résultant des méthodes de moindres carrés récurrentes [14].

Le problème de la réalisation stochastique consiste à identifier un modèle du processus considéré, c'est-à-dire à trouver des matrices $[F, H] [Q, R, S]$ de dimension minimale à partir des informations fournies par la suite des $\{z_k\}$.

* n est la dimension minimale des caractérisations (4) susceptibles de représenter le processus $\{z_k\}$

1.2 - Forme filtre associée à un processus aléatoire $z(k)$

1.21 - Filtre optimal (forme directe)

En exploitant la représentation (1) et les résultats classiques de la théorie du filtrage de KALMAN-BUCY, le filtre optimal s'écrit :

$$(5) \hat{x}^*(k+1) = F(k) \hat{x}^*(k) + F(k) K^d(k) z(k)$$

avec X^* matrice de covariance de \hat{x}^* .

$K^d(k)$ étant le gain de KALMAN du filtre optimal

$$(6) \begin{cases} K^d(k) = K(k) + F^{-1}(k) K^S(k) [I - H(k) K(k)] \\ K^S(k) = S(k) R^{-1}(k) \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} K(k) = E(k) H'(k) [H(k) E(k) H'(k) + R(k)]^{-1} \\ E(k+1) = F(k) [I - K(k) H(k)] E(k) F'(k) + Q(k) \\ \quad - S(k) [H(k) E(k) H'(k) + R(k)]^{-1} S'(k) \\ \quad - F(k) K(k) S'(k) - S(k) K'(k) F'(k) \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} K(k) = E(k) H'(k) [H(k) E(k) H'(k) + R(k)]^{-1} \\ E(k+1) = F(k) [I - K(k) H(k)] E(k) F'(k) + Q(k) \\ \quad - S(k) [H(k) E(k) H'(k) + R(k)]^{-1} S'(k) \\ \quad - F(k) K(k) S'(k) - S(k) K'(k) F'(k) \end{cases}$$

$K(k), K^d(k)$ et $K^S(k)$ sont de dimension $[n \times m]$

avec $E(k) = E [\xi(k) \xi'(k)]$

et $\begin{cases} \xi(k) = x(k) - \hat{x}^*(k) = \tilde{x}^*(k) \\ \zeta(k) = z(k) - H(k) \hat{x}^*(k) = \tilde{z}^*(k) \end{cases}$ (séquence d'innovation) de dimensions $[m \times n]$

(10) $\zeta(k) = z(k) - H(k) \hat{x}^*(k) = \tilde{z}^*(k)$ (séquence d'innovation) de dimensions $[m \times n]$

La matrice de covariance de $\zeta(k)$ est $Z(k)$

1.22 - Forme filtre

Le processus d'innovation est, pour un filtre linéaire optimal, une séquence aléatoire gaussienne et blanche.

En exploitant l'équation (5) et la définition du processus d'innovation, il vient :

$$(11) \begin{cases} \hat{x}^*(k+1) = F(k) \hat{x}^*(k) + F(k) K^d(k) z(k) \\ z(k) = H(k) \hat{x}^*(k) + \zeta(k) \end{cases}$$

On obtient une expression qui a la même structure que l'expression (1). Le filtre (11) est un processus de MARKOV particulier dans lequel :

$$(12) w^o(k) = F(k) K^d(k) v^o(k)$$

Nous dirons que (11) est la forme filtre associée au processus (1). On montre [10] que cette forme filtre est unique.

1.23 - Elaboration du gain de KALMAN à partir des corrélations de la mesure (sortie) $z(k)$

* Corrélations de la mesure (ou de la sortie) Représentation gaussienne markovienne

Si l'on pose :

$$(13) E [x(k_0) x'(k_0)] = X_0$$

$$(14) \begin{cases} E [x(k+j) x'(k)] = \phi_{xx}(k, j) & j > 0 \text{ avec } X(k) = \phi_{xx}(k, 0) \\ E [z(k+j) z'(k)] = \phi_{zz}(k, j) & \text{avec } Z(k) = \phi_{zz}(k, 0) \end{cases}$$

On obtient sans difficultés les relations suivantes :

$$(15) X(k+1) = F(k) X(k) F'(k) + Q(k)$$

$$(16) T_F(k) = S(k) + F(k) X(k) H'(k) = F(k) T(k)$$

$$(17) Z(k) = H(k) X(k) H'(k) + R(k)$$

$$(18) \phi_{xx}(k, j) = X(k) \delta_{j_0}^{+\epsilon_j} \phi(k+j, k) X(k) + \epsilon_{-j} X(k) \phi'(k, k+j)$$

$$(19) \phi_{zz}(k, j) = Z(k) \delta_{j_0}^{+\epsilon_j} H(k+j) \phi(k+j, k+1) T_F(k) + \epsilon_{-j} T_F'(k+j) \phi'(k+1, k+j) H'(k)$$

avec pour δ_{j_0} et ϵ_j les définitions suivantes :

$$\delta_{j_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases} \quad \epsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j > 0 \\ 0 & \text{si } j \leq 0 \end{cases}$$

avec (cf(35))

$$\phi(k+j, k+1) T_F(k) = \phi(k+j, k) T(k)$$

ESTIMATION ADAPTATIVE DES COVARIANCES DE BRUIT
 POUR DES CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES
 DE DYNAMIQUE CONNUE

On peut remarquer que même si F et H sont connus il existe une infinité de triplets [Q,R,S] qui conduisent à des suites $\{z_k\}$ ayant les mêmes statistiques $\varphi_{zz}(k,j)$. Il est donc uniquement possible d'identifier un triplet statistiquement équivalent au triplet du processus qui a pour sortie $\{z_k\}$.

