

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

---



## PROPRIETES STATISTIQUES FONDAMENTALES DES SIGNAUX D'IMAGE

M. HENRI MAITRE

LABORATOIRE IMAGE - ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS  
46, RUE BARRAULT - 75013 PARIS.

---

### RESUME

Nous nous sommes attachés à la vérification de propriétés statistiques fondamentales dans les images numérisées, sur un échantillonnage varié de photographies d'origines diverses (microphotographies, paysages, photos aériennes, portraits). Nous vérifions que l'hypothèse de stationnarité est mal suivie par la plupart des signaux d'images. Nous déterminons les probabilités d'un saut d'amplitude conditionnées par l'amplitude ou par le saut au point précédent, et montrons la limite de l'indépendance des sauts. Quelques relations sont de même vérifiées sur la "fonction d'autocorrélation", ainsi que sur les statistiques de la Transformée de Fourier.

### SUMMARY

Fundamental statistics on digitized images have been verified on a sample of various images (microphotographs, landscape, human portrait, aerial snapshot,...). The stationnarity hypothesis has been experimentally found to suit poorly most of image signals. We have determine the law of conditionnal probability of on amplitude increment with respect to the amplitude value of the preceeding increment, and justify the limitations of the independant assesment of this jump. Some other relationships on "autocorrelation fonction" and statistical properties in Fourier transform plane are pointed out.



## PROPRIETES STATISTIQUES FONDAMENTALES DES SIGNAUX D'IMAGE

La modélisation mathématique des signaux d'images intervient essentiellement à deux stades de leur traitement : d'une part, lors de la transmission pour définir des systèmes de compression d'information à performances élevées, d'autre part, lors de la restauration et de l'amélioration de ces images.

Une bonne modélisation possède deux propriétés essentielles : autoriser des développements fructueux pour l'un ou l'autre domaine envisagé, mais aussi -et c'est évident- traduire au mieux les propriétés statistiques d'une classe très large d'images.

Le signal d'image a été considéré très tôt comme un phénomène aléatoire, mais sa complexité rend sa représentation multiforme. Bien des représentations sont actuellement utilisées, mais trois apparaissent plus fréquemment que les autres.

- l'analogie avec le signal TV permet de considérer l'image comme un message monodimensionnel, aléatoire, pour lequel le premier point d'une ligne suit le dernier de la ligne précédente. C'est une représentation "dépliée" de l'image.
- l'identification de l'image avec une fonction aléatoire bidimensionnelle (les 2 coordonnées d'espace) rend bien compte de la structure de l'image. C'est cependant une forme peu maniable et qui ne bénéficie pas encore de tous les développements que l'on possède, par exemple, pour le signal monodimensionnel.
- la dernière représentation considère chaque ligne d'image comme une réalisation d'un processus aléatoire monodimensionnel. L'image est donc formée d'autant de tirages de ce processus qu'il y a de lignes.

Ce sont les propriétés de cette dernière représentation que nous avons testées. Elle est, en effet, très utilisée car, d'une part, elle autorise la mise en oeuvre des méthodes développées pour les signaux monodimensionnels, d'autre part, elle introduit entre les lignes successives une relation moins figée que la forme dépliée, et conduit donc à des applications plus générales. Nous avons vérifié ses propriétés fondamentales sur un large choix d'images, de thème et d'origine très variées.

### NOTATIONS

Dans cette approche, la j<sup>ème</sup> ligne d'une image est la fonction  $f_j(i)$ , échantillonnée régulièrement par N points. M lignes forment l'image complète. f est une fonction à valeurs entières discrètes ( $1 < f < K$ ) appelée amplitude de l'image. Les accroissements de f ( $s_j(i) = f_j(i) - f_j(i-1)$ ) appelés sauts de l'image en forment une description suffisante connaissant  $f_j(1)$  pour tout j.

