

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

---

INFLUENCE DE LA COHERENCE SPATIALE DU BRUIT DE FOND SUR LA RESOLUTION  
DE SOURCES PONCTUELLES

INFLUENCE OF THE SPATIAL COHERENCE OF BACKGROUND NOISE ON THE RESOLUTION  
OF POINT SOURCES

Georges BIENVENU

Thomson-C.S.F., Division A.S.M. 06802 Cagnes-sur-Mer  
(France)

Thomson-C.S.F. A.S.M. Division 06802 Cagnes-sur-Mer  
(France)

---

## RESUME

L'étude des antennes optimales en passif et de leurs réalisations pratiques, les antennes adaptatives, a montré que le pouvoir de résolution asymptotique de deux sources dépend du rapport signal à bruit de chacune d'elle. Le bruit de fond cependant, même isotrope, présente toujours une certaine cohérence spatiale. Un examen plus approfondi montre alors que le pouvoir de résolution du traitement optimal dépend aussi de cette cohérence. Si de plus on suppose connue la forme de la cohérence spatiale du bruit de fond, sa densité spectrale restant inconnue, il est possible de construire non seulement des tests de détection comme on l'a montré dans le précédent GRETSI, mais aussi d'obtenir une résolution asymptotique théoriquement infinie et limitée en pratique par la connaissance exacte de la cohérence du bruit de fond. On montre sur des exemples la sensibilité des traitements à des erreurs sur la forme de cette cohérence.

## SUMMARY

The study of optimum passive arrays and their practical implementations -adaptive antennas- proved that the asymptotic ability of resolving two sources depends on the signal to noise ratio of each source. However, the background noise is always somehow spatially coherent, even when isotropic. It can then be shown that the resolving power of an optimum array processor also depends on this coherence. Moreover, if one assumes that the shape of the spatial coherence of background noise is known, while its spectral density remains unknown, it is possible not only to build detection tests, as shown in the last GRETSI Symposium but also to achieve an asymptotic resolution power which is theoretically infinite though limited practically due to imperfect knowledge of the coherence of background noise. Examples are presented which demonstrate the great sensitivity of the processing to errors in the shape of the noise spatial correlation curve.



INFLUENCE DE LA COHERENCE SPATIALE DU BRUIT DE FOND SUR LA RESOLUTION  
DE SOURCES PONCTUELLES

1. - INTRODUCTION.

On a vu apparaître ces dernières années des méthodes de mesures de plus en plus sophistiquées pour la description d'un champ de bruit passif formé de sources ponctuelles en présence d'un bruit de fond. On entend par passif un champ de bruit dont les sources émettent en permanence des signaux inconnus : ce sont eux que l'on doit utiliser au mieux malgré la présence du bruit de fond pour "former l'image" des sources, c'est-à-dire en premier lieu détecter leur présence, et ensuite mesurer certains de leurs paramètres et en priorité leurs positions. Pour ce faire on dispose d'une antenne de réception formée d'un certain nombre de capteurs.

Pour construire une méthode de traitement, il faut tout d'abord établir un modèle du phénomène auquel on s'intéresse. Mais ce modèle ne représente jamais exactement la réalité, et les performances de la méthode que l'on en a déduit se dégradent lorsqu'elle est utilisée dans le milieu réel. Dans le problème que l'on considère, c'est le champ de bruit qu'il faut modéliser, c'est-à-dire les sources et le bruit de fond. La clef de cette modélisation est la cohérence spatiale.

Le signal émis par une source atteint chaque capteur par plusieurs trajets dont les caractéristiques varient d'un capteur à l'autre et sont fluctuantes. Dans les méthodes que l'on va examiner ici, on suppose qu'il n'y a pas de fluctuation et que les fonctions de transfert qui représentent alors la transformation du signal entre la source et les capteurs sont connues.

Notre propos n'est pas d'étudier ici l'influence des hypothèses faites sur les sources, mais sur le bruit de fond. On prendra pour elles classiquement le modèle le plus simple : une source génère sur les capteurs des signaux identiques à un temps de retard près, caractéristique de la géométrie de l'antenne et de la direction de la source, et la forme de la surface d'onde reçue est connue, ce qui détermine les retards pour chaque direction. Il découle de ces hypothèses que la matrice des densités spectrales pour une source s'écrit :

$$\Gamma(f) = \gamma(f) \vec{D}(f) \vec{D}^+(f) \quad (1)$$

où  $\gamma(f)$  est la densité spectrale du signal reçu et  $\vec{D}(f)$  le vecteur direction de la source :

$$\vec{D}^+(f) = [e^{2\pi j f \tau_1}, \dots, e^{2\pi j f \tau_k}, \dots, e^{2\pi j f \tau_K}] \quad (2)$$

$\vec{D}^+(f)$  est le transposé conjugué de  $\vec{D}(f)$  et  $K$  le nombre de capteurs.  $\vec{D}(f) \vec{D}^+(f)$  est la matrice de cohérence spatiale d'une source : elle est de rang un, ce qui est sa principale caractéristique.

La nature du bruit de fond est plus difficile à appréhender. Il provient d'une infinité de sources indépendantes réparties dans le milieu qui se distinguent des sources à détecter par le fait qu'elles présentent un aspect continu avec une intensité qui varie "très lentement" en fonction de la direction. Chaque élément de ce "générateur de bruit" émet un signal reçu par tous les capteurs de l'antenne. On conçoit donc qu'il existe une certaine corrélation entre les bruits ainsi générés sur les différents capteurs. Deux modèles typiques sont le bruit isotrope "sphérique" et le bruit isotrope "circulaire". Dans le premier cas, on suppose que le bruit provient de chaque élément infinitésimal d'angle solide vu du point de réception avec une densité d'énergie, à chaque fréquence, égale quelle que soit la direction ; la densité spectrale croisée entre deux capteurs distants de  $d$  s'écrit alors :

$$\gamma_d(f) = \sigma(f) \frac{\sin(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} \quad (3)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $\sigma(f)$  la densité spectrale de chaque source élémentaire.

