

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

R. ANTON et M. BAUDOIN

CIT/ALCATEL 1 AVENUE ARISTIDE BRIAND ARCUEIL

RESUME

A la forme discrète de la transformée de FOURIER, calculée par l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform), correspond une version numérique de la transformée de LAPLACE : la transformée en Z, avec un algorithme de calcul, la CZT (Chirp - Z - transform).

Par une analyse dans le plan complexe, sur un contour autre que l'axe imaginaire, la CZT permet de mieux caractériser les signaux présentant des transitoires.

Nous avons appliqué la CZT à des signaux variés ; ceci nous a permis d'évaluer les performances de cette méthode par rapport à la FFT.

Ces travaux ont été soutenus par la DRME.

SUMMARY

To the discrete form of the FOURIER transform, computed by the FFT algorithm (Fast FOURIER Transform), corresponds a numerical form of the LAPLACE transform : the Z-transform, with a computational algorithm, the CZT (Chirp - Z - Transform).

With an analysis into the complex plane, on a more general contour than that on which the FOURIER transform applies, the CZT allows us to more accurately evaluate the spectrum of impulse type signals.

We applied the CZT to various signals. This allowed us to evaluate advantages of this method as compared to the FFT method.

This work was sponsored by DRME.



INTRODUCTION

La transformée de FOURIER appliquée à un signal temporel permanent permet de caractériser ce signal en représentation fréquentielle.

Cet outil, particulièrement adapté à l'étude de signaux permanents est universellement utilisé en traitement du signal.

La transformée de LAPLACE, sous sa forme complexe, réalise une analyse à la fois en fréquence et en amortissement.

Cette méthode semble, de ce fait, mieux adaptée à l'étude de signaux impulsionnels et doit permettre de caractériser la fonction de transfert d'un système réel.

Peut-on utiliser la transformée de LAPLACE, notamment sous sa forme numérique : la CZT (Chirp Z Transform) pour l'analyse de signaux physiques ?

Que peut apporter cette méthode par rapport à l'analyse fréquentielle de FOURIER (algorithme FFT) ?

Nous allons essayer de répondre à ces questions par des considérations pratiques faites à partir de l'étude des résultats obtenus par la CZT sur des exemples simples.

Après un bref rappel mathématique sur la transformée de LAPLACE, nous présentons rapidement l'algorithme CZT de RABINER, SCHAFER et RADER [1]. Les résultats d'analyse de signaux synthétiques simples nous conduiront alors à faire quelques remarques quant à l'emploi de cette méthode et son intérêt en traitement du signal.

1. TRANSFORMEE DE LAPLACE

Soit $f(t)$ une fonction de la variable réelle t , définie pour tout t et nulle pour $t < 0$. On appelle transformée de LAPLACE de $f(t)$ la fonction

$$(1) \quad F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

où p est une variable complexe, telle que sa partie réelle $R(p)$ est supérieure à un nombre donné σ , et que dans ces conditions l'intégrale (1) est convergente. Si p est imaginaire pur $F(p)$ se réduit à la transformée de FOURIER de la fonction égale à 0 si $t < 0$ et à $f(t)$ si $t \geq 0$.

On utilisera les règles du calcul symbolique, en particulier la propriété de linéarité :

Si $f_k(t)$ a pour transformée $F_k(p)$, ce qui s'écrit $f_k(t) \rightarrow F_k(p)$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n f_k(t) \rightarrow \sum_{k=1}^n F_k(p)$$

et le théorème de la variable concrète ou du retard.

$$(3) \quad f(t) \rightarrow F(p) \rightarrow f(t-\tau) \rightarrow e^{-p\tau} \cdot F(p) \quad (\tau > 0)$$

2. ALGORITHME CZT

De même que la DFT est la version discrétisée de la transformée de FOURIER que l'on met en oeuvre par l'algorithme FFT, la "Chirp Z Transform" est la version discrétisée de la transformée de LAPLACE.

2.1 - Evaluation de la transformée en Z

Si on échantillonne la fonction $f(t)$ avec une période τ , la transformée de LAPLACE de cette fonction devient :

$$F(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\tau) f(n\tau) e^{-pt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau) e^{-pn\tau}$$

ce qui en posant $z = e^{p\tau}$ nous donne la transformée en Z de $f(t)$ échantillonnée :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n\tau) z^{-n}$$

Cette dernière sera évaluée dans le plan Z en M points discrets situés sur une spirale au moyen de l'algorithme CZT. Soit pour une série limitée à N points en posant $z_k = z_0 W^k$:

