

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

POUVOIR SÉPARATEUR EN ESTIMATION NON-LINÉAIRE EN PRÉSENCE DE BRUIT FAIBLE

JACQUES MUNIER

Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques (E.R.A. au C.N.R.S.), B. P. 15, 38040 - GRENOBLE-CEDEX

RESUME

Le pouvoir séparateur d'un instrument d'observation, de mesure ou de télédétection assimilable à un filtre linéaire est classiquement défini, soit au sens de RAYLEIGH par la demi-largeur de sa réponse percussionnelle, soit au sens de WOODWARD par la largeur (en un certain sens) de la fonction d'autocorrélation de celle-ci. Dans un cas, comme dans l'autre, il vaut $1/B$ pour un instrument à bande passante rectangulaire de largeur B .

Le véritable problème est, en fait, celui de l'estimation non-linéaire de paramètres en présence de bruits ou d'incertitudes de mesure ; en l'occurrence, le pouvoir séparateur est lié à l'estimation de translations. Nous le définissons, pour deux objets ponctuels rapprochés de même amplitude ou intensité, à partir de la variance de l'estimation de la translation faisant passer d'un objet à l'autre, sous l'hypothèse de composantes de bruit gaussiennes, non-corrélées et de même variance, et de l'existence de l'estimateur efficace, ce qui est pratiquement le cas de l'estimateur du maximum de vraisemblance, pour peu que le rapport signal à bruit soit bon. Ce dernier est le principal facteur intervenant dans la formule du coefficient de super-résolution (défini par référence à la valeur $1/B$).

Nous traitons notamment l'exemple typique de l'imagerie spatiale au moyen d'un réseau rectiligne de capteurs équidistants, l'observable étant la matrice interspectrale des signaux de sortie des capteurs ; ce problème est analogue à celui de l'analyse spectrale opérée à partir de la matrice de covariance d'un signal temporel échantillonné périodiquement.

SUMMARY

The resolving power of an observing, measuring or remote sensing apparatus behaving as a linear filter is conventionally defined, either in the RAYLEIGH sense by the half-width of its impulse response, or in the WOODWARD sense by the width (in some way) of the autocorrelation function of the latter. In any case, its value is $1/B$ for an apparatus having a B -wide rectangular bandpass.

The actual problem is, in fact, the nonlinear estimation of parameters in the presence of noise or measuring unreliability. Under such circumstances, the resolving power is obviously related to the estimation of some shifting-parameters such as delays. We define it, for two closely-spaced point-objects having the same amplitude or intensity, from the variance of the estimation of the shift by which one object becomes coincident with the other, under the following hypothesis :

- a/ the noise components are gaussian uncorrelated with the same variance,
- b/ there exists an efficient estimator, which is practically true for the maximum-likelihood estimator when the signal-to-noise ratio is good.

The latter is the main factor in the formula giving the super-resolution coefficient (defined by comparison with the $1/B$ value).

We especially deal with the typical example of spatial imagery by a linear array of equispaced sensors, the observable being the interspectral matrix of the output signals from the sensors. This problem is analogous to that of spectrum analysis, when operated from covariance matrix of a periodically time-sampled signal.



POUVOIR SEPARATEUR EN ESTIMATION NON-LINEAIRE EN PRESENCE DE BRUIT
FAIBLE

1. ESTIMATION LINEAIRE OU NON-LINEAIRE. NOMBRE DE
DEGRES DE LIBERTE ET POUVOIR SEPARATEUR.

Le problème du pouvoir séparateur des instruments d'observation, de mesure ou de télédétection et celui de leur finesse d'analyse ont été débattus de longue date et, cependant, une certaine confusion continue à régner sur le sujet : c'est ainsi que plusieurs indices de performances ont été proposés pour caractériser la qualité de l'image qu'un instrument fournit de l'objet observé et que l'on constate une certaine disparité entre les résultats numériques annoncés par divers auteurs. Nous allons donc tenter de clarifier la question, du moins dans le cas très répandu où l'instrument d'observation se comporte comme un filtre linéaire.

Tout d'abord, il importe de rappeler que le problème ne saurait valablement être traité autrement que sous son aspect stochastique car, en l'absence d'incertitudes (ou bruits), le pouvoir de résolution est illimité (cf. par exemple, WELSBY [5]) et "tout objet est entièrement déterminé par son image, à un objet invisible près" (ARSAC [2]) ; or, l'objet invisible est à support non-borné et relève donc généralement de l'abstraction mathématique et non de la réalité physique.

Un deuxième point absolument essentiel est de savoir distinguer le cas où l'objet a le caractère d'un continuum et ne peut être strictement défini, en règle générale, qu'au moyen d'une infinité de valeurs numériques, de celui où il est composé d'un nombre fini d'objets ponctuels, caractérisés par quelques paramètres significatifs, qu'un nombre fini de valeurs numériques suffit donc à déterminer entièrement.

Dans le premier cas, celui d'un continuum, la fonction-objet peut être projetée sur une base d'un espace vectoriel approprié et le problème se ramène à celui de l'estimation linéaire des coefficients du développement. La présence de bruits, d'incertitudes ou d'erreurs instrumentales à caractère aléatoire limite le nombre de coefficients qu'on peut raisonnablement espérer évaluer, ce que certains auteurs ont nommé le nombre de degrés de liberté effectif de l'image, quantité qui caractérise la finesse d'analyse de l'instrument, à rapport signal à bruit donné.

Nous ne traiterons que le second cas, celui d'objets ponctuels, qui se ramène à l'estimation linéaire des amplitudes ou intensités des objets et à l'estimation non linéaire d'autres paramètres, tels que dates, retards, fréquences, décalages DOPPLER, coordonnées angulaires, etc... L'indice de performance de l'instrument est alors le POUVOIR SEPARATEUR, quantité qui doit caractériser son aptitude à distinguer deux objets à valeurs paramétriques très voisines. Plusieurs définitions en ont été données, dont certaines contestables, car elles reposent sur une confusion fondamentale entre les deux cas cités de l'estimation linéaire d'un continuum et celle, généralement non-linéaire, des paramètres d'objets ponctuels (les traitements à appliquer respectivement n'étant évidemment pas les mêmes).