Parmi tous les triplets possibles, on recherche celui qui permet d'élaborer la prédiction \hat{z}_k^{k-1} de la sortie (dans le cas du système observable). Le triplet correspondant est unique et est associé à la notion de forme filtre.

* Forme filtre

En appliquant les résultats précédents à la forme filtre, il vient : si

$$(20) E[\hat{x}^*(k) \hat{x}'^*(k)] = X^*(k)$$

$$(21) \begin{cases} X^*(k+1) = F(k) X^*(k) F'(k) + [K_F^d(k)] Z(k) [K_F^d(k)]' \\ Z(k) = H(k) X^*(k) H'(k) + Z(k) \\ T_F(k) = F(k) X^*(k) H'(k) + [K_F^d(k)] Z(k) = F(k) T(k) \end{cases}$$

Comme on a également :

$$(24) Z(k) = H(k) X(k) H'(k) + R(k)$$

et que $Z(k) = H(k) \Xi(k) H'(k) + R(k) > 0$ ($R > 0$)

on en déduit que :

$$(25) \Xi(k) = X(k) - X^*(k)$$

* Algorithme de définition de $X^*(k)$

On sait que : $[K_F^d(k)] Z(k) = T_F(k) - F(k) X^*(k) H'(k)$

Soit encore :

$$(26) K_F^d(k) = [T_F(k) - F(k) X^*(k) H'(k)] [Z(k) - H(k) X^*(k) H'(k)]^{-1} = F(k) K^d(k)$$

d'où, en tenant compte de l'équation définissant $X^*(k+1)$.

$$(27) X^*(k+1) = F(k) \{ X^*(k) + [T(k) - X^*(k) H'(k)] [Z(k) - H(k) X^*(k) H'(k)]^{-1} [T(k) - X^*(k) H'(k)] \} F'(k)$$

qui est une équation de RICCATI discrète pour $X^*(k)$.

On peut montrer sans difficultés que X^* existe toujours et est définie non négative. La matrice $Z^{-1}(k)$ est non singulière si $R > 0$.

* Elaboration du gain

On constate que contrairement à une affirmation très souvent exprimée, le gain de KALMAN dépend uniquement des statistiques de la sortie et peut donc être obtenu sans la connaissance du triplet (Q,R,S). La détermination de :

- $\Xi = E[(\hat{x}^*) (\hat{x}^*)']$ exige la connaissance du doublet (F,H) des statistiques (Q,R,S) et dépend de la représentation particulière considérée.

- $X = E[\hat{x} \hat{x}']$ exige la connaissance du doublet (F,Q) et dépend de la représentation particulière considérée.

- $X^* = E[(\hat{x}^*) (\hat{x}^*)']$ exige la connaissance du doublet (F,H) et dépend uniquement des statistiques de la sortie.

Théorème : $X - X^*$ satisfait la même équation que Ξ .

Ce théorème a déjà été démontré. Une deuxième méthode consiste, à partir des équations définissant $X(k+1)$ et $X^*(k+1)$ à effectuer la différence $X(k+1) - X^*(k+1)$.

* Factorisation des matrices de covariance de $w^o(k)$ et $v^o(k)$

Il vient sans difficultés :

$$(28) R \rightarrow E[\zeta(k) \zeta'(k)] = Z(k) = R^o(k) = [J^o(k)] [J^o(k)]'$$

$$(29) Q \rightarrow [K_F^d(k)] Z [K_F^d(k)]' = Q^o(k) = [L^o(k)] [L^o(k)]'$$

avec $L^o(k) = K_F^d(k) J^o(k)$

et donc d'après les résultats du paragraphe précédent :

$$(30) \begin{cases} L^o(k) = [T_F(k) - F(k) X^*(k) H'(k)] [Z(k) - H(k) X^*(k) H'(k)]^{-1/2} \\ J^o(k) = [Z(k) - H(k) X^*(k) H'(k)]^{1/2} \end{cases}$$

2. - CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES DU PROCESSUS D'INNOVATION ET DU PSEUDO-PROCESSUS D'INNOVATION

2.1 - Elaboration d'un modèle pour le processus d'innovation $\zeta(k)$

Les équations définissant la propagation de l'erreur dans le filtre optimal sont :

$$(31) \begin{cases} \xi(k+1) = \theta(k) \xi(k) + r(k) \\ \zeta(k) = H(k) \xi(k) + v(k) \end{cases}$$

avec :

$$(32) r(k) = w(k) - F(k) K^d(k) v(k)$$

$$(33) \theta(k) = F(k) [I - K^d(k) H(k)]$$

$$(34) \psi(k+1, k) = \phi(k+1, k) [I - K^d(k) H(k)]$$

$\phi(k+1, k)$ est la matrice de transition du processus (1)

$$(35) \begin{cases} \phi(k, \ell) = F(k-1) F(k-2) \dots F(\ell) \\ \phi(k+1, k) = F(k) \end{cases}$$

$\psi(k+1, k)$ est la matrice de transition du filtre et n'est pas singulière.

Le modèle de la séquence d'innovation a une structure identique à la caractérisation gaussienne markovienne du processus objet (1).