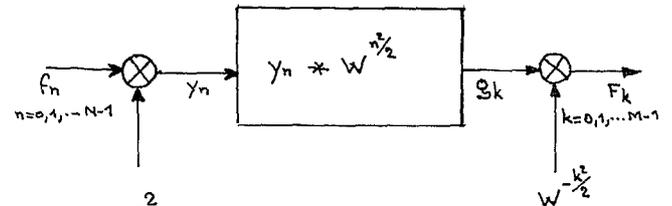
$$F(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau) z_0^{-n} W^{-nk} ; k=0,1,2,\dots, M-1$$

ce que l'on écrit encore sous la forme :

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau) z_0^{-n} \cdot W^{-n^2/2} \cdot W^{-k^2/2} \cdot W^{(n-k)^2/2} \quad k=0,1,2,\dots, M-1$$

On voit que l'opération se décompose en 3 parties :

- pondération
- convolution
- pondération



$$\begin{cases} z_0 W^{-n^2/2} & n = 0 \text{ à } N-1 \\ 0 & n = N \text{ à } L-1 \end{cases}$$

Pondération :

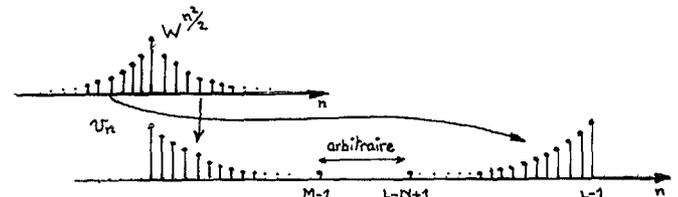
$$y_n = \begin{cases} f_n z_0^{-n} W^{-n^2/2} & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & n = N, N+1, \dots, L-1 \end{cases}$$

L est le plus petit entier composite ($\approx 2^p$) qui soit $\geq N + M - 1$

Convolution :

$$g_k = \sum_{n=0}^{L-1} y_n W^{(k-n)^2/2} \quad k = 0, 1, \dots, L-1$$

Cette convolution se calcule par FFT. On dispose d'une série de L points de $W^{n^2/2}$ disposés de la manière suivante :



On constitue une série v_n par :

$$v_n \equiv W^{n^2/2} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq M-1$$

$$v_n \equiv W^{\frac{(n-L+1)^2}{2}} \quad \text{pour } L - (N-1) \leq n < L-1$$

v_n arbitraire entre ces 2 sous-séries (par exemple zéro)

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

par FFT, on obtient : $v_n \rightleftharpoons Vr$
 $y_n \rightleftharpoons Yr$

$Gr = Vr.Yr \rightleftharpoons g_k$ dont on retient seul les M premiers points.

Pondération : $F_k = g_k \cdot W^{-k^2/2}$ $k = 0, 1, \dots, M-1$

2.2 Interprétation physique : la CZT vue comme un "filtrage adapté"

Supposons que le point de départ du contour d'analyse (spirale) soit $z_0 = 1$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau) \{e^{(-\Delta\sigma + j\Delta\omega)\tau}\}^{-nk} \quad k=0,1,\dots,M-1$$

ce qui s'écrit, pour $N = M$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau) e^{nk\Delta\sigma\tau} \cdot e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Cette forme montre que l'analyse CZT est adaptée aux "signaux amortis" de la forme :

(4) $f(t) = K \cdot e^{-\lambda_0 t} \sin \omega_0 t \quad (t > 0)$

Une analyse de ce type de signal au voisinage du pôle, pour un amortissement adapté, montre que la CZT est analogue à une FFT,

2.3 - Comparaison de la CZT à la FFT

La CZT permet l'analyse en bande étroite à haute résolution. Dans le cas de la FFT, si on désire une résolution en fréquence Δf pour une fréquence d'échantillonnage $1/T_e$, il faut N points tel que $N > 1/(T_e \cdot \Delta f)$. Si Δf est très petit, cela conduit à un nombre de points N élevé, de plus la résolution est liée à la longueur temporelle de la séquence à analyser ; la CZT permet une analyse à bande étroite à haute résolution puisque la bande à analyser ne dépend que du contour (fréquence initiale et fréquence finale) et sans augmentation de temps de calcul.

L'algorithme CZT permet également d'évaluer la transformée en Z dans tout le plan Z et un pas seulement sur le cercle unité comme le fait la FFT ; ceci est important dans l'étude des fonctions de transfert dont la forme est un rapport de polynômes en z.

Limitations de l'algorithme

- * Précision des calculs $\pm n^2/2$
 Hors du cercle unité, le terme $W^{-n^2/2}$, pour de grandes valeurs de n peut devenir très grand ou très petit, et atteindre par conséquent, la capacité maximale du calculateur ; cette erreur de calcul peut apparaître notamment dans le calcul des termes correspondant aux fréquences élevées.
- * Limitation due aux FFT
 La CZT fait appel au calcul de 2 FFT à L points et une FFT à L/2 points ($L > N + M - 1$). Il faut calculer :
 - une FFT et prévoir 2 L emplacements mémoire pour la transformation $x_n A^{-n} W^{-n^2/2}$;

- une FFT et L+2 emplacements mémoire pour la transformation $W^{-n^2/2}$
- et enfin une FFT pour la transformation inverse du produit de ces deux dernières transformations.

