

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

PROBLEMES LIES A L'ESTIMATION D'UNE MATRICE DE DENSITE SPECTRALE.

Claudine TURCAT

Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques (Associé au C.N.R.S.)
B.P. 15 38040 - GRENOBLE Cedex

RESUME

Dans les problèmes de traitement d'antenne (adaptifs ou non) ou plus généralement dans les traitements spatio-temporels liés à des multi-capteurs, on est rapidement amené à introduire des matrices de densité spectrale. Ces matrices, qui sont théoriquement hermitiennes et définies non négatives, ne peuvent, dans la plupart des cas, qu'être estimées à partir de N signaux connus sur des tranches temporelles de durée finie. Pour estimer un coefficient de cette matrice, nous procédons par la méthode dite du "corrélogramme", c'est à dire par transformation de Fourier de la fonction d'auto ou d'intercorrélation d'un ou de deux signaux, cette fonction de corrélation étant pondérée par une fonction d'apodisation. Dans un premier temps, nous montrons comment une telle fonction peut influencer sur le caractère défini non négatif de la matrice. Dans un second temps, nous évaluons, sous des hypothèses assez générales, les erreurs d'estimation faites sur les coefficients en fonction de la fenêtre d'apodisation, puis leur influence sur le spectre de la matrice. Nous présentons enfin des résultats obtenus à partir de signaux géomagnétiques de type Pc1 (bande de fréquence de 0 à 5 Hz) et effectués en vue d'effectuer une localisation spatiale du signal source, et de déterminer si cette source peut être considérée comme ponctuelle ou étendue.

SUMMARY

In problems about antenna theory (adaptive or not) or more generally in spatial and temporal treatments, matrices of spectral densities are introduced. In theory, these matrices are hermitian and definite non negative, but most of the times they only can be estimated from N signals which are known on temporal windows of finite length. We use the "correlogram" method to estimate the coefficients of this matrix, i.e we apply a Fourier transform to the auto or crosscorrelation function of one or two signals, but previously we multiply the correlation function by a weighting function. In a first part, we show how this weighting function influences the definite non negative character of this matrix. In a second part we evaluate, under rather general hypotheses, the estimation errors of the coefficients dependant upon the weighting function and then their influence upon the spectrum of the matrix. Finally we present results obtained from Pc1 geomagnetic data (frequency-band from 0 to 5 Hz) ; this data has been treated to perform a spatial localisation of a source-signal and to determine if this source could be considered as a punctual or spread source.



1 - INTRODUCTION

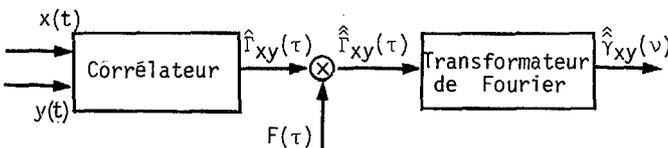
Nous avons cherché à étudier (détection et estimation) une source pouvant être soit ponctuelle, soit étendue, à partir d'observations relevées en 3 stations. L'énergie d'une source commune aux trois stations et l'énergie des bruits propres à chaque station sont liées aux valeurs propres de la matrice interspectrale. Nous avons donc été amenés à étudier le comportement de cette matrice suivant la méthode d'estimation utilisée pour déterminer ses coefficients, et à évaluer des intervalles de confiance pour les valeurs propres calculées.

2 - METHODE D'ESTIMATION DES DENSITES SPECTRALES DE PUISSANCE

Nous rappelons brièvement les deux méthodes d'estimation, utilisant les techniques de Fourier, les plus utilisées :

a/ par corrélogramme

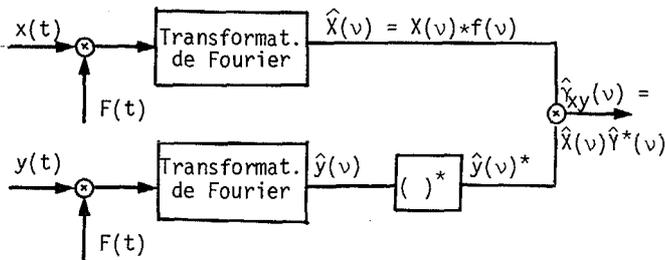
Le schéma représentatif est le suivant :



b/ par périodogramme

Cette méthode, uniquement numérique, est plus facilement utilisée si les signaux ne sont pas sous forme analogique.