Le deuxième cas est identique au premier mais tout se passe dans un plan ; on trouve alors :

$$\gamma_d(f) = \sigma(f) J_0(2\pi d/\lambda) \quad (4)$$

où  $J_0()$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro. Les formules (3) et (4) donnent le terme général de la matrice de cohérence spatiale.

On se propose donc d'examiner la sensibilité de certains traitements aux hypothèses qu'ils adoptent sur le bruit de fond : généralement, ils le supposent indépendant entre les capteurs, et donc sa matrice de cohérence spatiale est unitaire. L'étude va être effectuée dans un contexte stationnaire (ce que supposent implicitement les densités spectrales définies ci-dessus) sur les formes asymptotiques des traitements, c'est-à-dire en supposant que les estimations utilisées sont parfaites. C'est ce que l'on obtiendrait si le temps de mesure était infini : plus il est long, plus on s'approche de cet optimum (ce qui découle naturellement du fait que ces traitements sont déduits de ces formes optimales dans lesquelles on remplace les inconnues, et en particulier la matrice des densités

spectrales, par des estimations). La sensibilité aux hypothèses sera montrée à fréquence pure, sur des exemples en utilisant une antenne linéaire à capteurs équidistants d'un certain nombre de longueurs d'onde. Toutes les sources sont situées dans un plan dans lequel on se cantonnera et dans lequel on observera le champ de bruit en y faisant tourner l'antenne de réception. La direction des sources se réduit à un gisement.

Pour en conclure avec les hypothèses, on suppose le champ de bruit résolvable : il y a moins de sources que de capteurs, et de plus, que les signaux émis par les sources sont statistiquement indépendants entre eux et du bruit de fond. La matrice des densités spectrales des signaux reçus s'écrit donc :

$$\Gamma(f) = \Gamma_B(f) + \sum_{n=1}^{N < K} \gamma_n(f) \vec{D}_n(f) \vec{D}_n^+(f) \quad (5)$$

où  $\Gamma_B(f)$  est celle du bruit de fond.

On va examiner deux types principaux de traitement caractérisés, lorsque le champ de bruit est conforme au modèle, par :

- une résolution asymptotique finie, qui dépend de la configuration des sources et de leur rapport signal à bruit : même si le temps d'observation est infini, deux sources peuvent ne pas être discernables
- une résolution asymptotique infinie, quels que soient la configuration des sources et leurs rapports signal à bruit.

Le dernier type devrait être le plus sensible.

2. - TRAITEMENTS DU PREMIER TYPE.

2.1. Antenne passive adaptative. [1] [2] [3]

L'antenne adaptative n'utilise que le modèle de cohérence spatiale des sources. Pour une direction d'observation donnée, représentée par le vecteur  $\vec{D}(f)$ , elle estime au mieux le signal qui vient de cette direction et qui a donc une surface d'onde conforme à  $\vec{D}(f)$ . Sa forme asymptotique est l'antenne optimale au sens du maximum de vraisemblance dont le vecteur de filtrage s'écrit :

$$\vec{H}_0(f) = \Gamma^{-1}(f) \vec{D}(f) [\vec{D}^+(f) \Gamma^{-1}(f) \vec{D}(f)]^{-1} \quad (6)$$

Ce vecteur peut aussi être défini comme celui qui minimise la densité spectrale du signal obtenu en sortie du traitement avec la contrainte qu'il ne doit pas distordre un signal qui vient de la direction d'observation, ce qui se traduit par la relation :  $\vec{H}_0^+(f) \vec{D}(f) = 1$  (7). Cette densité spectrale, qui est une estimation de celle du signal, s'écrit :

$$\gamma_0(f) = [\vec{D}^+(f) \Gamma^{-1}(f) \vec{D}(f)]^{-1} \quad (8)$$

Bien que ne faisant aucune hypothèse sur lui, les performances de l'antenne optimale dépendent de la cohérence spatiale du bruit de fond, ce que l'on va illustrer par un exemple. Soit une antenne composée de 6 capteurs dont le pas en longueur d'onde est égal à 0,5. Le vecteur direction d'observation étant toujours perpendiculaire à l'antenne, il est composé d'éléments 1 et on le note dans ce cas  $\vec{N}$ . On suppose le bruit de fond conforme au modèle "sphérique". Il y a deux sources de rapports signal à bruit unité, et de gisements respectifs 0° et 13° (le rapport signal à bruit est défini par le rapport des densités spectrales des sources et du bruit de fond). La réponse de l'antenne en fonction du gisement est donnée sur la figure 1-a, les deux sources ne sont pas discernables. On prend maintenant une antenne de même pupille en longueur d'onde mais composée de 11 capteurs dont le pas est donc égal à 0,25. Sa réponse est présentée sur la figure 1-b: la résolution obtenue est meilleure, et le niveau de bruit en sortie, que l'on peut juger pour des gisements éloignés des sources, est inférieur au précédent. Cela est dû au fait que le bruit de fond apparaît avec 11 capteurs corrélés. En présence de bruit indépendant seul, la pondération optimale est la pondération uniforme  $\vec{N}$ . S'il y a une source hors de la direction d'observation et pas de bruit, le vecteur optimal présente un zéro dans la direction de la source : l'antenne optimale effectue une déconvolution parfaite. S'il y a à la fois la source et le bruit, le vecteur optimal ne peut plus présenter un zéro dans la direction de la source, car n'étant plus optimal pour le bruit de fond, l'énergie de ce dernier croît alors de façon prohibitive (une déconvolution parfaite est toujours très mauvaise en présence de bruit) : partant du vecteur  $\vec{N}$ , l'antenne optimale tend à éliminer la source, mais le bruit de fond croissant, elle s'arrête, conformément au critère choisi, lorsque l'énergie globale est minimum. Plus le rapport signal à bruit est grand, plus pour un écart donné entre source et direction d'observation, l'antenne optimale peut diminuer l'énergie due à la source sans que celle du bruit devienne prohibitive ; elle effectue une déconvolution partielle limitée de façon optimale par le rapport signal à bruit : plus il est élevé, plus elle déconvolue.