2.2 - Elaboration d'un modèle pour le pseudo-processus d'innovation $\zeta_a(k)$

Le processus envisagé pour la synthèse du filtre de KALMAN-BUCY est le modèle (4). Le filtre n'est donc pas le filtre optimal caractérisé par la matrice de covariance d'erreur $\Xi(k)$, mais un filtre sous optimal.

$$(36) \hat{x}^*(k+1) = F(k) \hat{x}^*(k) + F(k) K_c^d(k) \zeta_a(k)$$

$$(37) K_c^d(k) = \Xi_c(k) H'(k) [H(k) \Xi_c(k) H'(k) + R_c(k)]^{-1}$$

$$(38) \Xi_c(k+1) = F(k) [I - K_c^d(k) H(k)] \Xi_c(k) F'(k) + Q_c(k) - S_c(k) [H(k) \Xi_c(k) H'(k) + R_c(k)]^{-1} S_c'(k) - F(k) K_c^d(k) S_c'(k) - S_c(k) K_c^d(k) F'(k)$$

Une mesure des performances du filtre sous-optimal est déterminée par la matrice de covariance d'erreur réelle $\Xi_a(k)$ avec :

$$(39) \Xi_a(k) \triangleq E[(x(k) - \hat{x}^*(k)) (x(k) - \hat{x}^*(k))'] = E[\zeta_a(k) \xi_a'(k)]$$

$$(40) \Xi(k) \triangleq E[(x(k) - \hat{x}^*(k)) (x(k) - \hat{x}^*(k))'] = E[\xi(k) \xi'(k)]$$

$$(41) \Xi_c(k) \triangleq E[(\underline{x}(k) - \hat{x}^*(k)) (\underline{x}(k) - \hat{x}^*(k))'] = E[\xi_c(k) \xi_c'(k)]$$

Les équations définissant la propagation de l'erreur dans le filtre sous-optimal sont :

$$(42) \begin{cases} \xi_a(k+1) = \theta_c(k) \xi_a(k) + r_a(k) \\ \zeta_a(k) = H(k) \xi_a(k) + v(k) \end{cases}$$

$$(43) \begin{cases} \zeta_a(k) = z(k) - H(k) \hat{x}^*(k) \\ r_a(k) = w(k) - F(k) K_c^d(k) v(k) \end{cases}$$

$\zeta_a(k)$ est le pseudo processus d'innovation qui devient le processus d'innovation réel quand Q_c et R_c et sont les valeurs correctes des covariances Q et R et quand K_c^d est égal à K^d .



ESTIMATION ADAPTATIVE DES COVARIANCES DE BRUIT
POUR DES CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES
DE DYNAMIQUE CONNUE

3. - ALGORITHME DISCRET D'ESTIMATION ADAPTATIVE POUR UN PROCESSUS GAUSSIEN MARKOVIEN DE DYNAMIQUE CONNUE

Le problème de la réalisation stochastique consiste donc à identifier le processus (1), c'est-à-dire à déterminer des matrices [F,H] et [Q,R,S] de dimensions minimales à partir des informations fournies par la suite vectorielle $\{z_k\}$. Le triplet recherché est celui qui correspond à la forme filtre.

L'algorithme proposé repose sur le filtrage optimal de la séquence constituée par le pseudo-processus d'innovation. Cet algorithme présenté lors du congrès IFAC de BOSTON en 1975 [5] est essentiellement un algorithme de réalisation Markovienne [10] pour le processus (non stationnaire) de pseudo innovation associé au modèle. Il constitue une généralisation des algorithmes d'identification de gain présentés par RK MEHRA en 1970 [9] et est équivalent à l'algorithme de P.R. BELANGER [8].

3.1 - Filtrage optimal du pseudo processus d'innovation $\zeta_a(k)$ notion de filtre π_a

Si l'on applique la théorie du filtrage de KALMAN-BUCY à la séquence $\zeta_a(k)$, on peut faire la synthèse d'un filtre π_a de gain K_a^d

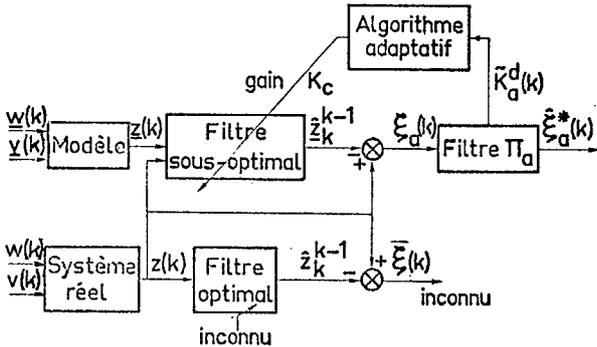


Figure 2 : Algorithme d'estimation adaptative du gain

Il est alors possible de démontrer que :

a) Théorème A :

$$(43) \quad \hat{K}_a^d(k) = [I - K_c(k) H(k)]^{-1} [K^d(k) - K_c^d(k)]$$

Cette réalisation permet donc de relier le gain du filtre optimal au gain du filtre π_a qui peut être déterminé à l'aide des relations associées au théorème C.

b) Théorème B :

Si $\Xi_a^*(k)$ est la matrice de covariance de l'estimée $\hat{\zeta}_a^*(k)$ et $\psi_a(k)$ la matrice de covariance d'erreur d'estimation associée au filtre π_a alors :

$$(44) \quad \hat{\zeta}_a^*(k+1) = \theta_c(k) \hat{\zeta}_a^*(k) + \theta_c(k) \hat{K}_a^d \zeta_a^d(k)$$

$$(45) \quad \psi_a(k) = \Xi(k) = \Xi_a(k) - \Xi_a^*(k) = X(k) - X^*(k)$$

$$(46) \quad \hat{K}_a^d(k) = K(k)$$

Si la matrice de covariance Ξ^* est connue, elle permet de déterminer une mesure de l'erreur existant entre le filtre optimal (matrice de covariance Ξ) et le filtre sous optimal (matrice de covariance d'erreur réelle Ξ_a).

c) Théorème C :

Le gain K_a^d du filtre de KALMAN-BUCY π_a et la matrice de covariance Ξ_a^* peuvent être élaborées à partir des statistiques du pseudo processus d'innovation.