Le schéma représentatif est le suivant :



Dans les deux schémas, les fonctions $F(\tau)$ qui interviennent sont des fonctions d'apodisation ou "fenêtres". Nous ne considérerons ici que des fonctions réelles et paires, de support $[-\tau_m, +\tau_m]$, donc ayant pour transformées de Fourier $f(v)$ des fonctions réelles et paires, et en particulier :

(1) fonction porte

$$F(\tau) = 1 \quad \text{si } \tau \in [-\tau_m, +\tau_m]$$

(2) fenêtre de Bartlett ou fonction triangle

$$F(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_m} \quad \text{si } \tau \in [-\tau_m, +\tau_m]$$

(3) fenêtre de Hanning ou fonction \cos^2

$$F(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \tau}{\tau_m} \right) = \cos^2 \frac{\pi \tau}{2\tau_m}$$

(4) fenêtre en \cos^4

$$F(\tau) = \cos^4 \frac{\pi \tau}{2\tau_m} \quad \text{si } \tau \in [-\tau_m, +\tau_m]$$

Dans la suite, nous n'utiliserons que la méthode d'estimation par corrélogramme, le corrélateur utilisé étant le corrélateur numérique construit au CEPHAG. De plus, le signal sur la voie i sera noté $x_i(t)$ et sera considéré comme une réalisation particulière d'une fonction aléatoire réelle $X_i(t)$, supposée ergodique, stationnaire et gaussienne à l'ordre deux.

3 - CARACTERE DEFINI NON-NEGATIF DE LA MATRICE DE DENSITE SPECTRALE ESTIMEE.

La matrice $[\Gamma(v)]$ des densités spectrales exactes est hermitienne, définie non négative et donc ses valeurs propres sont réelles et positives ou nulles. Il semble clair que pour que la matrice interspectrale estimée $[\hat{\Gamma}(v)]$ soit une estimation acceptable de $[\Gamma(v)]$, elle garde la propriété d'être définie non négative.

3.1 - Cas théorique où nous avons les valeurs exactes des fonctions de corrélation.

Dans ce cas, chaque d.s.p.c. estimée sera :

$$\hat{\gamma}_{ij}(v) = \gamma_{ij}(v) * f(v)$$

où $\gamma_{ij}(v) \iff \Gamma_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t)x_j(t+\tau)dt$

Nous voulons que pour tout vecteur x $\tilde{x}^T[\hat{\Gamma}(v)]x \geq 0$ c'est-à-dire :

$$\sum_{k,1} x_k^* \hat{\gamma}_{k,1}(v) x_1 \geq 0$$

$$\left(\sum_{k,1} x_k^* \gamma_{k,1}(v) x_1 \right) * f(v) \geq 0$$

Dans la parenthèse, nous reconnaissons la forme bilinéaire $g(v) = \tilde{x}^T.[\Gamma(v)]x$ qui est positive ou nulle, donc nous voulons une fenêtre d'apodisation telle que :

$$g(v)*f(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v-\alpha)f(\alpha)d\alpha$$

soit positif ou nul.



Une condition suffisante pour que ceci soit vérifié est que $f(v)$ soit positive ou nulle à toute fréquence. En particulier si $f(v) = |h(v)|^2$, donc si $F(\tau) = H(\tau) \cdot H(\tau)$, ceci sera vérifié. Parmi les 4 types de fonction d'apodisation utilisées, seules les fenêtres de Bartlett et la fenêtre en \cos^4 ont des transformées de Fourier toujours positives.

Cette condition est également nécessaire si on veut que les densités spectrales estimées soient toujours positives ou nulles, quelque soit la forme de $\gamma_{ij}(v)$.

3.2 - Cas réel ou nous avons des valeurs estimées des fonctions de corrélation.

Dans ce cas, nous avons :

$$\hat{r}_{ij}(\tau) = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) x_j(t+\tau) dt \right\}$$

où $\{-\}$ représente une moyenne d'ensemble de $n = BT$ réalisations,

et la matrice spectrale estimée est

$$[\hat{F}(v)] = [\hat{\gamma}_{ij}(v)]$$

où $\hat{\gamma}_{ij}(v) \iff \hat{r}_{ij}(\tau) \cdot F(\tau)$

Il est maintenant difficile de distinguer les erreurs dues à la méthode d'estimation des fonctions de corrélation et celles dues aux fonctions de pondération.