3. ANALYSE DE SIGNAUX SYNTHETIQUES

Afin d'approcher au mieux les performances et les limitations de la CZT, on a procédé à l'étude de signaux simples :

- . sinusoïde amortie isolée
- . sinusoïde amortie récurrente.

Cette étude a été menée sous 2 angles :

- contrôle des résultats obtenus par la CZT justification théorique à partir de l'expression mathématique de la transformée de LAPLACE en continu
- comparaison avec les résultats obtenus par FFT.

3.1 - Sinusoïde amortie isolée

Le signal synthétique analysé est de la forme :

(4) $f(t) = K \cdot e^{-\lambda_0 t} \cdot \sin \omega_0 t$

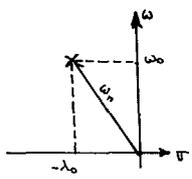
C'est la réponse impulsionnelle d'un système caractérisé par un pôle unique de coordonnées $-\lambda_0$ et ω_0 .

L'expression mathématique de l'intégrale de LAPLACE de ce signal, sur une durée limitée T, peut être calculée et mise sous la forme suivante :

(5) $F(\sigma+j\omega) = K \frac{\omega_0 \cdot e^{-(\lambda+\sigma)T} \cdot e^{-j\omega T} S}{(\lambda+\sigma)^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + 2j(\lambda+\sigma)\omega}$

avec $S = \omega_0 \cos \omega_0 T + (\lambda+\sigma) \sin \omega_0 T + j\omega \sin \omega_0 T$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \omega_n \xi \\ \omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \end{array} \right.$ et $\omega_n = 2\pi F_n$,
 $F_n =$ fréquence propre



σ et ω caractérisent le contour d'analyse.

Les figures 2,3,4 et 5 montrent les résultats obtenus avec différents segments d'analyse :

- . figure 2 : contour vertical d'abscisse nulle (axe des pulsations)
- . figure 3 : contour incliné à droite du pôle
- . figure 4 : contour incliné passant par le pôle (contour adapté)
- . figure 5 : contour incliné passant à gauche du pôle.

L'examen de ces figures appelle plusieurs remarques :

- 1°) Comparaison CZT et Transformée de LAPLACE :
 Le tracé du module de l'expression analytique (5) coïncide, à paramètres égaux, avec les spectres obtenus par la CZT.
- 2°) Comparaison CZT avec FFT :
 La comparaison des figures 1 et 2 montre qu'une analyse CZT sur l'axe des pulsations donne les mêmes résultats qu'une FFT.
 L'amplitude du pic augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche du contour adapté, en même temps



que la largeur diminue.

3°) Perturbations d'analyse

On note, sur les analyses en contour incliné (dans la partie gauche du plan (σ, ω)) l'apparition d'une composante linéaire (en dB) modulée, d'autant plus forte que la pente est élevée.

Cette composante parasite peut être mise en évidence dans l'expression théorique du spectre complexe d'une sinusoïde isolée (5).

Son influence est négligeable tant que $\lambda + \sigma > 0$ c'est-à-dire tant que l'on se situe à droite du pôle sur la droite d'analyse mais devient vite prépondérant lorsque $\sigma < -\lambda$ et est proportionnelle à la durée d'analyse T.

3.2 - Sinusoïde amortie récurrente

Le signal synthétique analysé est de la forme :

$$(6) \quad f_{\tau}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t-k\tau) \quad \text{avec } T = n\tau$$

n = nombre de récurrences dans le temps T
 τ = période de récurrence
 T = durée du signal analysé

avec $f(t) = Ke^{-\lambda t} \cdot \sin \omega_0 t$

D'après les propriétés de la transformée de LAPLACE précédemment rappelées, on a :

(7) Si $f(t) \supset F(\sigma + j\omega)$,

$$f_{\tau}(t) \supset F(\sigma + j\omega) = \frac{1 - e^{-n\tau(\sigma + j\omega)}}{1 - e^{-\tau(\sigma + j\omega)}}$$

(8) Soit en module :

$$||F_{\tau}(\sigma + j\omega)|| = ||F(\sigma + j\omega)|| \sqrt{\frac{1 + e^{-2n\sigma\tau} - 2e^{-n\sigma\tau} \cos n\omega\tau}{1 + e^{-2\sigma\tau} - 2e^{-\sigma\tau} \cos \omega\tau}}$$

Les figures 6, 7 et 8 correspondent à des contours différents :

- . figure 6 contour vertical (analyse de FOURIER)
- . figure 7 contour incliné à droite du pôle
- . figure 8 contour incliné passant par le pôle (contour adapté)

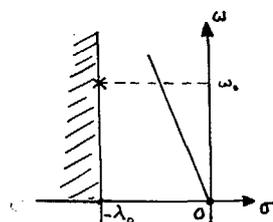
Dans ce cas, les remarques que l'on peut faire sont analogues à celles effectuées pour l'analyse d'une sinusoïde isolée.