Ainsi, au sens de RAYLEIGH, le pouvoir séparateur d'un instrument à bande passante rectangulaire de largeur B vaut $1/B$; cette bande passante est évaluée dans le domaine de FOURIER dual de celui du paramètre à estimer. Par exemple, pour l'estimation d'une direction dans le plan d'une antenne rectiligne de longueur L à loi de répartition uniforme, la bande passante à la longueur d'onde λ est L/λ et le pouvoir séparateur angulaire λ/L radian. L'instrument d'observation est supposé être un filtre linéaire et la notion de pouvoir séparateur est alors rattachée à celle de largeur (en un certain sens) de sa réponse percutieuse (angulaire dans l'exemple cité).

Depuis les travaux de WOODWARD [1] sur la précision de mesure d'un paramètre tel que le retard pour un objet unique, on sait que cette précision dépend de la largeur de bande effective (au sens de GABOR) de l'instrument et non de la largeur de sa réponse percutieuse, ainsi que le montre la célèbre formule de WOODWARD. Pour ce qui est du cas de deux objets, cet auteur calcule la distance (au sens de la norme induite par le produit scalaire) entre les réponses relatives respectivement aux deux objets, en l'absence de bruit, et aboutit au concept de fonction d'ambiguïté, que d'autres auteurs tels que URKOWITZ [4,6] ont étendu aux paramètres angulaires. Il propose ensuite de caractériser le pouvoir séparateur par la largeur effective de la fonction d'ambiguïté dans le plan relatif au paramètre concerné. Cette méthode revient, en fait, à rattacher le pouvoir séparateur à la largeur (en un certain sens) de la fonction d'auto-corrélation de la réponse percutieuse de l'instrument ; on retrouve, de cette façon, la limite $1/B$ de RAYLEIGH, pour un instrument à bande passante rectangulaire de largeur B . Cette démarche n'est, toutefois, pas satisfaisante car, à l'inverse de ce qui a été fait pour un seul objet, elle ne repose pas sur des bases statistiques et ne met pas en évidence les facteurs réellement influents, tels que le rapport signal à bruit.

Selon d'autres auteurs, auxquels peuvent être opposées les mêmes objections, deux objets ponctuels sont réputés être séparés dès l'instant où l'image qu'en donne l'instrument, agissant toujours en tant que filtre linéaire, comporte deux maximums discernables selon un certain critère comme le rapport d'amplitudes entre les maximums et le minimum intermédiaire ; COX [12] définit ainsi le pouvoir séparateur angulaire d'un réseau de capteurs auquel on a appliqué le traitement optimal d'antenne en détection (filtrage adapté multipolaire), la "direction d'adaptation" étant supposée balayer le secteur contenant les deux sources voisines.

Le cas où l'on prend en compte l'information capitale selon laquelle l'objet est multiponctuel, ainsi que les perturbations dues au bruit, a été abordé initialement par ROOT [3], qui définit le pouvoir séparateur du RADAR par les probabilités pour que deux cibles à paramètres voisins soient ou non séparément détectables et parvient à le calculer, pour deux cibles d'amplitudes très différentes, à partir de la fonction d'ambiguïté retard-DOPPLER. KSIENSKI et YOUNG [8] traitent le problème en tant qu'estimation statistique de paramètres, notamment dans le cas de deux sources. KSIENSKI et MCGHEE [9,10] incluent le nombre de sources comprises dans un secteur angulaire donné parmi les paramètres à estimer et proposent une méthode de recherche algorithmique de deux sources parmi les cellules élémentaires résultant d'un échantillonnage spatial. SKLAR et SCHWEPPE [7] calculent les variances des estimations angulaires pour deux sources voisines. Enfin, SCHARF et MOOSE [14] utilisent un concept informationnel, la divergence J (lié à celui d'entropie) pour calculer les performances en estimation angulaire d'une antenne-réseau.

Signalons également DRABOWITZ [11] qui propose un traitement d'antenne inspiré de la technique monopulse et comportant trois sorties (somme, différence et écart), la troisième fournissant une estimation de l'écart angulaire entre deux sources voisines, ce qui permet d'évaluer d'une certaine façon la performance en résolution.

Malheureusement, des travaux précédents ne se dégagent aucune définition précise du pouvoir séparateur, qui soit à la fois assez générale et d'interprétation suffisamment simple pour guider la conception de systèmes optimaux.



De ce qui précède, retenons donc que le problème de fond est celui de l'estimation des paramètres multiples ($a, \theta, \phi, \nu, \Psi$, etc...) caractérisant un objet ponctuel ; si deux objets à paramètres voisins sont mis en présence, on est naturellement conduit à relier le pouvoir séparateur concernant θ aux variances des estimations conjointes des valeurs θ_1 et θ_2 caractérisant respectivement les deux objets, la qualité de ces estimations n'étant généralement pas indépendante des autres paramètres (a, ϕ, ν, Ψ , ...) ; poussant le raisonnement plus loin, il apparaît clairement que la variance de l'estimation de l'écart $\tau = \theta_1 - \theta_2$ est un indice significatif de la performance en résolution, ce en quoi nous rejoignons DRABOWITZ [11].

Dans ce qui suit, nous traiterons le problème sous une forme simplifiée, en partant des hypothèses suivantes : deux objets ponctuels se différenciant par leurs amplitudes ou intensités et par une translation telle que retard, décalage fréquentiel ou écart angulaire ; observables pollués par un bruit additif gaussien (ce qui ne reflète la réalité que bien imparfaitement dans de nombreux cas où le bruit est plutôt de nature multiplicative).

Nous définirons le pouvoir séparateur à partir de la variance minimale de l'estimation de l'écart entre objets, calculée au moyen de la borne inférieure de CRAMER-RAO ; ceci suppose qu'on a pu réaliser un estimateur efficace, lequel n'existe en fait généralement pas en estimation non-linéaire. On sait, néanmoins, que l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement efficace et que sa variance atteint pratiquement la borne de CRAMER-RAO si le bruit est faible ; c'est l'hypothèse supplémentaire que nous ferons.