Lorsqu'avec la même ouverture d'antenne, ayant rajouté des capteurs, le bruit de fond est corrélé, le vecteur optimum en bruit seul n'est plus la pondération uniforme, car profitant des corrélations et des degrés de liberté disponibles, on peut obtenir une densité spectrale de bruit plus faible tout en respectant la contrainte (7) (avec une contrainte fixant la norme du vecteur de filtrage à 1, on peut obtenir une densité spectrale encore bien plus faible qui est la valeur



propre minimum de la matrice des densités spectrales du bruit de fond (voir ci-après). En présence d'une source, partant d'un niveau de bruit plus faible, on peut diminuer davantage l'énergie due à la source.

## 2.2. Test de détection passive [4] [5]

On a montré que pour pouvoir construire un test de détection, c'est-à-dire décider s'il y a dans telle direction présence ou non d'une source, il est nécessaire de se donner la cohérence spatiale du bruit de fond. En effet, tout test de détection doit s'appuyer sur un contraste qui permet de distinguer les deux hypothèses : dans un contexte passif, c'est la cohérence spatiale. En absence de source, les signaux reçus sur les capteurs ont la cohérence du bruit de fond ; s'il y a une source dans la direction d'observation, les signaux reçus sur les capteurs comportent en plus du bruit de fond des termes qui ont la cohérence spatiale parfaite qui correspond à la direction d'observation.

La matrice des densités spectrales des signaux reçus sur les capteurs s'écrit donc :

$$\Gamma(f) = \sigma(f) J(f) + \sum_n \gamma_n(f) \vec{D}_n^+(f) \vec{D}_n^+(f) \quad (9)$$

où  $J(f)$  est la matrice de cohérence spatiale du bruit de fond supposée connue, et  $\sigma(f)$  sa densité spectrale inconnue. Le nombre de sources étant inférieur à celui des capteurs,  $\sigma(f)$  est la plus petite valeur propre de la matrice :

$$\Gamma_C(f) = C^+(f) \Gamma(f) C(f) \quad (10)$$

où  $C(f)$  est une matrice telle que :

$$C^+(f) J(f) C(f) = I \quad (11)$$

La matrice de cohérence spatiale du bruit de fond est définie positive, et donc  $C(f)$  existe. Il est donc possible d'obtenir une estimation  $\hat{\sigma}(f)$  de  $\sigma(f)$  en calculant la plus petite valeur propre de :

$$\hat{\Gamma}_C(f) = C^+(f) \hat{\Gamma}(f) C(f) \quad (12)$$

où  $\hat{\Gamma}(f)$  est une estimation de  $\Gamma(f)$ .

On a proposé un test qui s'écrit :

$$\Lambda = \frac{\int \gamma_A(f) df}{\int \gamma_\sigma(f) df} = \frac{\int \gamma_A(f) df}{\sigma(f) \int \vec{H}_A^+(f) J(f) \vec{H}_A(f) df} \quad (13)$$

où  $\gamma_A(f)$  est la densité spectrale de sortie de l'antenne adaptative,  $\vec{H}_A(f)$  son vecteur de filtrage et  $\hat{\gamma}_\sigma(f)$  une estimation de la densité spectrale du bruit de fond en sortie de l'antenne adaptative. Outre sa qualité de "détecteur" qui normalise asymptotiquement à 1 le niveau du bruit de fond, il possède l'avantage sur l'antenne adaptative de posséder une meilleure résolution comme on peut le voir sur les figures ci-après.

On va examiner à une fréquence donnée, la sensibilité à une erreur sur la cohérence spatiale du bruit de fond de la forme asymptotique du test, soit :

$$\Lambda_a(f) = \frac{\gamma_o(f)}{\sigma(f) \vec{H}_o^+(f) J(f) \vec{H}_o(f)} \quad (14)$$

L'antenne de réception est linéaire et formée de 10 capteurs équidistants. On suppose par exemple le bruit de fond indépendant entre les capteurs, alors qu'il est conforme au modèle "sphérique" : l'hypothèse n'est donc vraie que dans le cas d'un pas  $P$  entre capteurs mesuré en longueur d'onde de 0,5. Le test utilisé s'écrit donc :

$$\Lambda'_a(f) = \frac{\gamma_o(f)}{\sigma(f) \vec{H}_o^+(f) \vec{H}_o(f)} \quad (15)$$

Le champ de bruit comporte en outre deux sources, et la matrice  $\Gamma(f)$  s'écrit donc :

$$\Gamma(f) = \sigma(f) J(f) + \gamma_1(f) \vec{D}_1^+(f) \vec{D}_1^+(f) + \gamma_2(f) \vec{D}_2^+(f) \vec{D}_2^+(f) \quad (16)$$

Les rapports signal à bruit ( $\gamma_i(f)/\sigma(f)$ ) sont tous les deux égaux à 1.

On a calculé les résultats que l'on obtient lorsque le pas entre capteurs  $P$  varie de 0,3 à 0,9. Il faut distinguer deux aspects.

### 2.2.1. Aspect résolution.

Le test  $\Lambda_a(f)$  a une meilleure résolution que l'antenne optimale à cause du terme  $\vec{H}_o^+(f) J(f) \vec{H}_o(f)$  : lorsque la direction d'observation est différente de celle des sources, la norme de  $\vec{H}_o(f)$  croît pour éliminer celles-ci. Cependant la densité spectrale de bruit dépend de  $J(f)$ , d'où sa présence dans la norme de façon à obtenir un niveau normalisé en présence de bruit seul. On a donc supposé pour cet aspect résolution que l'estimation  $\sigma(f)$  est exacte.

Les résultats montrent que pour un pas entre capteurs supérieur ou égal à 0,5, la résolution est conservée : il y a peu de différence entre  $\Lambda_a(f)$  et  $\Lambda'_a(f)$  comme le montrent les figures 2-a et 2-b qui représentent en fonction du gisement les réponses de l'antenne adaptative (notée A), du test exact  $\Lambda_a(f)$  (noté  $\Lambda_a$ ) et du test appliqué  $\Lambda'_a(f)$  (noté  $\Lambda'_a$ ). Cependant, la normalisation du bruit n'est pas conservée : on a multiplié sur les figures le test exact  $\Lambda_a(f)$  par le niveau de bruit de fond obtenu par l'antenne optimale. En revanche, si le pas décroît à partir de 0,5 (fig. 1-c à 1-e), la sensibilité se manifeste par une décroissance globale du niveau de  $\Lambda'_a(f)$  et par l'apparition d'oscillations. Cependant on conserve deux pointes dans la direction des sources, et donc la résolution que l'on peut peut-être concevoir d'exploiter sous contrôle de l'antenne adaptative.

