

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

---

QUELQUES PROBLEMES ASSOCIES A LA RECONSTRUCTION D'IMAGES A PARTIR  
DE PROJECTIONS

APPLICATION A LA TOMOGRAPHIE AXIALE TRANSVERSE

Philippe GARDERET

Laboratoire d'Electronique et de Technologie de l'Informatique  
Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble 85 X 38041 GRENOBLE CEDEX

---

## RESUME

Il est possible, moyennant quelques hypothèses simples, de présenter de façon unitaire les problèmes de reconstruction d'images à la fois en tomographie par transmission et en tomographie par émission.

Une analyse des conditions physiques de la mesure conduit à la détermination d'une fonction globale de distorsion du système (FGD). Cette fonction permet de prendre en compte à la fois les effets d'atténuation et les effets de diffusion.

A partir de cette donnée expérimentale on présente (dans le cas bi-dimensionnel pour simplifier la formulation) les équations régissant la formation des projections et celles permettant la reconstitution à partir de ces projections.

Une procédure type de reconstruction tri-dimensionnelle est alors proposée et les difficultés liées à la mise en oeuvre évaluées.

## SUMMARY

Assuming some simple hypothesis one may present in a single way the image reconstruction problems both for transmission tomography and emission tomography.

An analysis of physical conditions of measurement introduces the definition of a global distortion function for the system (GDF). This function includes both the effects of attenuation phenomena and scattering phenomena.

Taking into account that experimental data we can expose (in the bi-dimensionnal case for formulation simplicity) the equations describing projections formation and allowing images reconstruction from the projection measurements.

A typical tri-dimensionnal reconstruction procedure is then proposed and difficulties for digital implementation reviewed.

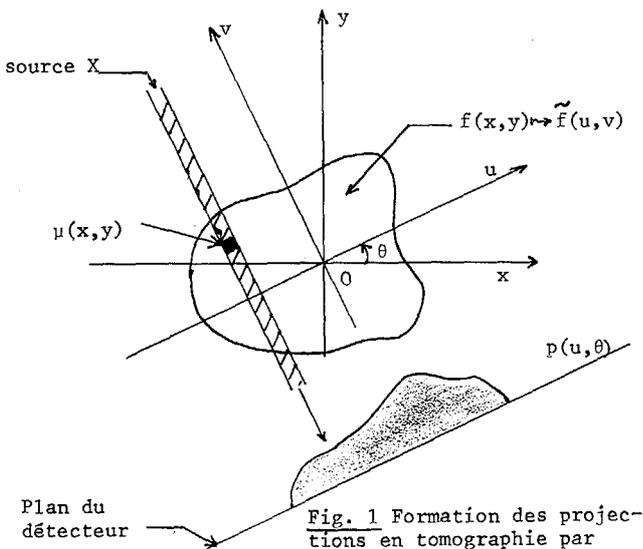


RECONSTRUCTION D'IMAGES A PARTIR DE PROJECTIONS  
APPLICATION A LA TOMOGRAPHIE AXIALE TRANSVERSE

I - Position du problème de reconstruction en radiologie et en médecine nucléaire

Le problème de la reconstruction des images à partir d'un ensemble de projections se retrouve dans des problèmes très différents de la physique appliquée comme en radio-astronomie ou la microscopie électronique, et bien entendu en médecine où des développements spectaculaires en exploration interne peuvent être attendus de sa solution.

La radiologie utilise des informations concernant la transmission à travers le corps étudié d'un faisceau issu d'une source externe de rayons X. L'image  $f(x,y)$  à reconstituer pour une coupe est en fait, dans le cas présent, la cartographie des valeurs du coefficient linéaire d'absorption des tissus traversés  $\mu(x,y)$ .