En pratique, trois cas se présentent, qui demandent à être examinés séparément :

- 1/ l'observation est une fonction continue de la variable t vis-à-vis de laquelle on veut évaluer le pouvoir séparateur τ , donc l'instrument est caractérisé par sa réponse percussionnelle, fonction de t , et le bruit additif l'est, au second ordre, par sa fonction de covariance ou, s'il est stationnaire, par sa densité spectrale de puissance moyenne (d.s.p.) ;
- 2/ l'observation est un ensemble fini de scalaires, reliés par un système d'équations généralement non linéaires aux paramètres des objets ponctuels observés ; le bruit additif est alors caractérisé au second ordre par sa matrice de covariance ;
- 3/ l'observation est formée d'un vecteur ou d'une matrice de fonctions (par exemple, la matrice interspectrale des signaux temporels observés à la sortie d'un réseau de capteurs).

Nous ferons une nouvelle hypothèse simplificatrice en supposant qu'on ne dispose d'aucune information a priori sur les bruits, ce qui conduit à admettre l'hypothèse d'un bruit blanc à d.s.p. constante γ_0 pour une observation continue et celle de composantes de bruit non-corrélées et de même variance σ_0 pour une observation discrète. Cette hypothèse est évidemment très restrictive (en particulier, elle ne permet pas de tenir compte d'effets perturbateurs, comme la turbulence du milieu de propagation, obéissant à certaines lois connues) ; elle a le mérite de simplifier notablement les formules et le traitement à appliquer : on sait, en effet, que la méthode d'estimation par le maximum de vraisemblance se ramène alors à celle, bien connue, d'estimation par les moindres carrés.

2. DEFINITION GENERALE DU POUVOIR SEPARATEUR.

Supposons que le champ d'observation contienne deux objets ponctuels $\{a_1; \theta_1, \phi_1\}$ et $\{a_2; \theta_2, \phi_2\}$; a_1 et a_2 représentent, soit leurs amplitudes (réelles), soit encore leurs intensités (réelles positives) ; θ_1 et θ_2 sont les paramètres pour lesquels on désire définir le pouvoir séparateur ; ϕ_1 et ϕ_2 représentent un ensemble d'autres paramètres à valeurs inconnues. Comme indiqué précédemment, nous prenons comme indice de performance significatif la variance de l'estimateur efficace non-biaisé de l'écart $\tau = \theta_1 - \theta_2$; nous estimerons cet écart conjointement avec les autres paramètres, c'est-à-dire : $a_1, a_2, \theta_1 + \theta_2, \phi_1, \phi_2$. Soit dit en passant, une autre stratégie serait d'estimer seulement l'écart, en se fixant des lois de probabilités a priori pour les autres paramètres.

Soit $x = [x_i]_{n \times 1}$ le vecteur représentant l'ensemble des n paramètres à estimer et \hat{x} l'estimateur efficace non-biaisé, qu'on suppose exister ; on sait [15,16] que sa matrice de covariance $\Gamma_{\hat{x}}$ vaut :

$$\Gamma_{\hat{x}} = I^{-1} \quad (1)$$

$I = [I_{ij}]_{n \times n}$ étant la matrice d'information de FISHER. Les éléments de cette matrice prennent la forme générale d'une forme hermitienne :

$$I_{ij} = \left\langle \frac{\partial Y}{\partial x_i}, \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right\rangle \quad (2)$$

où Y est l'observable à valeurs réelles ou complexes, qualifié ordinairement de signal de référence ou référence-signal, exprimé en fonction de x , en l'absence de bruit.

Supposons d'abord que le signal Y soit un scalaire complexe $z = a + jb$, étant entendu que les réels a et b contiennent chacun une part d'information concernant le vecteur x des paramètres. Alors nous considérons le signal Y comme un vecteur sur le corps des réels, soit

$$y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Dans l'hypothèse où les bruits superposés à a et b sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, non-corrélées et de même variance σ^2 , l'élément I_{ij} de la matrice de FISHER s'écrit :

$$I_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_j} + \frac{\partial b}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_j} \right), \quad (3)$$

c'est-à-dire :

$$I_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial z^*}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right). \quad (4)$$

Ce raisonnement se généralise à tous les autres cas, y compris ceux où les observables sont des fonctions $y(t, x)$ d'une variable t ; on projette alors ces fonctions sur une base d'un espace vectoriel approprié de dimension finie (moyennant une certaine erreur de troncature) et on considère comme nouveaux observables les coefficients du développement. On obtient, de la sorte, les formules suivantes pour les divers cas intéressants :

- 1/ pour un signal Y formé d'une seule fonction $y(t, x)$, $t \in [0, T]$, on a :

$$I_{ij} = \frac{1}{\gamma_0} \operatorname{Re} \left[\int_0^T \frac{\partial y^*(t, x)}{\partial x_i} \frac{\partial y(t, x)}{\partial x_j} dt \right], \quad (5)$$

γ_0 étant la d.s.p. du bruit additif, supposé blanc ;



2/ pour un signal Y formé d'un vecteur de scalaires $y(x) = [y_k(x)]_{x1}$, on a :

$$I_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial y_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial y_j}{\partial x_j} \right] = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K \frac{\partial y_k^*}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right], \quad (6)$$

σ^2 étant la variance commune aux composantes de bruit, supposées non-corrélées ;

3/ pour un signal Y formé d'une matrice de scalaires $Y(x) = [y_{k\ell}(x)]_{K \times L}$, on a :

$$I_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{tr} \left[\frac{\partial Y^*}{\partial x_i} \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right] \right\} = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial y_{k\ell}^*}{\partial x_i} \frac{\partial y_{k\ell}}{\partial x_j} \right] \quad (7)$$

4/ pour un signal Y formé d'un vecteur ou d'une matrice de fonctions d'une variable t , on obtient le même type de formules, assorties d'une intégration selon la variable t ; ainsi, pour un signal

$Y(t,x) = [y_{k\ell}(t,x)]_{K \times L}$ on a :

$$I_{ij} = \frac{1}{\gamma_0} \operatorname{Re} \left\{ \int_T \operatorname{tr} \left[\frac{\partial Y^*}{\partial x_i}(t) \frac{\partial Y}{\partial x_j}(t) \right] dt \right\} \\ = \frac{1}{\gamma_0} \operatorname{Re} \left[\sum_k \sum_{\ell} \int_T \frac{\partial y_{k\ell}^*}{\partial x_i}(t,x) \frac{\partial y_{k\ell}}{\partial x_j}(t,x) dt \right] \quad (8)$$

les processus de bruit superposés aux signaux $y_{k\ell}(t,x)$ étant supposés stationnaires, non corrélés entre eux et de d.s.p. constante γ_0 (bruits blancs).