Nous définirons l'espérance mathématique d'une variable aléatoire  $k_j(i)$  au point i comme la moyenne le long de la i<sup>ème</sup> colonne :

$$\langle k(i) \rangle = \frac{1}{M} \sum_j k_j(i)$$

et la valeur moyenne de la réalisation  $k_j$  de la fonction de i comme la moyenne selon la ligne j :

$$\bar{k}_j = \frac{1}{N} \sum_i k_j(i)$$

### PSEUDO-STATIONNARITE

L'hypothèse de stationnarité du signal d'image est l'une des plus utilisée lors du traitement des images. Strictement parlant, l'image étant à support fini, on ne pourrait parler de stationnarité.

Néanmoins, si l'on considère que  $f_j(i)$  représente l'observation à travers une fenêtre d'étendue finie d'une image plus vaste supposée infinie, et de propriétés statistiques identiques, alors l'extension de la notion de pseudo-stationnarité reprend un intérêt certain.

Supposer la stationnarité de l'amplitude au premier ordre, c'est considérer que  $\langle f(i) \rangle$  ne dépend pas de i. En d'autres termes, cela suppose que l'image est aussi claire le long du bord droit qu'au milieu ou à gauche. Une telle affirmation est bien sûr trop restrictive et permet de nier cette stationnarité.

Expérimentalement, nous avons vérifié que  $\langle f(i) \rangle$  selon les colonnes i suit une répartition grossièrement normale dont le rapport de l'écart-type à la moyenne (expression de sa dispersion) varie de 3 à 40 % pour diverses images.

La stationnarité au second ordre de l'amplitude attire les mêmes remarques : elle est liée à la répartition du contraste dans l'image et n'est vérifiée que pour des images à textures très régulières : microphotographies, photos aériennes à grande altitude, etc.... Elle n'est généralement qu'approchée dans les images de télévision : portraits, paysages, mouvements. Sa dispersion varie de 10 à 60 %.

L'accroissement  $s_j(i)$  de l'amplitude est une variable très utilisée lors du codage pour transmission. Elle apparaît plus stationnaire que l'amplitude, sa valeur moyenne est nulle, son écart type ne dépasse pas 1 niveau de quantification pour des images codées sur 7 ou 8 bits.

### L'ERGODISME

Dans la représentation que nous avons choisie, nous dirons que la grandeur f du processus est ergodique si elle vérifie  $\langle f(i) \rangle = \bar{f}_j$ . La stationnarité étant elle-même mal vérifiée, il est naturel que l'ergodisme le soit encore plus mal. Dans la pratique, ces deux moyennes (selon les lignes ou selon les colonnes) sont égales à 10 ou 20 % près, parfois plus. L'ergodisme au 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre sur les sauts est par contre mieux vérifié et permet de définir une probabilité a priori des sauts, mesurée soit sur les lignes, soit sur les colonnes.

### PROBABILITES D'AMPLITUDE

Il a été remarqué très tôt (1) que l'histogramme d'amplitude n'est pas modélisable. A la suite de SAKRISON (2) nous constaterons que l'histogramme le plus fréquent présente -très grossièrement- une allure bimodale superposée à un fond continu. Ceci rend compte de la nature quasi-générale des images subjectivement satisfaisantes, présentant au contraste notable entre des ombres et des lumières, ou un sujet et son fond.

### PROBABILITE DES SAUTS D'AMPLITUDE

- La probabilité a priori  $P[s(i)]$  présente par contre des propriétés statistiques très remarquables : elle est symétrique, centrée sur le saut nul, et présente une décroissance très régulière caractéristique du type d'image considéré. Elle a longtemps été assimilée à une gaussienne (réf.3), et, plus récemment, à une exponentielle. Ces deux modèles sont des approximations souvent satisfaisantes présentant néanmoins des écarts systématiques avec l'expérience que l'on doit souligner.

## PROPRIETES STATISTIQUES FONDAMENTALES DES SIGNAUX D'IMAGE

En effet, la décroissance exponentielle -et a fortiori- gaussienne- est beaucoup trop forte et conduit à une sous-estimation du nombre des sauts grands ; or, on sait l'importance des sauts forts dans la qualité subjective d'une photo ; ce sont eux qui conditionnent la précision et la finesse des contours, et donc l'impression de netteté ou au contraire de flou de l'image.