INFLUENCE DE LA COHERENCE SPATIALE DU BRUIT DE FOND SUR LA RESOLUTION  
DE SOURCES PONCTUELLES

### 2.2.2 Aspect détection.

L'aspect détection est dégradé on l'a vu par le défaut de normalisation. De plus, on fait une erreur aussi sur l'estimation de  $\sigma(f)$ . Le tableau ci-après donne en fonction du pas entre capteurs P, la valeur de la plus petite valeur propre  $\lambda_m$  de J(f), donc le rapport entre la vraie valeur de  $\sigma(f)$  et celle obtenue en supposant le bruit de fond indépendant.

P	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\lambda_m$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	0,022	1	0,833	0,714	0,624	0,565

On constate un écart important surtout pour les pas inférieurs à 0,5 (effet de suréchantillonnage). On a vu dans le paragraphe 2.2.1. que si l'on suppose l'estimation de  $\sigma(f)$  parfaite, l'aspect normalisation du bruit du test n'est pas conservé. Cependant, dans la pratique on utilisera la valeur estimée de  $\sigma(f)$  indiquée dans le tableau ci-dessus, et l'on s'aperçoit alors que pour P compris entre 0,5 et 0,9, on obtient un niveau de bruit normalisé proche de 1 comme l'indique le tableau ci-dessous :

P	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Niveau de bruit normalisé	1	0,993	0,984	0,972	0,956

On peut donc dire que le test de détection conserve ses propriétés avec une assez bonne précision pour des pas entre capteurs compris entre une demie et une longueur d'onde.

### 3. - TRAITEMENTS DU SECOND TYPE.

#### 3.1. Application de la méthode de Pizarenko à l'antenne adaptative [6]

Pour la mesure de fréquence de sinusoïdes mélangées à un bruit, à partir d'un signal échantillonné, Pizarenko a proposé une méthode qui revient à augmenter artificiellement le rapport signal à bruit et donc la résolution de traitements tels que le maximum de vraisemblance et le maximum d'entropie. Pour cela il suppose le bruit indépendant entre les points de mesure et donc de densité spectrale  $\sigma_0$  constante, et le nombre de sinusoïdes inférieur à celui des points de mesure. On peut donc obtenir une estimation  $\hat{\sigma}_0$  de la densité spectrale du bruit, et retrancher à l'estimation de la matrice de corrélation du vecteur de mesure une estimation de la matrice de corrélation du bruit, soit la matrice unité multipliée par  $\alpha \hat{\sigma}_0$  où  $\alpha$  est un nombre positif et inférieur à 1, tel que :  $\sigma_0 - \alpha \hat{\sigma}_0$  reste positif. Si le temps d'estimation est infini,  $\hat{\sigma}_0$  est

égal à  $\sigma_0$  et on peut prendre  $\alpha$  égal à 1 : la résolution asymptotique est donc infinie.

On peut appliquer cette méthode à l'antenne adaptative. On peut même la généraliser à une cohérence spatiale quelconque pour le bruit de fond puisque l'on a montré dans le paragraphe précédent comment estimer sa densité spectrale si l'on connaît J(f).

Cette méthode est évidemment sensible aux erreurs sur J(f). On a étudié cette sensibilité sur les résultats asymptotiques obtenus donc avec l'antenne optimale, et avec un exemple qui utilise la même antenne et le même champ de bruit qu'au paragraphe 2.2. On suppose que le bruit est indépendant entre les capteurs, alors qu'il est du type sphérique. On calcule donc :

$$\{ \hat{N}^+ [ \Gamma(f) - \alpha \hat{\sigma}(f) I ]^{-1} \hat{N} \}^{-1} \quad (17)$$

en employant I au lieu de J(f).

Là aussi il faut distinguer deux aspects : les erreurs introduites par  $\hat{\sigma}(f)$  et celles introduites par l'emploi de I au lieu de J(f). Celles du premier type font qu'au lieu d'appliquer un coefficient  $\alpha$  on applique un coefficient plus faible puisque la valeur propre minimum de J(f) est toujours inférieure à  $\sigma(f)$  (voir (§ 2.2.2.)). L'effet de celles du second type est plus complexe : la limitation vient de ce que l'on peut obtenir une matrice des densités spectrales résultante qui n'est pas positive. On a appliqué la méthode en supposant qu'il n'y a pas d'erreur sur l'estimation de  $\sigma(f)$ . Les deux sources ont un rapport signal à bruit de 1. On a fait varier le pas entre capteurs P de 0,3 à 0,9. On a choisi un coefficient  $\alpha$  de 0,9, ce qui augmenterait le rapport signal à bruit d'un facteur 10 si l'on ne faisait pas d'erreur. Lorsque P est supérieur à 0,5 on trouve des résultats aberrants car la matrice des densités spectrales doit devenir négative. Un tel résultat est montré sur la figure 3-a. Les paramètres des expériences sont indiqués sur les figures qui présentent en fonction du gisement les réponses de l'antenne optimale "améliorée" par la méthode (notée A<sub>p</sub>) et l'antenne optimale normale (notée A) avec un écart entre les sources tel qu'elles soient "séparées" de façon analogue. On a alors cherché la valeur maximum de  $\alpha$  qui donne un résultat correct. Elle est indiquée sur les figures 3-b à 3-e. On voit que le gain obtenu (en signifiant la valeur de  $\alpha$ ) est faible : 2 au maximum. Pour des pas entre capteurs P égaux à 0,4 et 0,3, on n'a pas observé de résultats aberrants, mais cependant le gain obtenu est très faible pour P = 0,4, et même inférieur à 1 pour P = 0,3 (figures 3-f et 3-g) : le "nouveau bruit de fond" a une structure que l'antenne optimale peut moins bien utiliser pour réduire sa



INFLUENCE DE LA COHERENCE SPATIALE DU BRUIT DE FOND SUR LA RESOLUTION  
DE SOURCES PONCTUELLES

contribution, ce qui est mis en évidence sur la figure 3-h où l'on a pris  $\alpha = 0,95$  et  $0,99$  : on constate une saturation du gain en pouvoir séparateur.