Le pouvoir séparateur est caractérisé par la quantité $\operatorname{var}\{\hat{\tau}\}$, qui est un des éléments de la diagonale principale de $\Gamma_{\hat{x}}$; en règle générale, $\operatorname{var}\{\hat{\tau}\}$ est une fonction des autres paramètres, de la d.s.p. ou de la variance du bruit (donc du rapport signal à bruit) et aussi de la valeur du paramètre τ elle-même. Puisqu'elle dépend de la valeur inconnue de τ , nous ne pouvons prendre cette quantité comme indice de performance. Par suite, nous allons désigner par μ la précision relative de la mesure de l'écart τ , à savoir :

$$\mu = \frac{\sqrt{\operatorname{var}\{\hat{\tau}\}}}{\tau} \quad (9)$$

et par définition, nous appellerons POUVOIR SEPARATEUR la valeur τ_0 de τ pour laquelle on a $\mu = 1$ et qui satisfait donc la relation

$$\operatorname{var}\{\hat{\tau}_0\} = \tau_0^2 \quad (10)$$

Cette valeur peut être utilement comparée au pouvoir séparateur au sens classique, qui vaut $1/B$, B étant la bande passante de l'instrument d'observation en tant que filtre linéaire dont la réponse percussionnelle est de la forme $s(\theta)$; si le rapport signal à bruit est bon, le pouvoir séparateur τ_0 est généralement nettement plus petit que la valeur $1/B$ et on obtient donc un effet de super-résolution. Nous définirons un coefficient de super-résolution par la formule

$$\eta = \frac{1}{B\tau_0} \quad (11)$$

Dans ce qui suit, nous calculerons le pouvoir séparateur pour divers types d'observations, en admettant, pour simplifier, que le vecteur paramétrique x est seulement à quatre composantes :

$$x^T = [a_1, a_2, \sigma, \tau] \quad , \quad \sigma = \theta_1 + \theta_2 \quad , \quad \tau = \theta_1 - \theta_2 \quad .$$

3. OBSERVATION CONTINUE.

Considérons le cas classique d'un signal de référence réel de la forme

$$y(t,x) = a_1 s(t-\theta_1) + a_2 s(t-\theta_2) \\ = a_1 s\left(t - \frac{\sigma + \tau}{2}\right) + a_2 s\left(t - \frac{\sigma - \tau}{2}\right) \quad (12)$$

où le signal $s(t)$, qui représente la réponse percussionnelle de l'instrument, est pris de norme unité :

$$\int_R s^2(t) dt = 1 \quad (13)$$

et où l'estimation non-linéaire porte donc sur des translations relatives à la variable t , qu'on peut supposer être le temps.

L'observable a pour expression :

$$v(t) = y(t) + b(t) \quad (14)$$

où $b(t)$ est un bruit blanc centré de d.s.p. γ_0 . Les éléments de la matrice de FISHER se calculent par la formule (5) ; nous indiquons le résultat obtenu pour deux objets rapprochés ($\tau \rightarrow 0$) de même amplitude $a_1 = a_2 = a$; dans ce cas, la matrice de FISHER et, par suite, celle de covariance des estimateurs sont diagonales (les estimateurs de a , σ et τ ne sont pas corrélés) et on obtient les formules suivantes, exprimées au moyen du rapport signal à bruit défini par

$$R = \frac{a^2}{\gamma_0} \quad (15)$$

$$\operatorname{Var}\{\hat{a}\} = \gamma_0 \quad (16)$$

$$\operatorname{var}\{\hat{\sigma}\} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{-2}{[C_s''(0) + C_s''(\tau)]R} \quad (17)$$

$$\operatorname{var}\{\hat{\tau}\} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{-2}{[C_s''(0) - C_s''(\tau)]R} \quad (18)$$

$C_s''(\tau)$ est la dérivée seconde de la fonction d'autocorrélation de la réponse percussionnelle $s(t)$ et peut s'exprimer par développement limité :

$$C_s''(0) = -\beta_2^2, \quad C_s''(\tau) = C_s''(0) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta_4}{\beta_2^2} \tau^2 + \dots\right) \quad (19)$$

β_{2k} est le moment normé d'ordre $2k$ de la représentation spectrale énergétique $|S(f)|^2$ du signal $s(t)$, défini par :

$$\beta_{2k} = 2\pi \frac{\int_R |f|^{2k} |S(f)|^2 df}{\int_R |S(f)|^2 df} \quad \left/ \quad \frac{1}{2k} \right. \quad = \quad \frac{\int_R [S^{(k)}(t)]^2 dt}{\int_R [S(t)]^2 dt} \quad \left/ \quad \frac{1}{2k} \right. \quad (20)$$

cette quantité a les dimensions d'une bande passante quel que soit l'ordre $2k$.

On en tire les formules remarquables suivantes :

$$\operatorname{var}\{\hat{\sigma}\} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_2^2 R} \quad , \quad \operatorname{var}\{\hat{\tau}\} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{4}{\beta_4^2 \tau^2 R} \quad (20), (21)$$

la première, relative à l'estimation de $\theta_1 + \theta_2$, n'est autre que la célèbre formule de WOODWARD [1] pour l'estimation d'une date ; la seconde montre que la variance d'estimation de l'écart augmente rapidement lorsque cet écart se réduit, au point de devenir infinie lorsque les deux objets se confondent (ce qui correspond à une indétermination mathématique de cet écart). Elle montre aussi, par la présence du terme β_4^2 ; l'influence hautement prépondérante des composantes de fréquence élevée de la bande passante ; à bande

passante fixée, c'est un signal à fréquence pure à la limite supérieure de la bande qui donne la meilleure résolution.

Des formules précédentes, on déduit le pouvoir séparableur :

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{\beta_4 R^2 \lambda^4} \quad (23)$$

On peut vérifier que cette expression de τ_0 , définie pour $\mu = 1$, donne la valeur de τ pour laquelle l'écart-type des estimations de θ_1 et θ_2 vaut $\tau/2$.