La composante parasite supplémentaire due à la récurrence provient du terme multiplicatif de l'expression (8).

3.3 - Conclusions

L'étude d'une sinusoïde amortie isolée a montré l'influence du contour d'analyse.

On en déduit que l'importance de la composante parasite superposée au spectre ne reste négligeable qu'à condition de rester dans le demi-plan droit limité par l'abscisse du pôle.



Une sinusoïde amortie récurrente considérée comme la somme de sinusoïdes amorties isolées décalées dans le temps, donne lieu à une composante qui est la résultante des composantes dues au décalage de chaque sinusoïde par rapport au début de la fenêtre d'analyse.

Dans le cas d'un signal réel constitué d'un mélange de sinusoïdes amorties récurrentes, les différentes composantes parasites dégradent le spectre qui peut devenir inexploitable.

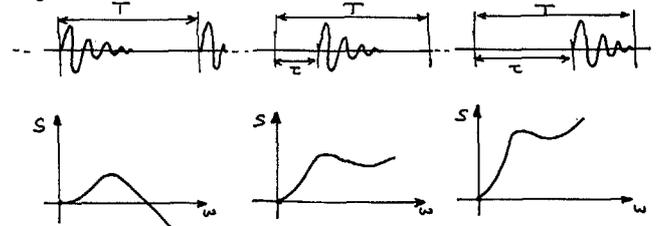
4. APPLICATIONS EN TRAITEMENT DU SIGNAL

4.1 - Analyse en fréquence et en amortissement (contour incliné)

L'application de la CZT peut apporter des résultats supérieurs à ceux de la FFT dans le cas de signaux fortement amortis et de récurrence faible.

En effet en choisissant une durée d'analyse inférieure à la période de récurrence d'une part et un contour situé à droite du pôle estimé, on peut améliorer la détection d'un signal.

Toutefois, l'allure du spectre reste fonction de la position de la fenêtre d'analyse par rapport au début du signal.



La composante, fonction du retard τ et l'amortissement du signal, ne peut être compensée.

Par contre, si l'on choisit un contour vertical, les composantes (linéaires en σ) deviennent des constantes que l'on peut espérer compenser par simple translation du spectre en dB.

4.2 - Analyse en fréquence à amortissement constant

L'analyse sur un contour vertical permet de s'affranchir d'une certaine manière de la composante linéaire et également du coefficient W_0 .

En effet, $z_k = z_0 W^k$ qui s'écrit $z_k = z_0 W_0^k e^{jk\Delta\omega\tau}$ se simplifie en $z_k = z_0 e^{jk\Delta\omega\tau}$ puisque $W_0 = e^{\Delta\sigma \cdot \tau} = 1$

soit pour la raie d'ordre k :

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau) z_0^{-n} e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

vue sous cette forme la CZT apparaît bien comme une analyse de FOURIER adaptée en amortissement pour des signaux échantillonnés de la forme :

$$f(n\tau) = K e^{-\lambda_0 n\tau} \cdot e^{j2\pi f_0 n\tau}$$

Soit pour ce type de signal :

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} K z_0^{-n} \cdot e^{-\lambda_0 n\tau} \cdot e^{j2\pi n\tau(f_0 - k\Delta f)}$$

z_0 se simplifiant à $e^{\sigma_0 \tau}$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} K e^{-(\lambda_0 + \sigma_0)n\tau} \cdot e^{-(\lambda_0 + \sigma_0)n\tau} \cdot e^{j2\pi n\tau(f_0 - k\Delta f)}$$

ce qui dans le cas du contour adapté, donne un module :

$$|F(k)| = K \left| \frac{\sin \pi(N\tau(f_0 - k\Delta f))}{\pi(N\tau(f_0 - k\Delta f))} \right|$$

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

On est en droit de trouver un spectre dont la réponse sera un $\sin X/X$ décalé d'une composante continue dans le cas d'une analyse effectuée au-delà du pôle.
 Il est intéressant d'examiner les spectres obtenus par la CZT en contour vertical appliquée à un signal synthétique.

- . figure 9 : sinusoïde amortie isolée sur une durée T
- . figure 10 : sinusoïde amortie récurrente
3 récurrences sur une durée T
- . figure 11 : sinusoïde amortie récurrente
5 récurrences sur une durée T

Ces analyses ont été effectuées sur un contour adapté, elles mettent en évidence la période d'un signal récurrent notamment dans les figures 10 et 11.