Pour une intensité fixe de la source  $I_0$ , le logarithme de l'intensité reçue est alors proportionnel à l'intégrale des coefficients d'absorption des tissus traversés. On peut alors définir une "projection"  $p(u,\theta)$  (Fig.1) par la relation :

$$p(u,\theta) = \int \tilde{f}(u,v) dv \quad (1)$$

où  $\tilde{f}(u,v)$  n'est autre que l'expression de la fonction  $f(x,y)$  dans le nouveau repère  $\{u,v\}$

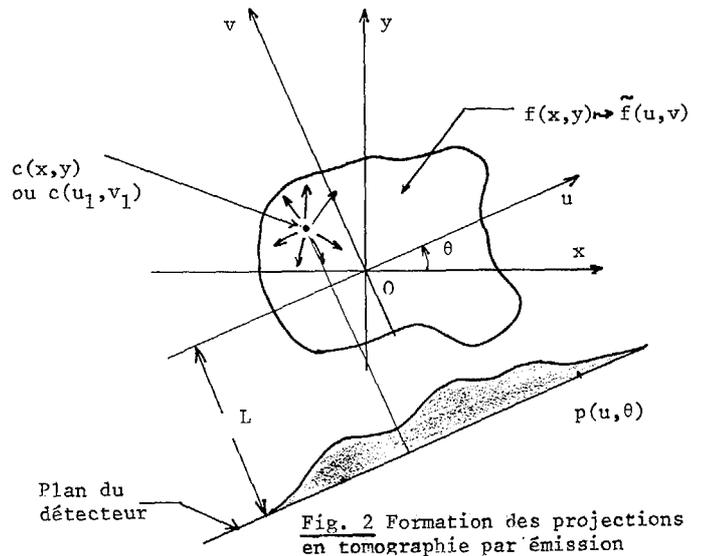
$$f(u,v) = f(x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$$

Il est à remarquer que dans ce cas la mesure peut être considérée comme la collation des mesures faites par un faisceau infiniment étroit explorant successivement et indépendamment toutes les directions et pour chaque direction tous les pas en abscisse.

C'est cette hypothèse de faisceaux non chevauchant qui permet en particulier de réduire en tomographie par transmission tout problème tri-dimensionnel

reconstruction d'un objet  $f(x,y,z)$  - en  $N$  problèmes bi-dimensionnels - reconstruction des objets-coupes  $f(x,y,z_i) i \in \{1,N\}$ . L'objet initial est alors reformé par simple concaténation des coupes successives selon l'axe  $Oz$ .

Le problème est infiniment plus complexe en médecine nucléaire. Il s'agit dans ce cas d'utiliser les informations concernant l'émission produite par des radioéléments répartis au sein du corps étudié. L'image  $f(x,y)$  à reconstituer pour une coupe est ici la cartographie des valeurs locales de la concentration  $c(x,y)$  pour l'isotope utilisé. Une "projection" dans une direction d'angle  $\theta$ , c'est-à-dire les valeurs du comptage effectué sur les cellules du détecteur situé dans ce plan, prend en compte les trois phénomènes suivants :



- Valeur de la concentration de radio-éléments au point source par exemple  $c(u_1, v_1)$
- Distance du point source au plan de collimation (dans notre cas  $v_1 + L$ ) introduisant une atténuation dépendant du coefficient d'absorption des tissus traversés sur le trajet source-détecteur.
- Diffusion de l'émission incidente ; une source située à l'abscisse  $u_1$  crée, du fait de la diffusion dans le milieu un rayonnement capté sur le détecteur qui intéresse toute une plage d'abscisses autour de  $u_1$ .

Les conséquences de la superposition de ces trois phénomènes rend plus malaisée une modélisation simple du mécanisme de formation des projections. En particulier il n'est plus possible de concevoir le système comme travaillant en faisceaux non chevauchant et indépendants et par là même de décomposer sans précautions supplémentaires les problèmes tri-dimensionnels en une somme de problèmes partiels à deux dimensions.

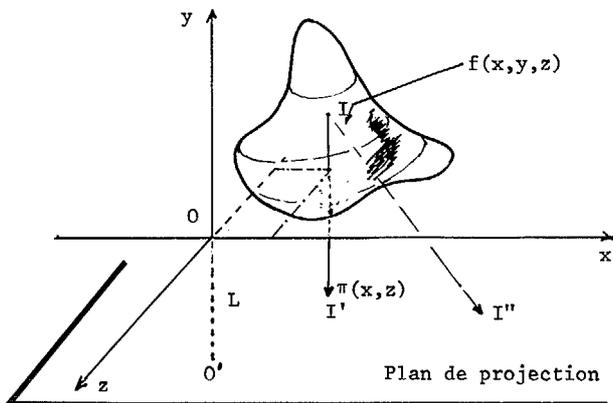
RECONSTRUCTION D'IMAGES A PARTIR DE PROJECTIONS  
APPLICATION A LA TOMOGRAPHIE AXIALE TRANSVERSE

Nous allons nous attacher dans le paragraphe suivant à analyser les hypothèses raisonnables permettant en première approximation la modélisation du système.