A titre d'exemple typique, prenons un instrument à bande passante rectangulaire B, dont la réponse percussionnelle normée est de la forme

$$s(t) = \sqrt{B} \frac{\sin \pi B t}{\pi B t} \quad (24)$$

et sa fonction d'autocorrélation :

$$C_s(\tau) = \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau} \quad (25)$$

Le calcul donné :

$$\frac{C_s''(\tau)}{C_s''(0)} = \Phi(\pi B \tau)$$

$$\Phi(\xi) = 3 \left[\frac{\sin \xi}{\xi} + \frac{2}{\xi^2} \left(\cos \xi - \frac{\sin \xi}{\xi} \right) \right], \quad \Phi(0) = 1 \quad (26)$$

On en tire :

$$\text{var}\{\hat{\tau}\} = \frac{6}{\pi^2 B^2 R [1 - \Phi(\pi B \tau)]} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{20}{\pi^4 B^4 \tau^2 R} \quad (27)$$

Le rapport signal à bruit est alors lié au pouvoir séparableur τ_0 par la formule :

$$R = \frac{6}{(\pi B \tau_0)^2 [1 - \Phi(\pi B \tau_0)]} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{20}{(\pi B \tau_0)^4} \quad (28)$$

et au coefficient de super-résolution η par la formule :

$$R = \frac{6\eta^2}{\pi^2 [1 - \Phi(\frac{\pi}{\eta})]} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 20 \left(\frac{\pi}{\eta}\right)^4 \quad (29)$$

ou $R(\text{db}) \approx 40 \log \eta - 6,88 \quad (30)$

Rapport signal à bruit R(db)	7,48	21,44	33,21	45,19	61,09
Coefficient de super-résolution	2	5	10	20	50

4. OBSERVABLE MATRICIEL.

Nous allons traiter ce cas sur un exemple typique : celui d'un réseau rectiligne de n capteurs équidistants recevant, en provenance de sources ponctuelles non-corrélées situées à grande distance, des signaux quasi-monochromatiques stationnaires de longueur d'onde λ_0 ; la distance entre capteurs est d (figure 1).

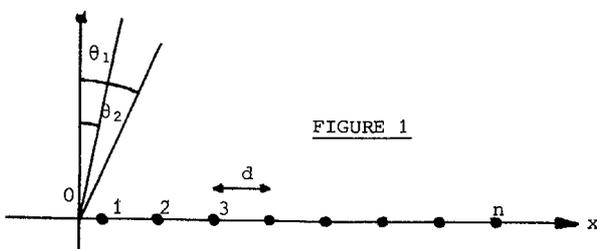


FIGURE 1

L'observable est supposé être la matrice interspectrale des signaux de sortie des capteurs, évaluée à la fréquence $f_0 = c/\lambda_0$ et dont les éléments sont à valeurs complexes. Pour deux sources et en l'absence de bruits, elle est de la forme suivante :

$$Y = \begin{bmatrix} y_{kl} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad y_{kl} = s_1 e^{j(k-1)\phi_1} + s_2 e^{j(k-1)\phi_2}, \quad (31)$$

$$\phi_1 = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \sin \theta_1, \quad \phi_2 = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \sin \theta_2;$$

s_1 et s_2 représentent les d.s.p. des deux sources. On remarque que la matrice Y est hermitienne-TOEPLITZ : $y_{kl} = y_{lk}^* = y_{k-1, l}^*$

Ce problème est, d'ailleurs, identique à celui de l'estimation de deux raies spectrales à partir de la matrice de covariance d'une suite temporelle finie observée par échantillonnage périodique. Il a été traité plus généralement pour n sources par PISARENKO [13], qui propose un algorithme de résolution, lequel, toutefois, ne tient pas compte des incertitudes de mesure affectant les coefficients y_{kl} et ne permet donc pas de tirer de conclusion quant au pouvoir séparableur tel que nous l'entendons.

Pour simplifier, nous supposons les deux sources de même intensité $s_1 = s_2 = s$ et nous prenons comme paramètres directionnels :

$$\alpha = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \quad \beta = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}, \quad (32)$$

ce qui donne :

$$y_{kl} = 2s e^{j(k-1)\alpha} \cos(k-1)\beta \quad (33)$$

L'observable est $V = Y + Z$, Z étant une matrice de bruit dont les éléments Z_{kl} sont des variables aléatoires supposées centrées, gaussiennes, non-corrélées et de même variance σ^2 . Nous définissons le rapport signal à bruit par la formule

$$R = \frac{s^2}{\sigma^2} \quad (34)$$

Le calcul des éléments de la matrice de FISHER dans le cas limite qui nous intéresse ($\beta \rightarrow 0$), c'est-à-dire lorsque les deux objets sont très rapprochés, et celui des éléments de la matrice de covariance des estimateurs, qui s'en déduit, montre que $\hat{\alpha}$ n'est corrélé ni avec $\hat{\beta}$ ni avec \hat{s} , mais que \hat{s} et $\hat{\beta}$ sont corrélés (*).

Les deux sources étant supposées au voisinage de la normale au réseau de capteurs, on admettra l'approximation suivante :

$$\beta \approx \frac{\pi d}{\lambda} \tau \quad (\tau \rightarrow 0), \quad (35)$$

on obtient alors l'expression suivante de la variance de l'estimateur $\hat{\tau}$ de l'écart angulaire :

$$\text{var}\{\hat{\tau}\} = \left(\frac{\lambda}{\pi d}\right)^4 \frac{45}{n^2(n^2-1)(7n^2-13)R\tau^2} \quad (36)$$

Par suite, le pouvoir séparableur angulaire calculé en application de la formule (10) est :

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{\pi d} \left[\frac{45}{n^2(n^2-1)(7n^2-13)R} \right]^{1/4} \quad (37)$$

Le réseau de capteurs a une longueur totale $(n-1)d$ et son pouvoir séparableur au sens de RAYLEIGH est donc $\lambda/(n-1)d$, d'où l'expression suivante du coefficient de super-résolution :

$$\eta = \frac{\lambda}{(n-1)d\tau_0} \quad (38)$$

(*) On trouvera les résultats intermédiaires dans le rapport CEPHAG 12/77.