Il vient, en appliquant les résultats généraux du paragraphe 1.23.

$$(46) \quad \hat{K}_a^d = [\hat{T}_a^d(k) - \Xi_a^*(k) H'(k)] [Z_a(k) - H(k) \Xi_a^*(k) H'(k)]^{-1}$$

$$(47) \quad \Xi_a^*(k+1) = \theta_c(k) \{ \Xi_a^*(k) + [\hat{T}_a^d(k) - \Xi_a^*(k) H'(k)] [Z_a(k) - H(k) \Xi_a^*(k) H'(k)]^{-1} [\hat{T}_a^d(k) - \Xi_a^*(k) H'(k)] \} \theta_c'(k)$$

qui est une équation de RICCATI discrète.

D'autre part :

$$(48) \quad \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, j) = E[\zeta_a(k+j) \zeta_a'(k)] = Z_a(k) \delta_{j,0} + \epsilon_j H(k+j) \psi_c(k+j, k) \hat{T}_a^d(k) + \epsilon_{-j} \hat{T}_a^d(k+j) \psi_c'(k+j, k) H'(k)$$

d) Théorème D :

Si $\Xi_a(o) \leq \Xi_c(o)$ et $Q(k) \leq Q_c(k)$, $R(k) \leq R_c(k)$ pour tout k alors $\Xi_a(k) \leq \Xi_c(k)$ pour tout k.

e) Théorème E :

L'algorithme permettant d'annuler le gain du filtre π_a est identique à l'algorithme de BELANGER et est une généralisation de l'algorithme de MEHRA ($\Xi_a^* = 0$).

3.2 - Description de l'algorithme adaptatif d'estimation

Les équations présentées dans l'énoncé des théorèmes A à C permettent de décrire l'algorithme d'estimation du gain K_a^d .

3.21 - Calcul d'une estimée ergodique de la matrice d'autocorrélation du pseudo-processus d'innovation

L'algorithme exige de connaître :

$\varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, j) \dots \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, 1)$ et $\varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, 0)$ soit $Z_a(k)$ (dimension $[m \times m]$).

En fait, l'estimation étant faite en temps réel et l'horizon considéré étant fini (J échantillons) il est uniquement possible d'élaborer une estimée ergodique de la fonction d'autocorrélation.

$$(49) \quad \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, j) = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^{J-j} \zeta_a(k+j) \zeta_a^T(k)$$

3.22 - Elaboration du gain K_a^d

Si l'on note

$$(50) \quad \Delta_c^N(k, j) = \begin{bmatrix} H(k+1) & \psi_c(k+1, k) \\ H(k+2) & \psi_c(k+2, k) \\ \vdots & \vdots \\ H(k+j) & \psi_c(k+j, k) \\ \vdots & \vdots \\ H(k+N) & \psi_c(k+N, k) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_a^N(k, j) = \begin{bmatrix} \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, 1) \\ \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, 2) \\ \vdots \\ \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, j) \\ \vdots \\ \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k, N) \end{bmatrix}$$

En considérant N points de la fonction d'autocorrélation, les matrices $\Delta_c^N(k, j)$ et $\varphi_a^N(k, j)$ sont respectivement de dimensions $[(Nm) \times n]$ et $[(Nm+m) \times m]$, $H(k+j)$, $\psi_c(k+j, k)$ étant de dimensions $[m \times n]$.

Il vient d'après (48)

$$\hat{T}_a^d(k) = [\Delta_c^N(k, j)]^{\#} \varphi_a^N(k, j)$$

$\hat{T}_a^d(k)$ est de dimension $[n \times m]$

$\Delta_c^{\#}(k, j)$ étant la pseudo inverse de $\Delta_c(k, j)$.

Il faut noter que quand $mN = n$ (ordre du Système) $\Delta_c(k, j)$ est une matrice carrée et $\Delta_c^{\#}(k, j)$ devient $\Delta_c^{-1}(k, j)$.

ESTIMATION ADAPTATIVE DES COVARIANCES DE BRUIT
 POUR DES CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES
 DE DYNAMIQUE CONNUE

L'équation de RICCATI (47) permet alors de déterminer $\Sigma_a^*(k)$ et l'équation (46) $K_a^d(k)$.

3.23 - Elaboration du gain $K_a^d(k)$

Connaissant $K_a^d(k)$, il est possible de calculer $K^d(k)$ en utilisant la relation (43) et en effectuant une itération jusqu'à ce que $K_a^d \underline{\Delta} o$.

La convergence de l'algorithme a été démontrée par PR BELANGER dans le cas général [8] et par RK MEHRA dans le cas particulier ou $\Sigma_a^*(k) \underline{\Delta} o$ (cf.[9]).

Il est donc possible d'obtenir un modèle adaptatif pour le processus mesuré $z(k)$, modèle qui se présente sous la forme filtre, et ce sans connaissance des covariances des bruits de dynamique et de mesure.

4. - APPLICATION DE L'ALGORITHME D'ESTIMATION ADAPTATIVE SUR DES SIGNAUX REELS - FILTRAGE DES MOUVEMENTS DE PLATEFORME D'UN NAVIRE SUR HOULE

Les mouvements de plateforme d'un navire sur houle se présentent en général comme des perturbations dans le cadre des problèmes de stabilisation ou de poursuite Radar. Nous ne reviendrons pas sur les problèmes de modélisation de ces signaux par des processus gaussiens markoviens, problèmes qui sont développés dans les références [1] à [4] et [11] et [12]. Nous n'étudierons que le signal de tangage et ce dans l'hypothèse où le modèle discrétisé de la dynamique du processus continu considéré a été déterminé selon des méthodes décrites dans [2].

4.1 - Signaux de Tangage [13]-Cas de signaux faiblement bruités

Les signaux provenant de mesures effectuées sur un bâtiment de petite taille sont échantillonnés à 0,05 seconde.