II - Hypothèses simplificatrices - Définition d'une fonction globale de distorsion (FGD) du système

a) Phénomène d'atténuation

Reprenons la description d'un système de tomographie par émission dans le cas tri-dimensionnel.



Soit  $f(x,y,z)$  la fonction à reconstituer, représentant dans le cas présent la concentration de radioélément. Supposons que le plan de projection qui nous intéresse soit parallèle au plan  $\{Ox,Oz\}$  et à une distance  $L$  de celui-ci ; sur le rayon  $II'$  l'atténuation s'exprime rigoureusement par :

$$\pi(x,z) = f(x,y,z) \exp\left\{-\int_I^{I'} \mu(x,y,z) dy\right\} \quad (2)$$

Sur un trajet quelconque  $II''$  l'atténuation dépend donc non seulement de la longueur du trajet parcouru mais de la nature des tissus traversés. En toute rigueur le problème de tomographie par émission est un problème d'estimation des valeurs locales de concentration conditionnellement à une répartition globale de densité. Pour un objet dont la répartition des densités est inconnue il est nécessaire de faire - par exemple au moyen d'une tomographie par transmission - une estimation de cette densité. Cette mesure préliminaire peut dans certains cas être remplacée par une connaissance a priori de l'objet ; si l'ignorance reste totale il est possible de faire l'approximation d'homogénéité : ceci revient à dire que l'objet et l'environnement de l'objet ont une densité d'absorption homogène  $\mu$ . Il est alors possible d'attribuer à toute source interne située à une ordonnée  $y + L$  par rapport au plan un coefficient décrivant l'atténuation de la forme :

$$K_a(y) = e^{-\mu(y+L)} \quad (3)$$

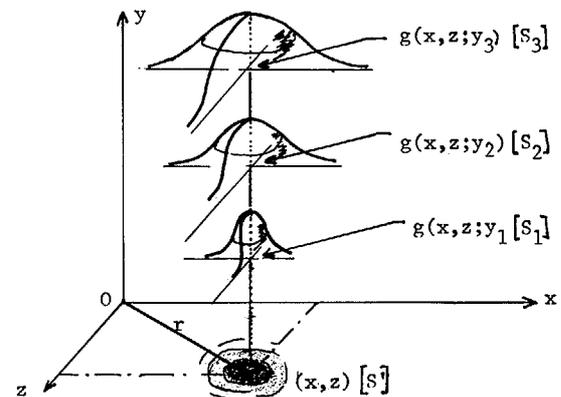
Ce coefficient prend alors en compte de façon approchée l'éloignement de la source au plan de détection.

b) Phénomène de diffusion :

L'effet de la diffusion dans le système de formation des projections est facilement mis en évidence par l'expérience ; il suffit d'enregistrer sur l'ensemble de détection la trace d'un objet source ponctuel ou quasi ponctuel. Ce phénomène peut traduire à la fois la diffusion du rayonnement par interaction dans le milieu traversé et toute diffusion pouvant prendre siège au sein même du système de détection.

Pour un objet source d'intensité unité et localisé au point  $S$  de coordonnées  $\{x,y,z\}$  la diffusion est caractérisée dans le plan du détecteur par une fonction de répartition du flux détecté :  $g(x,z,S)$  (le paramètre  $S$  est là pour indiquer que, sauf hypothèses supplémentaires, à chaque localisation d'un point source correspond une tache de diffusion différente).

Nous ferons ici aussi des hypothèses simplificatrices dont l'une rejoint celle de quasi homogénéité déjà faite au point a) ; à savoir que la fonction  $g(x,y,S)$  est invariante pour une translation de la source parallèlement au plan de détection ; la fonction  $g$  peut alors être vue comme caractérisant, pour toute source située dans un plan parallèle au plan de détection à une ordonnée  $y$ , un filtre linéaire spatial de réponse impulsionnelle :  $g(x,z,y_S)$



Il est bien clair que l'étendue de cette tache de diffusion est d'autant plus grande que le point source est éloigné du plan de détection ; de plus, des considérations physiques simples confirmées par quelques expériences permettent de considérer une distribution de type gaussien à symétrie de révolution autour de l'axe de projection comme une bonne modélisation mathématique du phénomène.