qui est finalement relié au rapport signal à bruit par la formule

$$R = \frac{45(n-1)^3}{n^2(n+1)(7n^2-13)} \left(\frac{n}{\pi}\right)^4 \quad (39)$$

ou $R(\text{db}) = 40 \log \eta - K(n)$ (40)

Les valeurs de $K(n)$ en décibels sont données dans le tableau ci-dessous.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
K(db)	26,88	28,03	29,15	30,18	31,13	31,99	32,78	33,58

Pour identifier deux sources, il faut au minimum $n=3$ capteurs ; le pouvoir séparateur vaut alors :

$$\tau_o(3) = \frac{\lambda}{\pi d} (80 R)^{-1/4} \quad (41)$$

Lorsque le nombre de capteurs est supérieur à 3, l'information est redondante ; le gain en pouvoir séparateur qui en résulte (mais qui résulte aussi de l'accroissement de longueur totale du réseau) est le suivant :

$$\frac{\tau_o(3)}{\tau_o(n)} = \left[\frac{n^2(n^2-1)(7n^2-13)}{3600} \right]^{1/4} \quad (42)$$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\tau_o(3)}{\tau_o(n)}$	1	1,60	2,28	3,02	3,83	4,70	5,62	6,59

Si seule intervenait la longueur du réseau, on aurait la loi $\tau_o(3)/\tau_o(n) = (n-1)/2$; en fait, la croissance avec n est plus rapide.

5. OBSERVABLE VECTORIEL.

Reprenons l'exemple précédent d'un réseau rectiligne de n capteurs équidistants et supposons qu'on se contente d'observer, à la fréquence f , les densités interspectrales entre le premier capteur et chacun des capteurs du réseau (y compris le premier lui-même) ; ceci revient à considérer comme observable le vecteur $[y_k]$ formé par la première colonne de la matrice interspectrale $Y = [Y_{kl}]_{n \times n}$, donc à prendre $k \in [1, n]$ et $l = 1$, d'où :

$$y_k = 2 s e^{j(k-1)\alpha} \cos(k-1)\beta \quad (43)$$

On obtient alors pour la variance de l'estimation de l'écart angulaire $\tau = \theta_1 - \theta_2$ l'expression suivante :

$$\text{var}(\hat{\tau}) = \left(\frac{\lambda}{\pi d}\right)^4 \frac{45}{n(n^2-1)(2n-1)(8n-11)R\tau^2} \quad (44)$$

et, par suite, le pouvoir séparateur angulaire défini comme précédemment vaut :

$$\tau_o = \frac{\lambda}{\pi d} \left[\frac{45}{n(n^2-1)(2n-1)(8n-11)R} \right]^{1/4} \quad (45)$$

d'où la relation entre le coefficient de super-résolution η et le rapport signal à bruit :

$$R = \frac{45(n-1)^3}{n(n+1)(2n-1)(8n-11)} \left(\frac{n}{\pi}\right)^4 \quad (46)$$

ou : $R(\text{db}) = 40 \log \eta - K(n)$ (47)

n	3	4	5	6	7	8	9	10
K(db)	23,24	23,72	24,23	24,71	25,16	25,58	25,96	26,32

Enfin, le gain en pouvoir séparateur résultant de l'accroissement du nombre de capteurs, donc de la longueur du réseau, par rapport à ce qu'on obtient avec le nombre minimal de trois capteurs est

$$\frac{\tau_o(3)}{\tau_o(n)} = \left[\frac{n(n^2-1)(2n-1)(8n-11)}{1560} \right]^{1/4} \quad (48)$$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\tau_o(3)}{\tau_o(n)}$	1	1,54	2,12	2,72	3,35	4,00	4,68	5,37

La progression avec n est moins sensible que dans le cas d'un observable matriciel (formule 42), mais néanmoins plus rapide que celle d'une antenne continue de longueur $(n-1)d$.

6. OBSERVABLE FORME D'UNE MATRICE DE FONCTIONS.

Reprenons à nouveau l'exemple du réseau rectiligne de n capteurs équidistants et supposons que les signaux observés soient à large bande de fréquence. Nous considérons que l'observable est alors la matrice des intercorrélations des signaux de sortie des capteurs $Y(t, x) = [Y_{kl}(t, x)]_{n \times n}$; ou, ce qui revient au même, la matrice interspectrale :

$$\tilde{Y}(f, x) \rightleftharpoons Y(t, x)$$

Le déphasage de propagation entre deux capteurs espacés de d , pour une source dans la direction θ , est fonction de la fréquence

$$\phi = 2\pi d f u \quad , \quad u = \frac{\sin \theta}{c} \quad (49)$$

Donnons-nous deux sources caractérisées respectivement par les angles θ_1 et θ_2 et ayant même densité spectrale de puissance $\gamma_s \tilde{a}(f)$, cette d.s.p. étant celle qu'on mesure pour une source à la sortie d'un des capteurs (supposés tous identiques) ; $\tilde{a}(f)$ est une distribution spectrale que nous supposons connue et sans dimension ; autrement dit, nous n'abordons pas le problème de l'analyse spectrale et nous nous plaçons dans le cas de la détection active où la distribution spectrale des échos est en principe connue. L'estimation porte donc sur θ_1, θ_2 et sur le paramètre γ_s qui a les dimensions d'une énergie.

Remplaçons l'estimation de θ_1 et θ_2 par celle des paramètres directionnels α et β (indépendants de la fréquence) définis comme suit :

$$\alpha = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2f} = \pi d(u_1 + u_2) \quad , \quad (50)$$

$$\beta = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2f} = \pi d(u_1 - u_2) \quad . \quad (51)$$

Nous admettons à nouveau l'approximation suivante :

$$\beta \approx \frac{\pi d}{c} \tau \quad , \quad \tau = \theta_1 - \theta_2$$

La matrice interspectrale, en l'absence de bruit, s'écrit :

$$\tilde{Y}(f) = [Y_{kl}(f)]_{n \times n} \quad , \quad Y_{kl}(f) = 2\gamma_s \tilde{a}(f) e^{j(k-1)\alpha f} \cos(k-1)\beta f \quad (52)$$