Cette décroissance trop rapide a une conséquence pratique très importante, l'estimation des paramètres de la loi à partir des valeurs mesurées de l'écart type conduit à une modélisation très médiocre (cf figure 1), pour laquelle la probabilité du saut nul est alors très sous-estimée.

Une modélisation plus satisfaisante est obtenue par minimisation au sens des moindres carrés (cf. figure 1). Ses caractéristiques sont les suivantes :

- une très bonne estimation des sauts moyens et faibles (les plus probables : de l'ordre de 90 % des sauts) est ainsi obtenue tant par la modélisation gaussienne qu'exponentielle.
- les sauts importants sont toujours sous-estimés, et plus fortement par la loi gaussienne à décroissance plus forte.
- la loi exponentielle est toujours au moins aussi bonne -au sens des moindres carrés- que la loi normale.
- toutes les images admettent une modélisation de ce type à moins de 4 % près.

Si l'on veut rendre compte de la totalité de l'histogramme, en particulier du comportement pour les forts sauts, nous avons établi qu'une répartition à décroissance plus douce de la forme.

$$p(s_i) = \frac{(m_2 - 1) m_1}{2(m_1 |s_i| + 1)} m_2 \quad \text{conduit à une}$$

correspondance presque parfaite pour des valeurs  $m_1 \in [0,01 ; 1]$  et  $m_2 \in [3 ; 10]$ . Néanmoins, cette loi ne se prête pas à des développements analytiques aussi fructueux que le modèle gaussien.

Probabilité des sauts conditionnés par l'amplitude  $P[S(i)|f(i)]$

Nous considérerons pour cette étude des images convenablement numérisées, et ne présentant donc aucune accumulation de points pour les niveaux extrêmes ( $f(i) = 0$  ou  $f(i) = K$ ). Nous excluons donc les images surexposées ou sous-exposées.

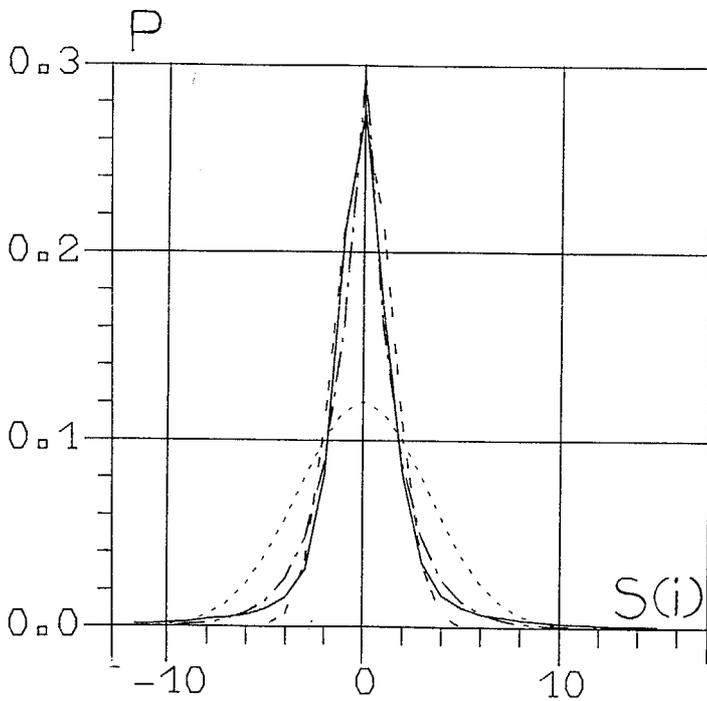
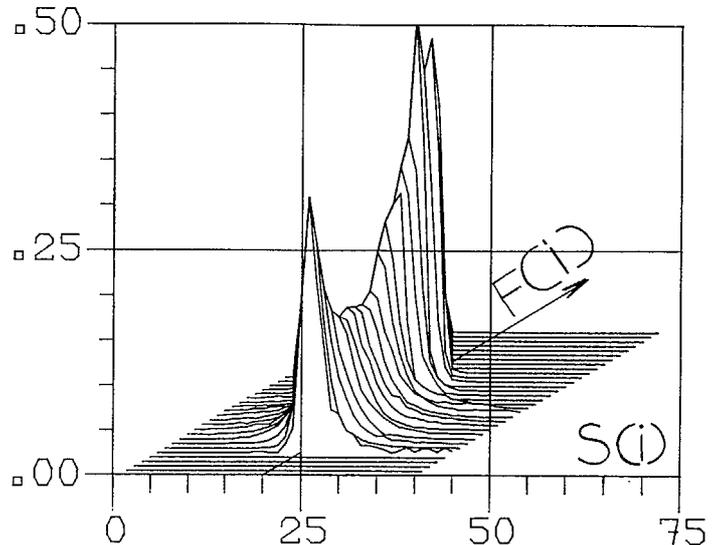