4.3 - Application de la CZT en signaux réels

La CZT a été appliquée à l'analyse de bruit rayonné par des bateaux.
 On présente dans les figures 12 et 13 puis 14 et 15, les résultats de l'analyse de deux enregistrements. Ces courbes montrent l'amélioration apportée par le choix d'un contour à amortissement approchant l'adaptation par rapport à un contour voisin de l'axe de FOURIER.

CONCLUSION

L'étude de signaux synthétiques simples à l'aide de la transformée de LAPLACE nous a permis de mieux cerner les possibilités et les limitations de la CZT.

Son emploi s'avère délicat dans le cas de signaux inconnus, notamment en contour incliné.

Cependant, moyennant un choix judicieux des paramètres d'analyse (contour particulier), selon la nature du signal à traiter, la CZT devient un outil intéressant en extraction.

S'il s'agit, en particulier, de rechercher la dispersion des caractéristiques d'un système par rapport à un étalon, la CZT apporte une finesse d'analyse supérieure à la FFT.

Rappelons enfin que la CZT permet une analyse sur une bande de fréquence F_1-F_2 , ce qui est particulièrement intéressant dans le cas de recherche de signaux à fréquences élevées.

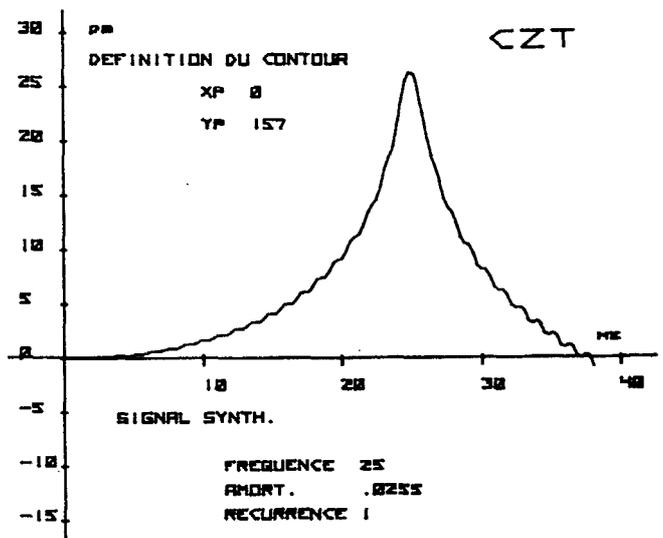


Figure 2