Les formules donnant les éléments de la matrice de FISHER mettent en jeu trois bandes passantes B_0, B_2

et B_4 caractéristiques de la distribution spectrale sans dimension $\tilde{a}(f)$, définies de la façon suivante :

$$B_0 = \int_R \tilde{a}^2(f) df, \quad (53)$$

$$B_2^2 = \frac{1}{B_0} \int_R f^2 \tilde{a}^2(f) df \quad (54)$$

$$B_4^4 = \frac{1}{B_0} \int_R f^4 \tilde{a}^2(f) df \quad (55)$$

On obtient pour l'estimateur efficace non biaisé de β la formule suivante :

$$\text{var}\{\hat{\beta}\} = \frac{45\gamma_0}{n^2(n^2-1)[6(2n^2-3)B_4^4 - 5(n^2-1)B_2^4]B_0\gamma_s^2\beta^2} \quad (56)$$

Nous caractériserons, comme précédemment, le pouvoir séparateur τ_0 par la condition :

$$\mu = \frac{\sqrt{\text{var}\{\tau_0\}}}{\tau_0} = \frac{\sqrt{\text{var}\{\beta_0\}}}{\beta_0} = 1 \quad (57)$$

$$\Rightarrow \text{var}\{\hat{\beta}_0\} = \beta_0^2 = \left(\frac{\pi d}{c} \tau_0\right)^2$$

Pour ce qui est du rapport signal à bruit, considérons le signal reçu de l'une des deux sources sur l'un des capteurs (supposés tous identiques) ; l'observable est la fonction d'autocorrélation de ce signal :

$$\Gamma_s(t_0) \rightleftharpoons \gamma_s \tilde{a}(f) \quad (58)$$

L'énergie de cet observable est :

$$E_\Gamma = \int_R \Gamma_s^2(t_0) dt_0 = \gamma_s^2 \int_R \tilde{a}^2(f) df = B_0 \gamma_s^2 \quad (59)$$

Rappelons que γ_0 représente la d.s.p. des bruits blancs superposés aux fonctions d'intercorrélacion ou d'autocorrélacion des signaux de sortie des capteurs.

Nous définirons le rapport signal à bruit par la formule habituelle :

$$R = \frac{E_\Gamma}{\gamma_0} = \frac{B_0 \gamma_s^2}{\gamma_0} \quad (60)$$

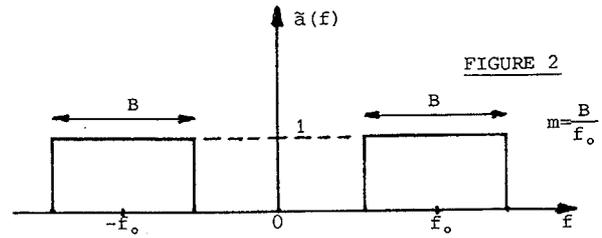
Soit f_0 une fréquence significative des signaux reçus (par exemple, la fréquence porteuse) et $\lambda_0 = c/f_0$ la longueur d'onde correspondante, on obtient alors la formule suivante du pouvoir séparateur angulaire :

$$\tau_0 = \frac{\lambda_0}{\pi d} \left\{ \frac{45}{n^2(n^2-1)[6(2n^2-3)\left(\frac{B_4}{f_0}\right)^4 - 5(n^2-1)\left(\frac{B_2}{f_0}\right)^4]R} \right\}^{1/4} \quad (61)$$

Lorsque la bande passante tend vers zéro autour de la fréquence f_0 , les quantités B_4/f_0 et B_2/f_0 tendent vers l'unité et on retrouve la formule (45) établie en onde monochromatique.

Prenons comme exemple typique le signal à distribution spectrale plate et à bande passante B représenté sur la figure 2.

La bande passante relative étant notée $m=B/f_0$, on obtient :



$$B_0 = 2B, \quad \left(\frac{B_2}{f_0}\right)^4 \approx 1 + \frac{m^2}{6}, \quad \left(\frac{B_4}{f_0}\right)^4 \approx 1 + \frac{m^2}{2}$$

ce qui donne :

$$\tau_0 = \frac{\lambda_0}{\pi d} \left[\frac{45}{n^2(n^2-1)(7n^2-13 + \frac{31n^2-49}{6} m^2)R} \right]^{1/4} \quad (62)$$

Pour trois capteurs, on aurait :

$$\tau_0 = \frac{\lambda_0}{\pi d} \left[8\left(10 + \frac{23m^2}{3}\right) R \right]^{-1/4} \quad (63)$$

On constate que la gain en pouvoir séparateur angulaire apporté par l'élargissement de la bande passante est à peu près négligeable ; ainsi, pour une bande d'une octave ($m=2/3$), on gagne seulement de 7 à 15 % selon le nombre de capteurs.

7. ESTIMATION EN PRESENCE D'AUTRES SOURCES PONCTUELLES OU D'UN FOND CONTINU.

Lorsque le champ d'observation contient, outre les deux sources qu'on cherche à séparer, d'autres sources ponctuelles non-corrélées ou un fond continu à corrélation microscopique et si l'on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'autre cause de perturbation, l'élément Y_{kl} de la matrice interspectrale telle qu'elle est définie par la formule (31) contient un terme complexe supplémentaire z_{k-1} qui conserve à la matrice son caractère TOEPLITZ :

$$Y_{kl} = s_1 e^{j(k-1)\phi_1 + s_2 e^{j(k-1)\phi_2 + z_{k-1}} \quad (64)$$

Le terme z_{k-1} peut être interprété comme un bruit additif d'espérance mathématique $E\{z_{k-1}\}$ non nulle. Dans ces conditions, il est clair qu'on a intérêt à retrancher $E\{z_{k-1}\}$ de l'observable Y_{kl} avant de procéder à l'estimation des paramètres s_1, s_2, ϕ_1 et ϕ_2 . En pratique, une estimation \hat{z}_{k-1} des densités interspectrales produites par les $k-1$ autres sources pourra être considérée comme une évaluation de $E\{z_{k-1}\}$ et utilisée comme telle ; elle peut être faite, par exemple, par la méthode de PISARENKO [13]. L'erreur commise sur cette estimation constitue alors le bruit additif dont il faut tenir compte dans le calcul du pouvoir séparateur.