### 3.2. Décomposition en vecteurs propres et valeurs propres [7] [8] [9]

La dernière méthode que l'on va examiner ici est l'analyse du champ de bruit au moyen de la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice des densités spectrales des signaux reçus  $\Gamma(f)$ .

$\Gamma(f)$  étant définie positive, ses valeurs propres sont réelles et positives et ses vecteurs propres orthogonaux. On suppose le bruit de fond indépendant entre les capteurs et donc  $\Gamma(f)$  s'écrit :

$$\Gamma(f) = \sigma(f) I + \sum_{n=1}^{N < K} \gamma_n(f) \vec{D}_n(f) \vec{D}_n^+(f) \quad (18)$$

Les vecteurs propres de  $\Gamma(f)$ ,  $\vec{V}_k(f)$ , sont identiques à ceux que l'on a sans bruit et sont donc des combinaisons linéaires des vecteurs  $\vec{D}_n(f)$  : ils leur sont égaux dans le cas limite où les vecteurs direction des sources sont orthogonaux. Les valeurs propres  $p_k(f)$  de  $\Gamma(f)$  sont la somme de celles de la matrice sans bruit et de  $\sigma(f)$ . La relation entre les sources et les vecteurs propres s'exprime alors par :

$$\sum_{n=1}^{N < K} \gamma_n(f) \vec{D}_n(f) \vec{D}_n^+(f) = \sum_{k=1}^K [p_k(f) - \sigma(f)] \vec{V}_k(f) \vec{V}_k^+(f) \quad (19)$$

Les  $(K-N)$  plus petites valeurs propres de  $\Gamma(f)$  sont égales à  $\sigma(f)$ . Le nombre de valeurs propres supérieures à  $\sigma(f)$  donne le nombre de sources. Il reste ensuite le problème de remonter des vecteurs propres et des valeurs propres "aux sources" (cf. [8]).

Cette méthode peut être étendue au cas d'un bruit de fond de cohérence spatiale quelconque (mais connue) en utilisant la matrice  $\Gamma_c(f)$  (relation 10) :

$$\Gamma_c(f) = C^+(f) \Gamma(f) C(f) = \sigma(f) I + \sum_{n=1}^{N < K} \gamma_n(f) C^+(f) \vec{D}_n(f) \vec{D}_n^+(f) C(f) \quad (20)$$

Il suffit ensuite de repasser des vecteurs  $C^+(f) \vec{D}_n(f)$  aux vecteurs  $\vec{D}_n(f)$ .

On a présenté ici la forme asymptotique de la méthode qui possède une résolution infinie comme la forme asymptotique de la méthode de Pizarenko. La raison en est simple : les deux méthodes reposent sur le même principe de base qui consiste à se "débarrasser" du bruit de fond, et on obtient donc un rapport signal à bruit infini pour les sources. Dans la pratique, évidemment, on utilise une estimation de  $\Gamma(f)$ , et donc une estimation de la densité spectrale du bruit

de fond. Il faut donc prendre des précautions en "retranchant" le bruit de fond de façon à garder la propriété de non-négativité des matrices des densités spectrales [8] (ce qui se traduit par le coefficient  $\alpha$  dans la méthode de Pizarenko).

On a examiné la sensibilité de ce traitement sur des exemples, qui utilisent une antenne à 12 capteurs et une source dans le gisement  $-15^\circ$ , lorsque le bruit de fond est supposé indépendant entre les capteurs alors qu'il est du type "circulaire". Lorsque le champ de bruit ne possède qu'une source et que le bruit de fond est indépendant, toutes les valeurs propres sont égales à  $\sigma(f)$ , sauf une qui est la plus grande et dont le vecteur propre est le vecteur direction de la source : donc lorsqu'on trace le produit scalaire entre un vecteur direction fonction du gisement et le vecteur propre qui correspond à la valeur propre maximum de  $\Gamma(f)$ , on trouve un diagramme qui est celui du vecteur direction de la source et qui passe donc par un maximum dans la direction de cette source.

On a fait varier le pas entre capteurs  $P$  de  $0,3$  à  $0,8$ . On a porté dans les tableaux suivants les valeurs propres de la matrice des densités spectrales normalisée :  $\Gamma(f)/\sigma(f)$ , obtenues pour des rapports signal à bruit de 1 et de  $0,1$ , et sans source.

P = 0,3			P = 0,4		
$\gamma(f)/\sigma(f)$			$\gamma(f)/\sigma(f)$		
1	0,1	0	1	0,1	0
13,11	2,55	2,45	12,88	2,26	2,24
2,43	2,28	2,26	2,24	2,12	2,02
2,25	2,17	1,34	2,01	1,95	1,14
1,33	1,33	1,29	1,14	1,14	1,10
1,29	1,29	1,13	1,10	1,10	0,96
1,11	1,11	1,10	0,96	0,96	0,93
1,06	1,06	1,05	0,93	0,93	0,87
1,02	1,02	1,00	0,86	0,86	0,85
0,34	0,33	0,32	0,84	0,84	0,83
0,05	0,05	0,05	0,78	0,78	0,78
$4 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	0,24	0,24	0,24
$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	0,03	0,03	0,03

P = 0,5			P = 0,6		
$\gamma(f)/\sigma(f)$			$\gamma(f)/\sigma(f)$		
1	0,1	0	1	0,1	0
12,75	2,09	2,07	12,64	3,56	3,56
2,07	2,06	1,91	3,56	1,86	1,46
1,89	1,77	0,97	1,45	1,43	0,95
0,97	0,97	0,97	0,95	0,95	0,89
0,96	0,96	0,84	0,88	0,88	0,71
0,84	0,84	0,82	0,71	0,71	0,70
0,82	0,82	0,80	0,70	0,70	0,65
0,80	0,80	0,77	0,65	0,65	0,64
0,77	0,77	0,74	0,64	0,64	0,62
0,73	0,73	0,72	0,61	0,61	0,61
0,70	0,70	0,70	0,60	0,60	0,60
0,70	0,70	0,70	0,60	0,60	0,60