Pour la passe étudiée (18 496 mesures) le modèle F choisi en fonction de la structure du spectre est le suivant (cf. exemple donné dans [2]).

$$F_{\text{Tangage}} = \begin{pmatrix} 0,9984 & 0,0493 \\ -0,0506 & 0,9728 \end{pmatrix}$$

Les problèmes qui se posent pour l'application de l'algorithme sont :

- le choix du vecteur de gain initial $K_c(o)$ et la détermination du nombre d'itérations nécessaires à la convergence,
- le choix du nombre de points N de la fonction d'autocorrélation $\varphi_{\zeta_a \zeta_a}(k,j)$,
- le choix de l'amplitude de la "fenêtre glissante" sur laquelle est effectuée l'estimation du gain.

4.11 - Choix du vecteur de gain initial $K_c(o)$

Le choix de $K_c(o)$ ne peut être quelconque car il est défini par les relations existant entre $\Phi(k+1,k)$ Q_c et R_c (équation de RICCATI du filtre de KALMAN-BUCY).

En appliquant le théorème D, on effectue un choix de Q_c et R_c ainsi que de Σ_c qui assure que $\Sigma_a(k)$ est borné par $\Sigma_c(k)$.

On prend ici par exemple (n=2 ; m=1)

$$Q_c=10 \quad R_c=1 \Rightarrow K'(o)=|0,2 \quad 0,6| \quad K_1(o)=0,2 \quad K_2(o)=0,6$$

Nous traiterons à titre d'exemple le cas N=6 (on dispose donc de 7 points de la fonction d'autocorrélation, en tenant compte de la variance $\varphi_{\zeta_a \zeta_a}(o)$).

On peut constater sur les figures 3 et 4 que la convergence de l'algorithme proposé est obtenue en un nombre faible d'itérations (de l'ordre de 3 à 5), quelle que soit la valeur de $K(o)$. Bien entendu, les modes de convergence des trois algorithmes étudiés sont différents. Les valeurs des gains obtenus sur l'ensemble des mesures considérées sont différentes quand on adopte l'algorithme de BELANGER. On peut d'ailleurs constater que la fonction d'autocorrélation du pseudo processus d'innovation n'a pas la même structure et que la décroissance entre le premier et le deuxième terme est moins rapide.

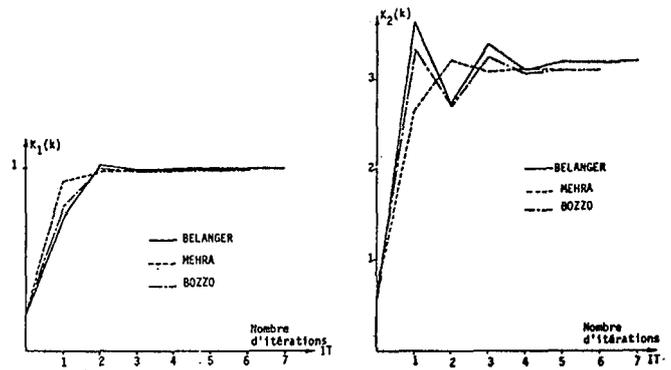


Figure 3
 Signal de Tangage (N=6) Convergence du gain sur 18496 mesures - Gain Initial $K_1(o) = 0,2$ $K_2(o) = 0,6$
 Comparaison des trois algorithmes

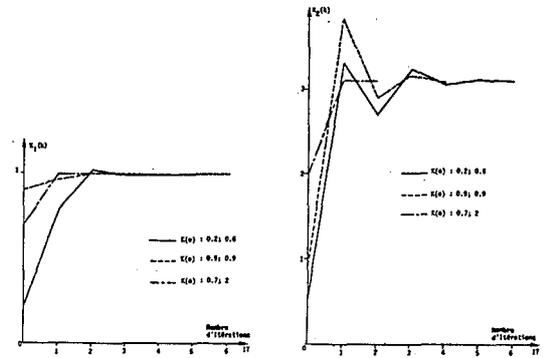


Figure 4
 Signal de Tangage (N=6) Convergence du gain sur 18496 mesures - Résultats obtenus pour des gains initiaux différents (Algorithme BOZZO)

CONVERGENCE DES ALGORITHMES

BELANGER						BOZZO						MEHRA					
$K_1(k)$	$K_2(k)$	$K_1(o)$	$K_2(o)$	$K_1(k)$	$K_2(k)$	$K_1(k)$	$K_2(k)$	$K_1(o)$	$K_2(o)$	$K_1(k)$	$K_2(k)$	$K_1(k)$	$K_2(k)$	$K_1(o)$	$K_2(o)$	$K_1(k)$	$K_2(k)$
0,742	3,604	0,941	4,232	0,975	3,742	0,778	3,211	0,964	3,825	0,989	3,101	0,934	2,628	0,970	2,656	0,99	3,093
1,014	2,715	1,013	2,809	1,00	3,112	1,008	2,658	0,993	2,895	0,987	3,036	0,987	3,202	0,995	3,446	0,987	3,099
0,989	3,383	0,99	3,245	0,998	3,22	0,983	3,232	0,985	3,157			0,987	3,069	0,988	3,088		
1,00	3,115	0,999	3,13	0,997	3,178	0,988	3,054	0,987	3,076			0,987	3,102	0,988	3,113		
0,996	3,219	0,998	3,213	0,997	3,195	0,987	3,107	0,987	3,101			0,987	3,093	0,987	3,089		
0,997	3,178	0,997	3,181			0,987	3,091										
0,997	3,194																

Tableau A

Signal de Tangage (N=6) Convergence des Algorithmes



ESTIMATION ADAPTATIVE DES COVARIANCES DE BRUIT
POUR DES CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES
DE DYNAMIQUE CONNUE