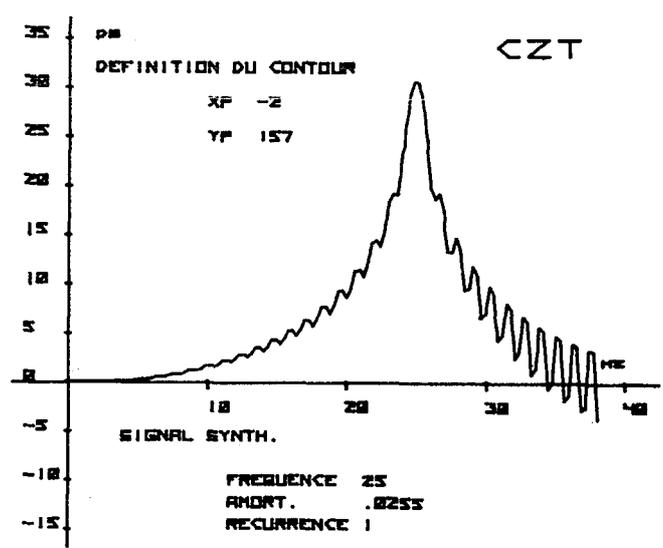


Figure 3

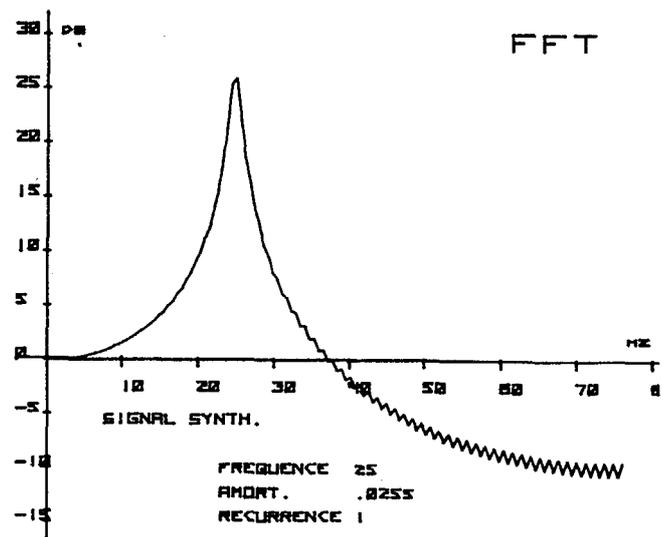


Figure 1

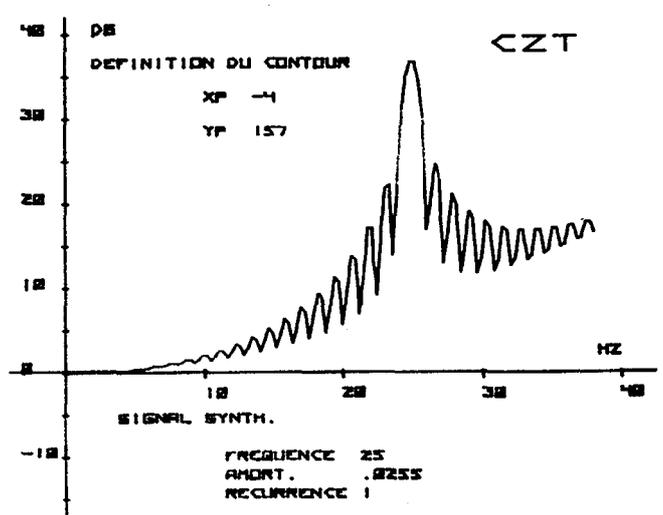


Figure 4



APPLICATIONS DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

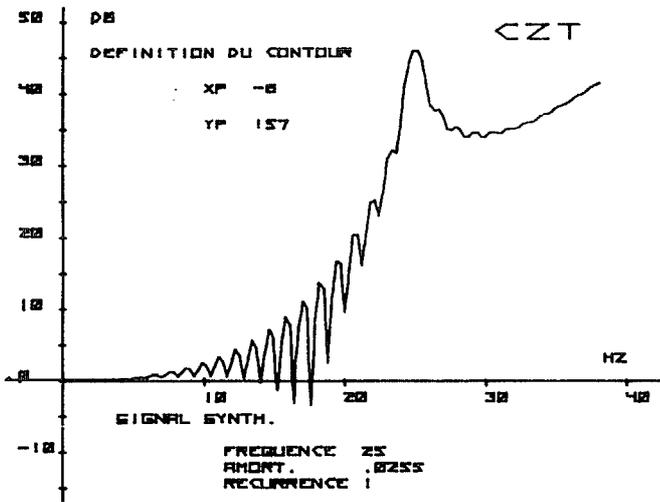


Figure 5

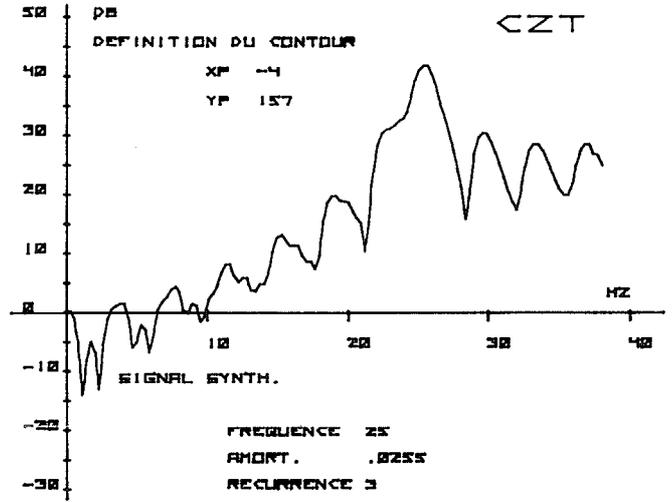


Figure 8

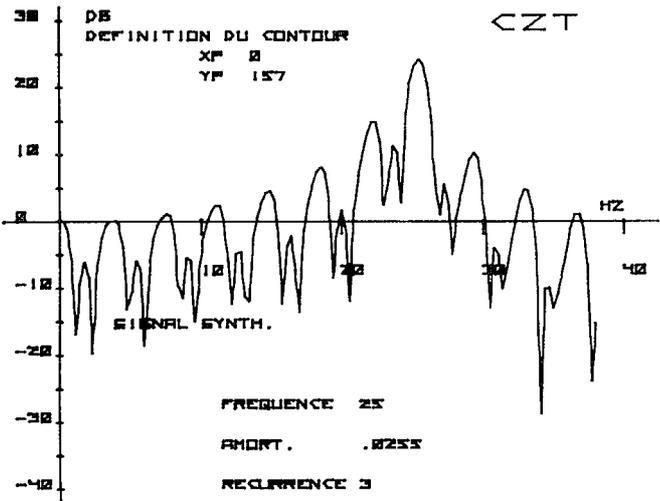


Figure 6

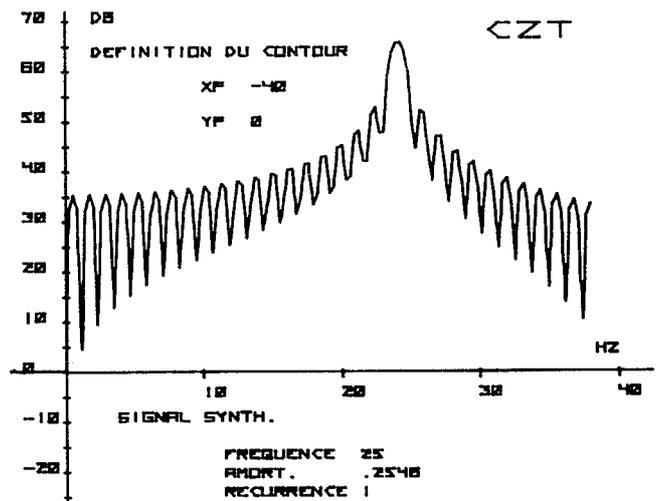


Figure 9

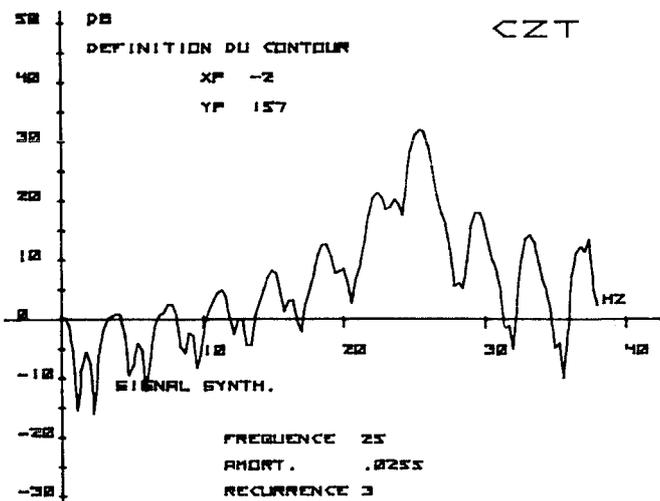


Figure 7

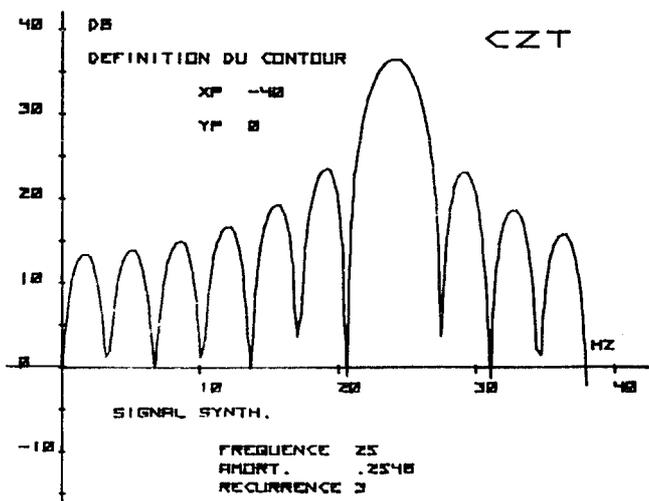


Figure 10

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