INFLUENCE DE LA COHERENCE SPATIALE DU BRUIT DE FOND SUR LA RESOLUTION DE SOURCES PONCTUELLES

P = 0,7 $\gamma(f)/\sigma(f)$			P = 0,8 $\gamma(f)/\sigma(f)$		
1	0,1	0	1	0,1	0
12,57	2,68	2,67	12,59	2,21	2,21
2,67	2,22	2,22	2,21	2,12	2,12
2,22	1,76	1,38	2,12	1,84	1,43
1,38	1,37	1,11	1,39	1,35	1,26
1,10	1,09	0,76	1,26	1,24	1,17
0,76	0,76	0,61	1,16	1,16	0,79
0,61	0,61	0,58	0,79	0,79	0,62
0,58	0,58	0,55	0,59	0,59	0,52
0,55	0,55	0,54	0,49	0,49	0,48
0,53	0,53	0,53	0,47	0,47	0,47
0,52	0,52	0,52	0,47	0,47	0,47
0,52	0,52	0,52	0,46	0,46	0,46

On constate tout d'abord que même sans source les valeurs propres ne sont pas égales, et que donc on trouve un nombre de sources confortable alors qu'il n'y en a pas ou une seulement. On peut vérifier que toutes les valeurs propres obtenues sans source sont retrouvées très peu modifiées lorsqu'il y a une source sauf une qui se retrouve augmentée à peu près de l'énergie du signal (soit ici le rapport signal à bruit puisque l'on a normalisé  $\Gamma(f)$  par  $\sigma(f)$ ) multipliée par 12, le nombre de capteurs. Cependant cette valeur propre ne devient pas toujours la valeur propre maximum. Par exemple, pour  $P = 0,4$ , c'est la septième valeur propre en bruit seul : 0,87, qui se trouve augmentée : elle devient égale à :  $12,88 \approx 12 + 0,87$  pour un rapport signal à bruit de 1, et c'est la plus grande, et égale à :  $1,95 \approx 1,2 + 0,87$  pour un rapport signal à bruit de 0,1, et là ce n'est que la troisième. Pour  $P = 0,6$ , c'est la neuvième valeur propre en bruit seul, 0,62, qui est augmentée : elle se retrouve respectivement en première et deuxième position pour des rapports signal à bruit de 1 et 0,1. On peut donc s'attendre à ce que le vecteur propre qui correspond à la plus grande valeur propre corresponde à peu près au vecteur direction de la source pour un rapport signal à bruit de 1, mais pas pour un rapport signal à bruit de 0,1. C'est ce que l'on a vérifié en traçant le diagramme du vecteur propre considéré en fonction du gisement : les résultats sont portés sur la figure 4 sur laquelle on a aussi tracé le diagramme du vecteur direction de la source pour comparaison, et un trait pour indiquer la position de cette source.

4. - CONCLUSION.

Le but de l'étude "expérimentale" très partielle puisque constituée de simples exemples, que l'on a présentée ici est d'attirer l'attention sur les "pièges" que la nature du bruit de fond peut tendre à des techniques sophistiquées d'estimation des paramètres des sources, et en particulier leur position.

Lorsque le rapport signal à bruit est fort, 0 dB ou plus, c'est la distorsion du plan d'onde qui limite les traitements. On a mis au point des systèmes [10] pour limiter les effets néfastes de cette distorsion pour l'antenne adaptative à fort signal à bruit, dont le seul expérimenté en milieu réel s'est révélé efficace. Ce problème a été aussi abordé [9] pour l'analyse du champ par les vecteurs propres, mais là, la parade semble plus difficile à atteindre. Il n'en reste pas moins que les méthodes "à résolution asymptotique infinie" restent très attrayantes pour la localisation et la discrimination angulaire des cibles à faible signal à bruit (inférieur à -10 dB). On peut penser aussi à une autre méthode dérivée du test de détection passive que l'on n'a pas eu la place de présenter ici et qui consiste à tracer le diagramme du vecteur propre qui correspond à la plus faible valeur propre [11] : il possède des zéros dans la direction des sources. Il semble donc important de s'intéresser à l'analyse des propriétés (moyenne, variance, ...) de la cohérence spatiale du bruit de fond pour en tenir compte dans ces types de traitements et chercher des moyens pour limiter leurs sensibilités et gagner ainsi un ordre de grandeur pour la résolution des cibles faibles. Ces méthodes devront être utilisées évidemment sous décision et sous contrôle d'une antenne "normale" classique ou pourquoi pas, adaptative.

- REFERENCES -

- [1] J. Capon "High resolution frequency wave-number spectrum" Proc. IEEE vol 54 n° 8. p 1408-1418 (1969)
- [2] H. Mermoz "Modularité du traitement adaptatif d'antenne" Ann. Télécom. Fr (janv-fév.1974) 29, n° 1-2, p 43-54  
"Antennes de détection optimales et adaptatives" Collection scientifique et technique du CNET (19633-1971)
- [3] G. Bienvenu "Traitement d'antenne adaptatif à large bande pour les sonars actifs ou passifs 4è Colloque GRETSI Nice 7-12 mai 1973 p 169-216
- [4] G. Bienvenu "Detection passive de sources ponctuelles dans un bruit isotrope" 5è Colloque GRETSI Nice 16-21 juin 1975 p 473-479
- [5] G. Bienvenu "An adaptive approach to underwater passive detection" NATO ASI on Signal Processing 30 aug-11 sep 1976, Portovenere (Italy) p 17-1 17-6
- [6] O.L. Frost "Power spectrum estimation" NATO ASI on Signal Processing, 30 aug-11 sept 1976 Portovenere (Italy) p 7-1 7-36.
- [7] N.L. OWSLEY "An adaptive search and track array (ASTA)" NUSL Technical Memorandum n° 2242 166-69 7 july 1969
- [8] W.S. Liggett "Passive sonar : fitting models to multiple time series" NATO ASI on Signal Processing 21 aug-11 sept 1972 Loughborough (UK) p 327-345 Academic Press.
- [9] H. Mermoz "Imagerie, corrélation et modèles" Ann. Télécom. 31 n° 1-2 (janv-fév 1976) p.17, 36