TABLEAU B

Signal de Tangage (N=6)
Valeurs de la fonction d'autocorrélation du pseudo
processus d'innovation (échelle 10⁻²) pour j=0, j=1 et
j=2 (sur 18496 mesures)

$$\varphi_{\zeta_a \zeta_a}(0), \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(1) \text{ et } \varphi_{\zeta_a \zeta_a}(2)$$

ALGORITHME	K'(0) = 0,2 0,6			K'(0) = 0,9 0,9			K'(0) = 0,7 0,2		
	j=0	j=1	j=2	j=0	j=1	j=2	j=0	j=1	j=2
VALEUR AVANT ADAPTATION	0,42	0,36	0,31	0,13	0,42.10 ⁻¹	0,34.10 ⁻²	0,13	0,44.10 ⁻¹	0,16.10 ⁻²
BELANGER	0,11	-0,78.10 ⁻³	0,21.10 ⁻²	0,11	-0,84.10 ⁻³	0,19.10 ⁻²	0,11	-0,77.10 ⁻³	0,21.10 ⁻²
BOZZO	0,11	-0,61.10 ⁻⁴	0,13.10 ⁻²	0,11	-0,29.10 ⁻³	0,14.10 ⁻²	0,11	-0,37.10 ⁻²	0,15.10 ⁻²
MEHRA	0,11	-0,48.10 ⁻⁴	0,14.10 ⁻²	0,11	-0,80.10 ⁻⁴	0,13.10 ⁻²	0,11	-0,39.10 ⁻³	0,15.10 ⁻²

Les composantes d'ordre j > 2 sont pour chaque algorithme de l'ordre de la composante j = 2.

4.12 - Choix du nombre de points de la fonction d'autocorrélation (Paramètre N)

Pour l'algorithme proposé les résultats obtenus ne sont pas sensibles à N dès que N ≥ 2 (valeur théorique minimale). On constate en effet (cf. figure 5) que les gains obtenus sont à peu près identiques quand 2 ≤ N ≤ 19. Ces conclusions sont vérifiées également par l'algorithme de MEHRA. Pour ces deux algorithmes la convergence est très rapide quand N=2 et se fait en deux ou trois itérations.

L'algorithme de BELANGER ne conduit pas tout à fait aux mêmes conclusions. Pour 2 ≤ N ≤ 8 la variation du gain est peu importante ; par contre pour 14 ≤ N ≤ 19 la variation est plus importante et la convergence est moins rapide (7 itérations environ).

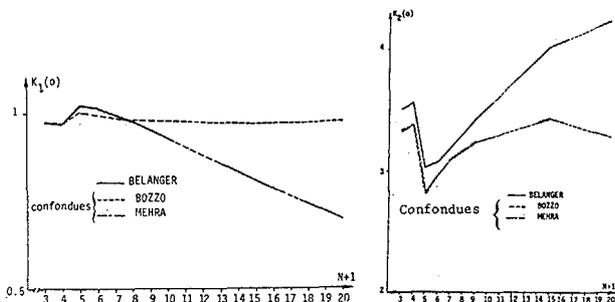


Figure 5
Signal de Tangage - Comparaison des trois algorithmes sur 18496 mesures avec N variant de 2 à 19 et K' étant initialisé à |0,2 0,6|

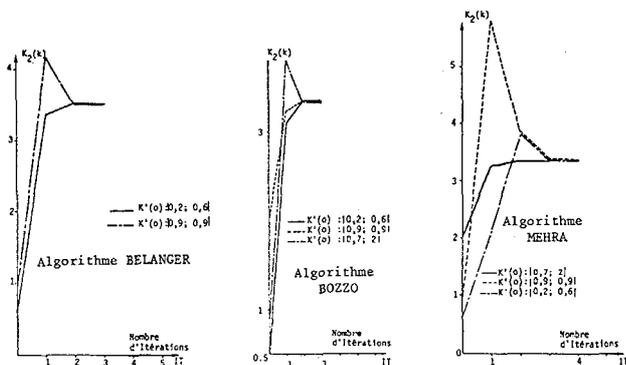


Figure 6
Signal de Tangage - Comparaison de la convergence de la deuxième composante du gain sur 18496 mesures pour N=2 et différentes initialisations

4.13 - Choix de l'amplitude de la fenêtre glissante sur laquelle est effectuée l'estimation du gain

Après une phase d'initialisation qui correspond à un nombre de mesures J₁ on obtient une première valeur du gain et donc un premier modèle. Ce modèle est ensuite adapté en temps réel en considérant une fenêtre glissante de J₂ mesures. Les valeurs de J₁ et J₂ sont bien entendu liées aux "pseudo-stationnarités" du signal considéré.

L'étude a été effectuée en adoptant N=2 (cf. paragraphe 4.12) et pour différentes valeurs de K(0). On a trouvé que J₁ doit être au moins égal à 1800 (soit 1,5 minute de signal).

Pour l'étude on a pris pour J₁ et J₂ 2496 mesures.

Le calcul de la fonction d'autocorrélation $\varphi_{\zeta_a \zeta_a}$ est effectué, une fois l'initialisation terminée sur J₂ mesures (et non sur l'ensemble des mesures comme en 4.11 et 4.12, en faisant glisser la fenêtre de calcul de 320 mesures à chaque nouveau calcul (cf. figure 7a).

Les résultats obtenus avec cette méthode de la fenêtre glissante peuvent être comparés ci-dessous sur la figure 7a avec les résultats obtenus quand J₁ est toujours égal à sa valeur nominale mais que J₂ croît par incréments de 320 mesures à partir de la valeur nominale J₁ (fenêtre croissante figure 7b). Bien entendu, le temps de calcul de la fonction $\varphi_{\zeta_a \zeta_a}$ croît avec J₂.