$$g(r,y) = e^{-kr^2/\sigma^2} \quad \text{où } r \text{ est la distance du point } S' \text{ à l'origine} \quad (4)$$

La variance de cette distribution varie approximativement de façon linéaire avec l'ordonnée  $y$  :

$$\sigma = \beta y + \gamma \quad (5)$$



RECONSTITUTION D'IMAGES A PARTIR DE PROJECTIONS  
APPLICATION A LA TOMOGRAPHIE AXIALE TRANSVERSE

c) Définition de la fonction globale de distorsion (FGD)

Les phénomènes d'atténuation et de diffusion peuvent être rassemblés dans une notion unique à laquelle nous donnerons le nom de fonction globale de distorsion (FGD) ; nous l'écrivons :

$$d(u,v,w) = Ka(v) g(u,v,w) \quad (6)$$

Les coordonnées  $\{u,v,w\}$  sont indiquées ici pour montrer que  $d$  a une même expression dans tout repère lié au système de projection considéré ; (projection orthogonale dans un plan parallèle au plan  $\{Ou,Ow\}$ ).

On peut alors décrire les différentes étapes de la formation d'une projection de la manière suivante :

- . soit  $f(x,y,z)$  l'objet à projeter
- . soit  $\pi$  le plan de projection défini par exemple par les angles  $\theta$  et  $\phi$  de son intersection sur  $\{Ox,Oy\}$  et  $\{Ox,Oz\}$ .
- . on peut lier à  $\pi$  un système de coordonnées  $\{u,v,w\}$  ayant en particulier comme axes  $u$  et  $w$  les intersections précitées.
- . Dans ce système  $f$  s'écrit  $f(u,v,w)$  en utilisant les formules classiques de changement de repère.
- . La projection sur le plan  $\{Ou,Ow\}$  s'écrit alors

$$\pi(u,w; \theta, \phi) = \int \left[ \tilde{f}(u,v,w) *_{u,w} d(u,v,w) \right] dv \quad (7)$$

où  $*_{u,w}$  décrit la convolution bi-dimensionnelle en  $u$  et  $w$ . Dans tout ce qui suit nous nous contenterons du formalisme à deux dimensions, c'est-à-dire le cas de la projection sur une droite ( $y=0, w=0$ ) d'un objet bi-dimensionnel  $f(x,y)$ . La fonction globale de diffusion est alors  $d(u,v)$ .

III - Equations générales et algorithmes de reconstruction :

III - 1. Equations régissant le système de projections :

Nous considérons comme valides l'ensemble des hypothèses envisagées dans le paragraphe précédent. En particulier nous considérons comme acquise la donnée d'une fonction globale de distorsion du système (FGD) :  $d(u,v)$ .

Pour un angle  $\theta$  donné la projection  $p(u,\theta)$  est donnée par application de la formule (7) :

$$\begin{aligned} p(u,\theta) &= \iint \tilde{f}(u-s,v) d(s,v) ds dv \quad (8) \\ &= \int \phi(u,v) dv \\ \text{avec} \quad \phi(u,v) &= \int \tilde{f}(u-s,v) d(s,v) dv \end{aligned}$$

Nous noterons :  $F(U,V)$  la transformée de Fourier bi-dimensionnelle de  $f(u,v)$  (on peut démontrer que  $\tilde{f}(u,v)$  a pour transformée  $\tilde{F}(U,V)$ )

$P(U,\theta)$  la transformée de Fourier uni-dimensionnelle de  $p(u,\theta)$  suivant la variable  $u$ .

$\phi(u,v)$  s'exprimant comme un produit de convolution selon la première coordonnée et comme un produit simple selon la seconde, il est aisé de calculer par réciprocity sa transformée de Fourier bi-dimensionnelle :

$$\phi(U,V) = \int \tilde{F}(U,W) D(U,V-W) dW \quad (9)$$

Nous pouvons par ailleurs appliquer à la fonction  $(u,v)$  le lemme fondamental comme sous le nom de théorème de coupe-projection, à savoir [5] :

La projection d'une fonction bi-dimensionnelle suivant une direction a pour transformée de Fourier la coupe de la transformée bi-dimensionnelle de la fonction selon la même direction .