INFLUENCE DE LA COHERENCE SPATIALE DU BRUIT DE FOND SUR LA  
RESOLUTION DE SOURCES PONCTUELLES

[10] G. Bienvenu "Expérimentation du traitement sonar adaptatif à large bande" Rapport de synthèse finale Marché DRME n° 74/221 Déc. 1974

[11] G. Bienvenu "Traitement optimal en écoute passive" Rapport d'étude Marché DRME n° 73/600 Juin 1974

Figure 1 : Réponse en fonction du gisement, à deux sources dans les gisements 0° et 13° du traitement optimal avec deux antennes de pupilles égales en longueur d'onde et constituées de 6(a) et 11(b) capteurs. Le bruit de fond est "sphérique".

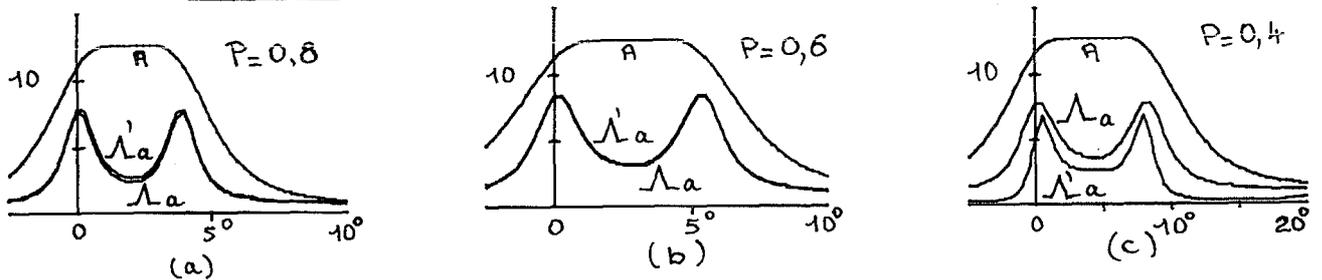
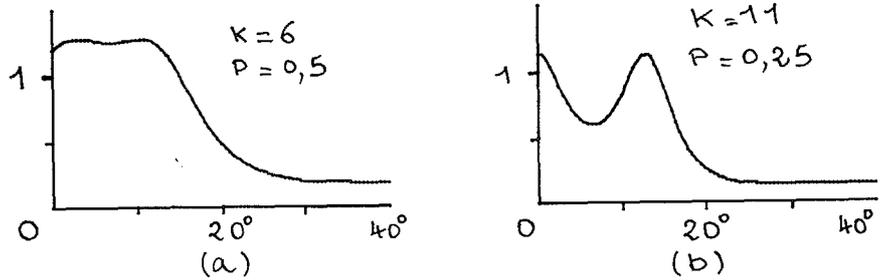


Figure 2 : Réponses, en fonction du gisement, à deux sources (rapports signal à bruit égaux à 1) de l'antenne optimale (A), du test de détection exact ( $\Lambda_a$ ) et du test de détection appliqué ( $\Lambda_a'$ ) en supposant le bruit de fond indépendant alors qu'il est du type "sphérique"

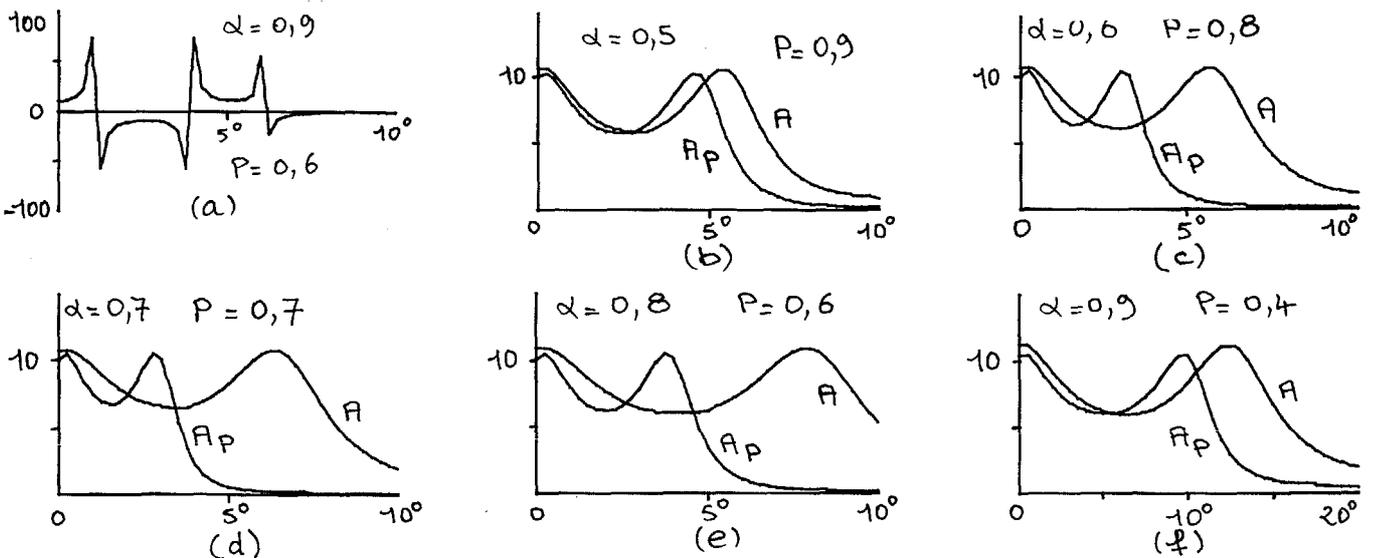
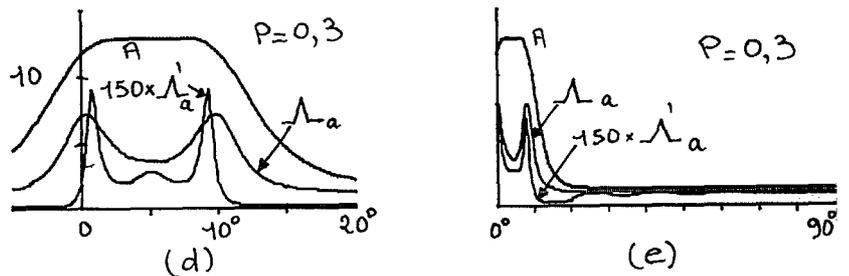
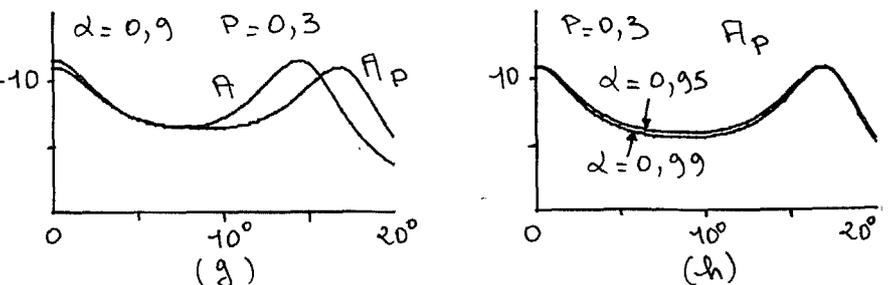