Fig. 1 - Probabilité a priori d'un saut  $s(i)$  : Exemple d'une image particulière.

- — — — — - probabilité mesurée
- - - - - - modèle gaussien minimisant l'écart quadratique moyen
- . . . . . - modèle exponentiel minimisant l'écart quadratique moyen
- . . . . . - modèle gaussien estimé à partir de l'écart type mesuré

Fig. 2 - Exemple de probabilité d'un saut conditionnée par l'amplitude.

### P(S|F)





## PROPRIETES STATISTIQUES FONDAMENTALES DES SIGNAUX D'IMAGE

Nos résultats sur ce point sont très qualitatifs, ils montrent cependant une régularité remarquable qui appelle quelques développements (cf. fig. 2) :

- $P[s(i) | f(i)]$  s'apparente notablement à  $P[s(i)]$  pour toutes les valeurs de  $f$ , c'est une loi "à peu près gaussienne".
- l'influence des niveaux extrêmes ( $f=0$  ou  $f=k$ ) est très peu sensible sur la valeur moyenne de  $P$  si la numérisation est convenable. Le saut nul reste le plus probable.
- cependant, l'écart type de cette loi suit une variation très régulière. Il est faible pour les amplitudes faibles, passe par un maximum pour les amplitudes moyennes, redevient faible pour les fortes amplitudes. Ce résultat s'explique assez bien dans l'hypothèse d'un histogramme d'amplitude bimodal rendant compte de deux "motifs", l'un clair, l'autre sombre, les niveaux moyens correspondants à des zones de transition à variation plus rapide.
- Probabilité d'un saut conditionné par le saut précédent : indépendance

La probabilité  $P[s(i) | s(i-1)]$  peut être représentée par une matrice stochastique (somme le long d'une ligne = 1). Deux modèles ont été proposés pour cette matrice :

- le modèle d'indépendance :  
 $P[s(i) | s(i-1)] = P[s(i)]$  pour lequel toutes les lignes de la matrice sont identiques (réf. 3-5) à la probabilité a priori.
- le modèle d'extrapolation linéaire (réf.1) qui prédit qu'un saut est normalement suivi d'un saut égal avec une probabilité gaussienne.

Nous avons pu établir que ces modèles sont insuffisants pour rendre compte de cette matrice. En effet, la distribution d'un saut, suivant un saut nul est beaucoup moins étalée que celle d'un saut, suivant un saut fort. Ces distributions apparaissent toujours "presque normales" et centrées sur le saut nul. Néanmoins, leur écart type est fortement fonction du saut précédent et à peu près proportionnel à sa racine carrée.

$$P(s(i) | s(i-1)) \approx \frac{1}{\sqrt{(s(i-1) + \alpha) 2\pi}} \exp\left[-\frac{s^2(i)}{2(s(i-1) + \alpha)}\right]$$

cette propriété est très bien vérifiable sur le tableau 3.

Cette dépendance étroite entre la probabilité d'un saut et le précédent nous a conduit à l'étude des puissances successives de la matrice représentant  $P$ . L'expérience nous a montré que dès l'ordre 4 ou 5 environ, ces matrices convergent vers une matrice limite ayant toutes ses lignes égales. Cette probabilité limite (irréductible) est bien égale à la probabilité a priori  $P(s(i))$  avec une très bonne précision. Ceci nous assure de l'indépendance de sauts séparés de quelques points (4 ou 5).