La comparaison est effectuée pour le même gain initial K'(0) = |0,2 0,6| et pour la deuxième composante K₂(k).

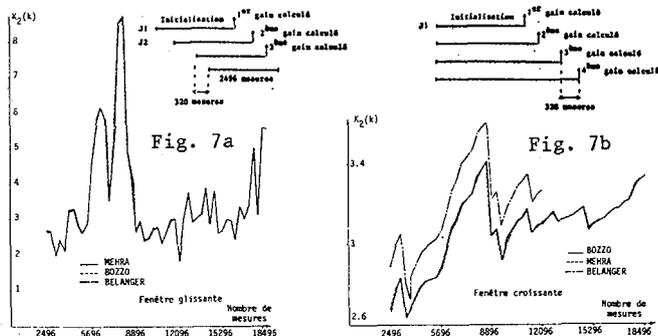


Figure 7
Signal de Tangage - Adaptation du gain - Comparaison des trois méthodes pour N=2 K' étant initialisé à |0,2 0,6|

4.2 - Cas de signaux fortement bruités

4.2.1 - Introduction

Le bâtiment considéré maintenant est un cargo de 4000 T, alors qu'en 4.12, le bâtiment étudié était un garde côte de 500 T. La Centrale d'enregistrement est différente et l'on peut comparer sur la figure 8 les signaux enregistrés.

ESTIMATION ADAPTATIVE DES COVARIANCES DE BRUIT
 POUR DES CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES
 DE DYNAMIQUE CONNUE

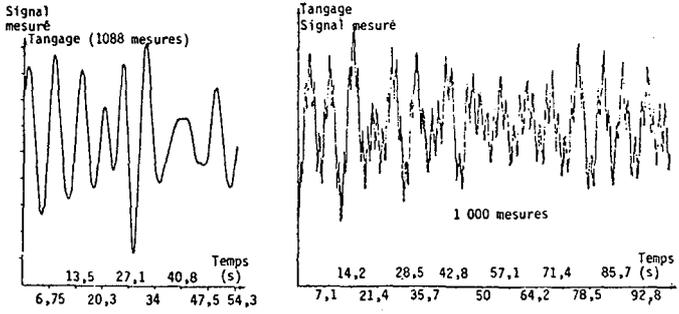


Figure 8a Bâtiment de 500 tonnes
 Figure 8b Bâtiment de 4000 tonnes

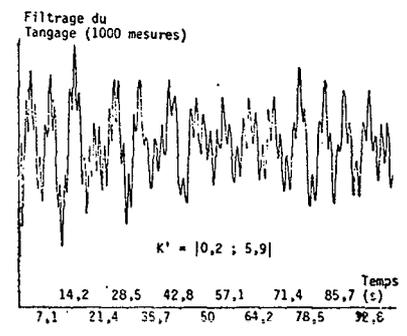


Figure 8c Tangage-Filtrage obtenu avec le gain $K_1 = 0,2$ $K_2 = 5,9$ (Méthodes de MEHRA et de BOZZO) pour $N=6$

Figure 8 Signaux de Tangage enregistrés

La période d'échantillonnage est ici $T=0,1$ s. Le nombre de mesures disponibles 7551.

4.22 - Résultats obtenus et comparaison avec le cas de signaux faiblement bruités

a) Avec l'algorithme proposé et un choix cohérent de $K(o)$, l'algorithme ne converge que pour $N > 2$.

Par contre, la variation de gain obtenue en fonction de N est peu importante. Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est toujours faible et compris entre 2 et 9.

b) L'algorithme de MEHRA conduit aux mêmes résultats pour N faible mais le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est plus important (de 5 à 25). Pour N grand (≥ 14 par exemple), le gain obtenu est différent et correspond à une solution non filtrante.

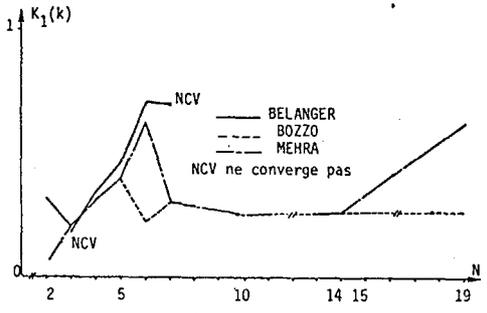


Figure 9a

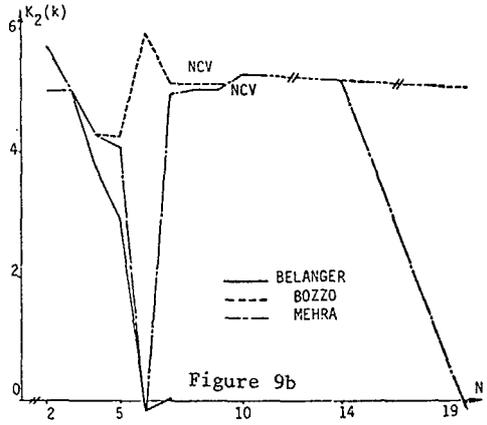


Figure 9

Tangage bruité - Variation du gain en fonction du nombre de points N de la fonction d'autocorrélation du pseudo processus d'innovation - Comparaison des trois algorithmes pour $K'(o) = |0,1 \ 2,5|$