Figure 3 : Réponses, en fonction du gisement, à deux sources (rapports signal à bruit égaux à 1), de l'antenne optimale (A) et de l'antenne optimale modifiée par la méthode de Pizarenko avec coefficient  $\alpha$  ( $A_p$ ) en supposant le bruit de fond indépendant alors qu'il est du type "sphérique".



INFLUENCE DE LA COHERENCE SPATIALE DU BRUIT DE FOND SUR LA RESOLUTION DE SOURCES PONCTUELLES

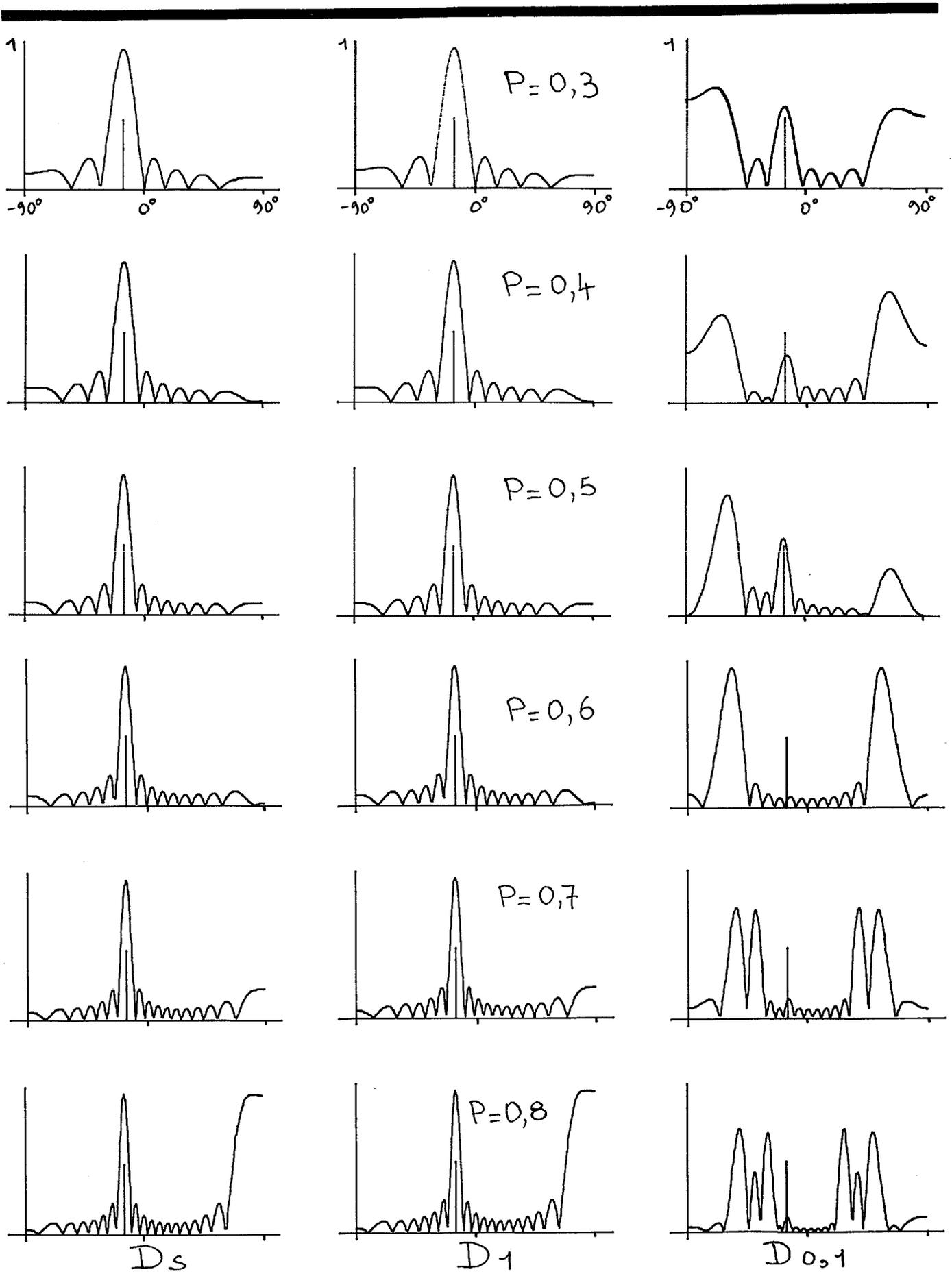


Figure 4 : Diagramme en fonction du gisement du vecteur direction de la source ( $D_s$ ) et des vecteurs propres qui correspondent à la valeur propre maximum de la matrice des densités spectrales du bruit de fond "circulaire" et d'une source (gisement :  $-15^\circ$ ) de rapport signal à bruit 1 ( $D_1$ ) et 0,1 ( $D_{0,1}$ )