### LA FONCTION D'AUTOCORRELATION

En l'absence de stationnarité véritable, il n'est théoriquement pas possible de définir une fonction d'autocorrélation. On connaît, cependant, l'importance de cette fonction pour les filtrage récurrents ou non récurrents. Cet attrait a conduit à passer outre aux problèmes théoriques (réf.6), et à définir une grandeur mesurable, proche de l'auto-corrélation, et en possédant -on l'espère- les principales propriétés.

Cette grandeur peut être obtenue, par exemple, en prenant une moyenne le long des lignes de "l'auto-corrélation" sur chaque colonnes

$$C_f(k) = \overline{\langle f_j(i) - \langle f(i) \rangle \rangle \langle f_j(i+k) - \langle f(i+k) \rangle \rangle}$$

Nous avons vérifié que cette grandeur pouvait -pour la majorité des images- suivre un modèle de décroissance exponentielle (cf. fig. 4) :

$$C_f(k) = E_0 \cdot e^{-\alpha |k|}$$

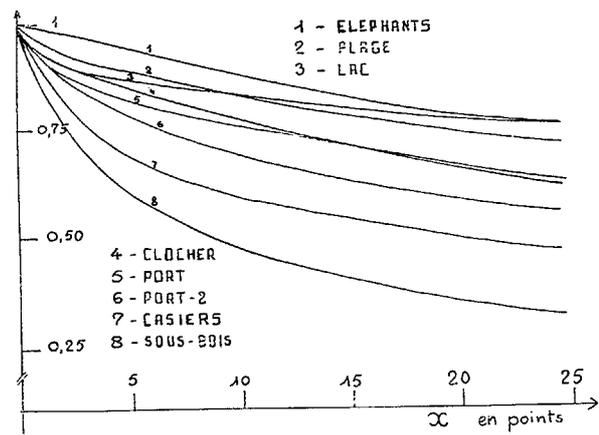


Fig. 4 - "Fonction d'autocorrélation" de diverses images ( $E_0 = 1$  par convention). Ces images comportent entre 500 et 1000 points par ligne. Toutes ces courbes peuvent être convenablement modélisées par une décroissance exponentielle accompagnée d'un bruit à corrélation très étroite.