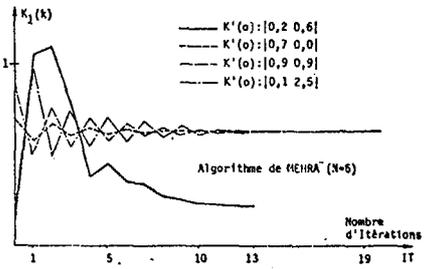
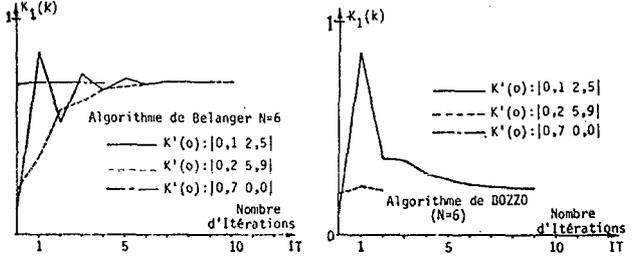


Figure 10

Tangage bruité - Mode de convergence en fonction du gain d'initialisation - Comparaison des trois algorithmes sur 1000 mesures et pour $N=6$ (Première composante du gain)

c) La valeur $N=6$ est une valeur moyenne qui assure la convergence des trois algorithmes. On constate que si N croît, l'algorithme de BELANGER a tendance à ne plus converger quand $N \geq 14$. De plus, l'algorithme de MEHRA a une convergence très oscillante pour les faibles valeurs de N .

Pour l'algorithme de BELANGER le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est assez important (entre 2 et 16).

5. - CONCLUSION

L'application d'un algorithme d'estimation adaptative des covariances permet de tenir compte des erreurs de modélisation. L'algorithme proposé est une généralisation de l'algorithme de MEHRA. Bien qu'il exige la résolution d'une équation de RICCATI, et qu'il soit donc plus pénalisant que l'algorithme de MEHRA, il présente par contre l'avantage sur des signaux fortement bruités, de toujours converger avec un nombre d'itérations faible et ce, pour un nombre également faible de points de la fonction d'autocorrélation du pseudo-processus d'innovation. Il s'apparente, quant aux résultats obtenus, à l'algorithme de BELANGER.



ESTIMATION ADAPTATIVE DES COVARIANCES DE BRUIT
POUR DES CARACTERISATIONS GAUSSIENNES MARKOVIENNES
DE DYNAMIQUE CONNUE

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement Monsieur G.FAVIER qui a le premier effectué l'étude de l'algorithme de BELANGER et a analysé les différents algorithmes en simulation.

Nous remercions également le professeur P.BELANGER (Université Mc GILL, MONTREAL) qui s'est intéressé à nos travaux et a bien voulu nous prodiguer ses conseils et ses encouragements, ainsi que le professeur G. ALENGRIN (LASSY NICE) et Monsieur J. AGUILAR (LAAS TOULOUSE).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.A BOZZO "Caractérisation, Identification en temps réel et étude de filtres prédicteurs des mouvements de plateforme d'un navire sur houle" Association Technique Maritime et Aéronautique PARIS 1972.
- [2] C.A BOZZO "Modélisation et filtrage adaptatif des mouvements d'un Navire sur houle irrégulière". Association Technique Maritime et Aéronautique PARIS 1973.
- [3] C.A BOZZO "Characterization and Identification of the motions of ships in confused seas" - Ships Operation Automation - IFAC/IFIP Symposium - OSLO NORVEGE 1973.
- [4] C.A BOZZO "An adaptive estimation schema for the identification of a characterization of the motions of ships in confused seas" - IFAC/IFIP Symposium on automation in offshore oil field operation - BERGEN NORVEGE 1976.
- [5] C.A BOZZO "A discrete suboptimal adaptive estimation scheme for linear systems with unknown plant and measurement noise covariances" - Contributed accepted paper - IFAC sixth Triennial World Congress - BOSTON Mass. USA 1975.
- [6] C.A BOZZO, M. BOISOT, G. FAVIER, A. GUILBERT, J. LECLERCQ "Comparison of four algorithms for identifying the linear optimum filter steady state gain by use of the pseudo-innovation process" - A paraître. 1977
- [7] B. CAREW and P.R BELANGER "Identification of optimum filter steady-state gain for systems with unknown noise covariances" - IEEE Trans. on AC vol AC 18 n° 6 - 1973
- [8] P.R BELANGER "Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process" Automatica Vol. 10 pp 267-275 - Pergamon press 1974.
- [9] R. K MEHRA "On the identification of variances and adaptive KALMAN filtering" IEEE Trans. on AC Vol AC 15 n° 2 - 1970.
- [10] P. FAURRE "Réalizations markoviennes de processus stationnaires" - Thèse de Doctorat d'Etat - 1972
- [11] J. C REMUSAT "Etude et mise en oeuvre d'algorithmes d'identification de réalisations markoviennes pour des processus à covariances de bruits inconnus" - Thèse de Doctorat d'Ingénieur - MARSEILLE 1975.
- [12] J. M ZARAGOZA "Simulation de mouvements de plateforme d'un bâtiment sur houle" - Thèse CNAM - AIX-EN-PROVENCE 1975.
- [13] M. BOISOT, A. GUILBERT "Identification du gain d'un filtre linéaire optimal" - Rapport d'Etude CAPCA DCAN de TOULON - TOULON 1976.
- [14] A. J BERKHOUT and P.R ZAAENEN "A comparison between WIENER filtering, KALMAN filtering and deterministic least squares estimation" - Geophysical prospecting 24, 141-197 - 1976.
- [15] C. DONCARLI et Ph. de LARMINAT "Extension de la méthode de MEHRA pour la détermination d'un filtre prédicteur optimal - RAIRO J2 (Juillet) 1973.
- [16] C. DONCARLI et Ph. de LARMINAT "Comparaison de quelques algorithmes de réalisation stochastique" - Congrès AFCEC "Automatique et Instrumentation à l'aube du dernier quart de siècle" - TOULOUSE 1975.