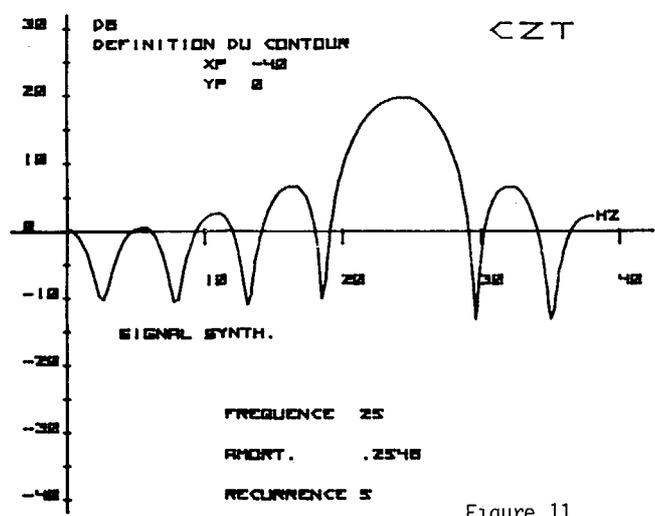


Figure 11

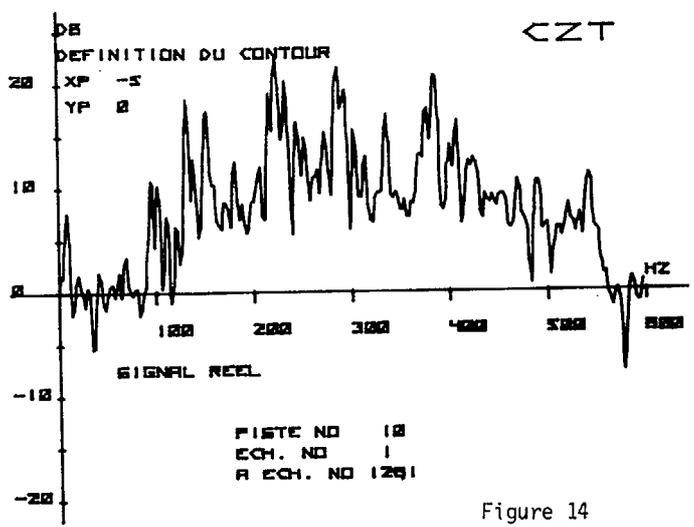


Figure 14

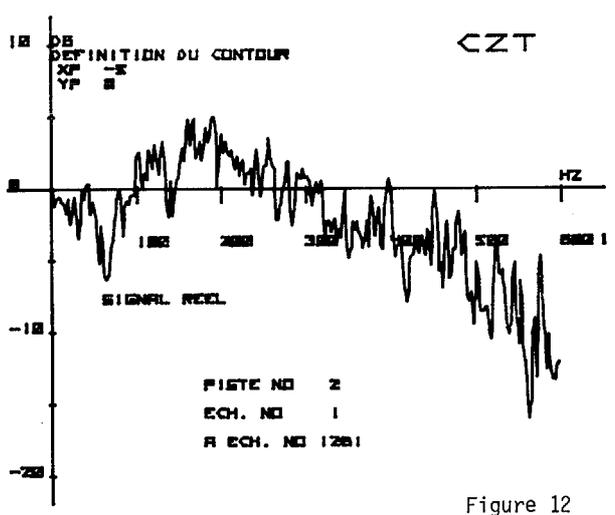


Figure 12

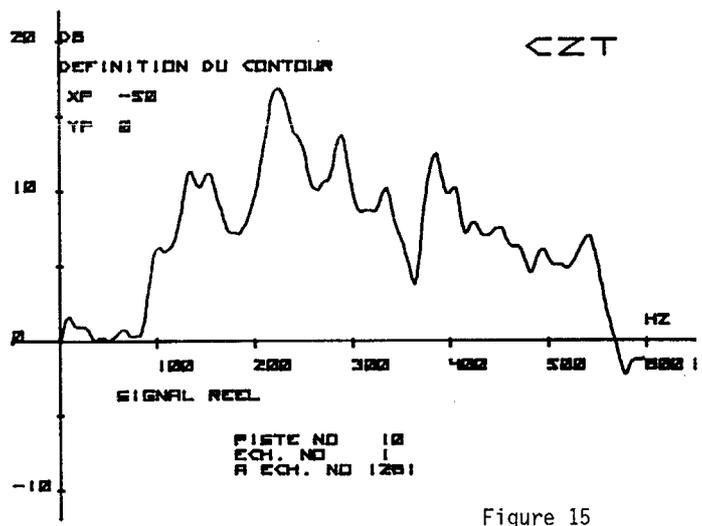


Figure 15

REFERENCES

- (1) The Chirp-Z-Transform Algorithm and its Application by Lawrence R. RABINER, Ronald W.SCHAFFER, and Charles M. RADER
Bell System Technical Journal, May June 1969, Vol. 48 n° 5
- (2) Theory and Application of Digital Signal Processing by Lawrence R. RABINER and Bernard GOLD
- (3) Digital Signal Processing "OPPENHEIM and SCHAFFER"

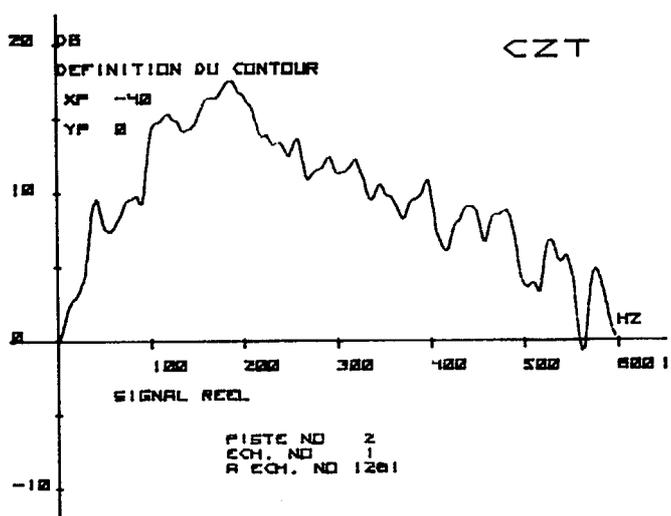


Figure 13