8. EPILOGUE.

La question du pouvoir séparateur a été, certes, fort controversée, au point que nul expérimentateur n'est réellement capable de l'évaluer sans équivoque pour les instruments qu'il utilise, si ce n'est par la définition de RAYLEIGH ou celle de WOODWARD qui ont une valeur toute relative, puisqu'elles ne tiennent pas compte des incertitudes de mesure et qu'il est, en fait, possible d'obtenir des performances bien supérieures.

L'hypothèse fondamentale, sans laquelle la notion même de pouvoir séparateur perd sa signification, est que l'objet est "multiponctuel" ; moins il y a d'objets ponctuels dans le champ d'observation, plus le problème



est aisé à résoudre et meilleure est la précision d'estimation de leurs positions respectives. Nous avons étudié en détail le cas de deux objets seulement et pris comme indice de résolution la variance de l'estimation de leur écart, compte tenu des bruits ou incertitudes de mesure et nous avons proposé comme définition du pouvoir séparateur la valeur de cet écart telle que son carré égale sa variance. Nous avons examiné les divers cas possibles de signaux observés (continus, vectoriels, matriciels) et traité plus particulièrement celui de l'imagerie spatiale au moyen de la matrice interspectrale des signaux fournis par un réseau rectiligne de capteurs. Malheureusement, les hypothèses restrictives que nous avons dû prendre pour simplifier la présentation ne laissent aux résultats obtenus qu'une valeur indicative ; concluons cependant par quelques remarques que suggèrent l'examen de ces résultats.

1°/ Le pouvoir séparateur est inversement proportionnel à la puissance $1/4$ du rapport signal à bruit (alors que l'écart-type de l'estimation de la position moyenne varie comme l'inverse de la puissance $1/2$ dudit rapport, en conformité avec la formule de WOODWARD).

2°/ Il varie, pour un signal temporel continu, comme l'inverse d'une "bande passante effective" définie au moyen du moment d'ordre 4 de la répartition spectrale (alors que c'est le moment d'ordre 2 qui intervient dans la formule de WOODWARD) ; l'influence des fréquences élevées est donc hautement prépondérante.

3°/ Dans le cas où l'observable est la matrice interspectrale à la sortie d'un réseau rectiligne de capteurs destiné à l'imagerie spatiale, cette matrice est de type TOEPLITZ en l'absence de bruit et toute l'information est donc contenue dans la première colonne ; néanmoins, il y a intérêt à exploiter tous les éléments de la matrice si les bruits superposés ne sont pas corrélés ; le gain en pouvoir séparateur est négligeable mais le rapport signal à bruit nécessaire, à pouvoir séparateur donné, peut être alors sensiblement plus faible.

4°/ Le pouvoir séparateur angulaire d'un réseau de capteurs dépend fort peu de la largeur de bande des signaux reçus.

5°/ L'estimateur de la position moyenne de deux objets de même intensité n'est pas corrélé avec celui de l'écart entre ces objets ; si les intensités sont différentes, il apparaît une corrélation, mais elle demeure faible si le rapport des intensités n'est pas trop différent de l'unité. Cette propriété remarquable doit faciliter grandement la recherche algorithmique des valeurs de α et β .

De l'ensemble de ces remarques se dégage l'idée selon laquelle l'imagerie d'un champ d'objets ponctuels, éventuellement superposés à un continuum, doit se faire en deux opérations successives : la première doit permettre d'accéder à une estimation approchée de bonne qualité de l'ensemble du champ, la seconde est un raffinement permettant de reconnaître, dans l'image obtenue au premier stade, la présence d'objets doubles et de les séparer. Cette conclusion s'applique aussi à l'analyse spectrale de raies fines, qui se ramène au même type de problème.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] P.M. WOODWARD, I.L. DAVIES - A theory of Radar Information - Phil. Mag., 41, 1950, 1001-1017
- [2] J. ARSAC - Transformation de FOURIER et théorie des distributions (DUNOD, 1961)
- [3] W.L. ROOT - Radar resolution of closely spaced targets. - IRE. Trans., MIL-6, March 1962, 197-204
- [4] H. URKOWITZ, C.A. HAUER, J.F. KOVAL - Generalized resolution in Radar systems.- Proc. IRE, 50, Oct. 1962, 2093-2105.
- [5] V.G. WELSBY - The angular resolution of a receiving aperture in the absence of noise. - Journ. Brit. IRE, 26, Août 1963, 115-124
- [6] H. URKOWITZ - The accuracy of maximum likelihood estimates in Radar and Sonar. - IEEE. Trans. MIL-8, Jan. 1964, 39-45.
- [7] J.R. SKLAR, F.C. SCHWEPPE - On the angular resolution of multiples targets. - Proc. IEEE, 52, Sept. 1964, 1044-1045.
- [8] A.A. KSIENSKI, G.O. YOUNG - Antenna processing for high resolution mapping. - IEEE Intern. Conv. Rec., 1967, Pt 2, 164-172.
- [9] A.A. KSIENSKI, R.B. MCGHEE - Radar signal processing for angular resolution beyond the RAYLEIGH limit. - Radio Electronic Eng., 34, Sept. 1967, 161-174
- [10] A.A. KSIENSKI, R.B. MCGHEE - A decision theoretic approach to the angular resolution and parameter estimation problem for multiple targets. - IEEE. Trans., AES-4, May 1968, 443-455.
- [11] S. DRABOWITZ, M. METHAIS, C. AUBRY - Augmentation du pouvoir séparateur d'une antenne, voies multiples et décision statistique. - Onde Electrique, 49, Fév. 1969, 192-197.
- [12] H. COX - Resolving power and sensibility to mismatch of optimum array processors. - Journ. Acoust. Soc. Am., 54, Sept. 1973, 771-785.
- [13] V.F. PISARENKO - The retrieval of harmonics from a covariance function. - Geophys. J.R. Astr. Soc. 33, 1973, 347-366.
- [14] L.L. SCHARF, P.H. MOOSE - Information measures and performance bounds for array processors. IEEE Trans., IT-22, Jan. 1976, 11-21.
- [15] H.L. VAN TREES - Detection, estimation and modulation theory - Pt 1 - (WILEY, 1968).
- [16] A.P. SAGE, J.L. MELSA - Estimation theory with applications to communications and control. (MCGRAW HILL, 1971).