La transformée de Fourier  $P(U,\theta)$  de la projection  $p(u,\theta)$  de la fonction  $\phi(u,v)$  sur l'axe des  $u$  est donc égale à la coupe de  $\phi(U,V)$  suivant l'axe des  $U$

$$P(U,\theta) = \left[ \phi(U,V) \right]_{V=0} = \int \tilde{F}(U,W) D(U,-W) dW \quad (10)$$

On peut donc interpréter  $P(U,\theta)$  comme une projection celle du produit des deux fonctions

$$\tilde{F}(U,W) \text{ et } D(U,-W)$$

Compte tenu de l'expression explicite de  $F$ , il vient en changeant de plus la notation :

$$P(U,\theta) = \int F(U \cos \theta - V \sin \theta, U \sin \theta + V \cos \theta) D(U,-V) dv \quad (11)$$

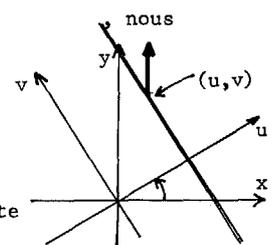
III - 2. Application à divers cas particuliers :

a) Transmission simple :

Dans ce cas il n'y a ni phénomène d'atténuation intrinsèque ni phénomène de diffusion nous prendrons :

$$d(u,v) = \delta(u) \cdot 1(v) \quad (12)$$

où  $\delta(u)$  note la distribution de Dirac.  $1(v)$  la fonction constante égale à 1 pour tout  $v$ .



Dans ces conditions il vient  $D(U,V) = 1(U) \cdot \delta(V)$ . Soit en reportant dans l'équation (11) :

$$P(U,\theta) = F(U \cos \theta, U \sin \theta) 1(U) \delta(V) dV$$

$$P(U,\theta) = F(U \cos \theta, U \sin \theta) \quad (13)$$

Nous retrouvons ici strictement l'expression du théorème de coupe-projection, ce qui est bien normal puisque dans ce cas la formulation de la projection est celle donnée par la relation habituelle (1).

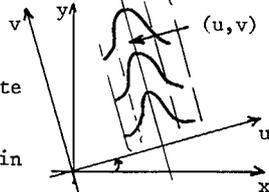
Le cas de la transmission simple peut donc être vu comme un cas particulier avec une fonction de distorsion de la forme donnée en (12). Il faut néanmoins remarquer que cette assimilation fort intéressante sur le plan algorithmique ne doit pas faire perdre de vue

RECONSTRUCTION D'IMAGES A PARTIR DE PROJECTIONS  
APPLICATION A LA TOMOGRAPHIE AXIALE TRANSVERSE

la nature différente des projections mesurées et de l'objet reconstruit ainsi qu'il l'a été précisé au paragraphe I.

b) Transmission simple avec intégration lors de la mesure :

En fait il est impossible de réaliser l'intégration décrite par la formule (1) avec un faisceau théorique infiniment fin



Il existe toujours une certaine fonction d'intégration dont on pourra supposer qu'elle est identique pour toute valeur de  $v$ . Il vient alors

$$d(u,v) = g(u) \cdot l(v) \quad (14)$$

Dans ces conditions  $D(U,V) = G(U)\delta(V)$

soit :

$$P(U,\theta) = F(U\cos\theta, U\sin\theta) G(U) \quad (15)$$

Le problème de restauration se double ici d'un problème classique - mais pas plus évident pour autant de déconvolution sur chaque projection.

Il est à remarquer que la formulation de l'équation (15) représente aussi le cas particulier de reconstruction en tomographie par émission lorsque le phénomène d'atténuation est négligé et où la fonction de diffusion est considérée comme indépendante de l'ordonnée de la source.

III - 3. Procédure de reconstruction

L'équation (11) permet d'envisager une procédure de reconstruction utilisant les algorithmes maintenant bien connus en tomographie par transmission ; {5} {6} En effet,  $P(U,\theta)$  peut être considéré comme l'ensemble des projections dans le domaine de Fourier permettant de reconstruire la fonction  $F(U,V)$  compte tenu de la pondération introduite par la fonction  $D(U,-V)$ . L'objet est alors reconstruit par transformée de Fourier bi-dimensionnelle inverse.