## PROPRIETES STATISTIQUES FONDAMENTALES DES SIGNAUX D'IMAGE

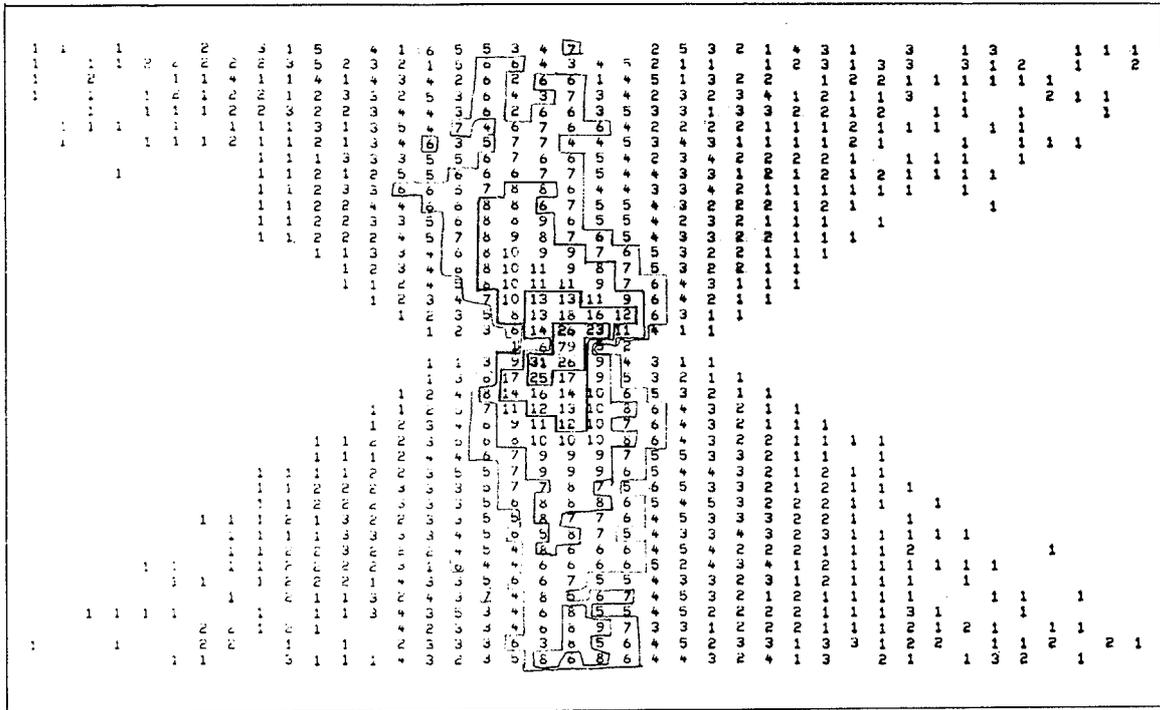


Tableau 3 - Exemple de probabilité du saut conditionnée par le saut précédent (probabilité multipliée par 100 : la somme le long de chaque ligne vaut environ 100).

Néanmoins, trois remarques peuvent être faites :

- ce modèle est d'autant mieux suivi que l'on est près de l'origine  $k = 0$ . La valeur de  $k_{max}$  à partir de laquelle les écarts sont sensibles varie d'une image à l'autre entre 20 et 150 points pour des images de largeur 500 à 1000 points.
- pour les valeurs très faibles de  $k$  ( $k < 5$ ), et selon la qualité de la numérisation de l'image, des écarts peuvent aussi être relevés. Une amélioration notable du modèle peut alors être obtenue en supposant la superposition à l'image d'un bruit à autocorrélation étroite dont l'énergie varie avec la qualité de l'image.
- dans quelques cas imprévisibles à l'examen de l'image, des écarts sont très forts et le modèle apparaît très inadapté.

qu'elle n'était pas vérifiée, la phase suivant une loi sensiblement gaussienne autour d'une valeur moyenne identique pour toutes les images dans les mêmes conditions de calcul.

### CONCLUSIONS

L'interprétation complète des résultats présentés ici n'a pas encore été réalisée. Néanmoins, d'ores et déjà nous devons utiliser avec beaucoup de précautions l'hypothèse de stationnarité, elle n'est applicable que pour les images particulièrement isotropes et de texture uniforme (photos aériennes, microphotographies). De même, l'hypothèse fréquemment utilisée de processus Markovien d'ordre 1 à accroissements indépendants n'est guère compatible avec la dépendance étroite des sauts de l'image.

### STATISTIQUES DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

L'importance de la transformée de Fourier dans la compression d'information ainsi que dans le filtrage et la déconvolution n'est plus à souligner. Quelques modèles statistiques ont été proposés pour la TF monodimensionnelle  $F_j(I)$  de  $f_j(i)$  (réf. 3). Ils reposent sur des hypothèses de base dans le plan de l'image, mais aussi dans le plan transformé. Nous avons vérifié ces hypothèses.

- 1) La non-corrélation de la partie-réelle et de la partie imaginaire de  $F(I)$  peut-être vérifiée avec une bonne précision (coefficient de corrélation inférieur à 0,05 pour toutes les images).
- 2) L'équipartition de la phase de  $F(I)$  est une hypothèse qui ne se déduit pas de la précédente. Toutes nos mesures nous ont montré

### REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur FLEURET pour ses suggestions qui ont abouti à cette étude.

### REFERENCES

- 1 - ESTOURNET D. Onde Electrique - Vol 49 - fasc. 8 - Sept. 1969
- 2 - MANNOS J.L. - SAKRISON D.J. IEEE Trans. Inform. Theory vol IT-20 1974
- 3 - SCHWARTZ P.Y. Annales des Telecom. t26 n° 3-4 - 1971
- 4 - FLEURET J. Thèse Faculté d'Orsay (à paraître)
- 5 - HABIBI A. - WINTZ P.A. IEEE Vol COM-19 n° 1 - Fev. 71.