Les étapes de la reconstruction sont alors les suivantes :

- . Donnée analytique a priori (par exemple par les formules (4) et (5) ou détermination expérimentale de la fonction globale de distorsion.
- . Calcul de  $P(U,V)$  par transformée de Fourier bi-dimensionnelle.
- . Calcul de  $P(U,\theta)$  par transformée de Fourier uni-dimensionnelle de chaque projection.
- . Reconstruction de  $F(U,V)$  à partir des  $P(U,\theta)$  par exemple par un algorithme d'itération utilisant  $D(U,-V)$  comme coefficients de pondération.
- . Calcul de  $f(x,y)$  par transformée de Fourier bi-dimensionnelle.

Il est bon de noter que la généralisation de la formulation et par là de la procédure décrite en cas d'objets tri-dimensionnels ne pose aucun problème, au moins de principe, puisqu'il est possible de le décomposer dans le plan de Fourier en  $N$  problèmes bi-dimensionnels à  $W = \text{cte}$ .

III - 4. Résultats préliminaires de simulation

Des simulations numériques ont été réalisées dont les résultats principaux seront présentés au cours de l'exposé oral.

Les projections des images de simulation sont effectuées d'abord en l'absence de fonction de distorsion globale puis avec une fonction du type décrit à partir des formules (3) (4) et (5).

La reconstruction est faite successivement par des méthodes classiques ne prenant pas en compte les phénomènes d'atténuation et de diffusion, puis avec la méthode décrite plus haut.

Une amélioration sensible de la qualité des reconstructions est constatée.

IV - Conclusions

Dans le trop bref exposé qui précède nous avons voulu montrer comment il était possible d'aborder de façon systématique et unitaire les problèmes de reconstruction d'images aussi bien en tomographie par transmission qu'en tomographie par émission.

Il est néanmoins clair que pour ce faire nous avons dû effectuer un certain nombre d'hypothèses dont celle de l'homogénéité en densité dont on sait fort bien qu'elle ne représente qu'une approximation élémentaire de la réalité.

Néanmoins, une amélioration sensible des images reconstruites peut être espérée lorsqu'on tient effectivement compte des phénomènes d'atténuation et de diffusion.

Ces résultats préliminaires appellent en fait de nombreux prolongements, tant théoriques qu'expérimentaux. Dans tout ce qui précède nous avons par exemple éliminé les difficultés liées à la nature statistique de l'émission de la source ainsi qu'aux divers bruits venant entacher la mesure des diverses projections.

Il faut ajouter à ces problèmes attachés à la physique et à la modélisation du système ceux que posent la réalisation numérique des algorithmes proposés. Ceux-ci deviennent en effet de plus en plus complexes et surtout volumineux, et on ne saurait concevoir une évolution des méthodes de reconstruction sans l'évolution simultanée des opérateurs rapides de traitement des signaux capables de les réaliser.



RECONSTRUCTION D'IMAGES A PARTIR DE PROJECTIONS  
APPLICATION A LA TOMOGRAPHIE AXIALE TRANSVERSE

---

Références

- {1} T.F. BUDINGER and G.T. GULLBERG  
"Three dimensional reconstruction in nuclear medicine by iterative least squares and Fourier transform techniques"  
IEEE Trans. Nucl. Sci. vol NS 21 p.2.20(1974)
- {2} R.C. HSICH and William G. WEE  
"on methods of three-dimensional reconstruction from a set of radioisotope scintigrams"  
IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. vol. SMC6 N° 12  
p. 854-862 (Décembre 1976)
- {3} V. DELCROIX et R. ALLEMAND  
"DéTECTEURS NUCLÉAIRES"  
Note CENG-LETT N° 68/1714 NU (1968)
- {4} T.F. BUDINGER, S.E. DERENZO, G.T. GULLBERG  
W.L. GREENBERG and R.H. HUESMAN  
"Emission computed axial tomography"  
IAEA Symposium on medical radionuclide imaging  
IAEA SM 210:124. Los Angeles (Octobre 1976)
- {5} R.M. MERSEREAU and A.V. OPPENHEIM  
"Digital reconstruction of multidimensional signals from their projections"  
Proceedings of the IEEE, vol 62, N° 10 (Oct.74)
- {6} L.A. SHEPP and B.F. LOGAN  
"The Fourier reconstruction of a head section"  
IEEE Trans. Nucl. Sci, vol NS 21 (Juin 74)  
p. 21-43.