Il est connu que pour une valeur $BT = 1$ l'erreur commise sur $\hat{\gamma}_{ii}(v)$ peut être de 100 % donc il peut arriver que $\hat{\gamma}_{ii}(v)$ soit négatif pour une réalisation. La moyenne effectuée sur BT réalisations a pour but de diminuer les fluctuations statistiques des estimateurs, et donc de conserver au mieux le caractère positif des densités spectrales, et le caractère défini-positif de la matrice interspectrale. Nous remarquons juste que pour des $BT \geq 5$ et des fonction $F(v)$ vérifiant les conditions du § précédent, nous avons toujours obtenu des matrices interspectrales définies positives.

4 - INTERVALLE DE CONFIANCE POUR LES VALEURS PROPRES.

Pour déterminer un intervalle de confiance pour les valeurs propres calculées, il est nécessaire de connaître l'incertitude sur chacun des coefficients de la matrice interspec-

trale, puis d'étudier comment ces erreurs d'estimation se répercutent sur le spectre de la matrice.

4.1 - Intervalle de confiance des coefficients de la matrice interspectrale.

Nous reprenons ici des résultats obtenus au CEPHAG par A. KNOB [3] et qui chiffrent les erreurs commises sur chaque coefficient, lorsque $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont considérés comme des réalisations particulières de fonctions aléatoires $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, supposées réelles, ergodiques, stationnaires et gaussiennes à l'ordre deux. On chiffrera uniquement les erreurs statistiques de l'estimation, les erreurs dues à la quantification étant faibles devant les erreurs statistiques. Les coefficients de la matrice sont obtenus en calculant les fonctions de corrélation à partir de tranches temporelles de longueur T , puis en les multipliant par une "fenêtre" de support $[-\tau_m, +\tau_m]$, et enfin en prenant les transformées de Fourier.

A. KNOB a calculé dans le cas général la variance du module et de la phase de la DSPC estimée. Ses résultats se simplifient en se plaçant dans le cas particulier suivant :

- $x(t)$ est un signal $s(t)$
- $y(t)$ est obtenu à partir de $s(t)$ par filtrage linéaire stationnaire.

A ces deux signaux s'ajoutent des bruits centrés, large-bande devant le spectre de $s(t)$ et décorrélés du signal $s(t)$, d'où le modèle suivant :

$$\begin{cases} x(t) = s(t) + b_x(t) \\ y(t) = g[s(t)] + b_y(t) \end{cases}$$

Si le gain complexe du filtre est $G(v)$, et en supposant que le signal et le signal filtré ont des d.s.p. localement constantes autour d'une fréquence v tant que les lobes latéraux de la fenêtre spectrale utilisée ne sont pas négligeables, on obtient :

$$\text{Var}\{|\hat{\gamma}(v, F_T)|\} = \frac{\tau_m}{T} \cdot K_f \cdot |G(v)|^2 \gamma_S(v) \left[1 + \frac{1}{|c(v)|^2} \right]$$

où τ_m : support de la fenêtre

T : fenêtre temporelle sur laquelle sont connues $x(t)$ et $y(t)$



$c(v)$: coefficient de cohérence

$$c(v) = \frac{|\gamma_{xy}(v)|}{\sqrt{\gamma_x(v)} \cdot \sqrt{\gamma_y(v)}}$$

K_f : coefficient qui dépend de la fenêtre utilisée :

$$K_f = \frac{1}{2\tau_m} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(v)|^2 dv = \frac{1}{2\tau_m} \int_{-\tau_m}^{+\tau_m} |F(\tau)|^2 d\tau$$

En définissant la fluctuation relative ε à une fréquence donnée pour un choix de fenêtre par :

$$\varepsilon(v, F_T) = \frac{(\text{Var}\{|\hat{\gamma}(v, F_T)|\})^{1/2}}{E\{|\hat{\gamma}| \}} \quad (1)$$

on obtient :

$$\varepsilon(v, F_T) = \sqrt{K_f} \cdot \frac{1}{\sqrt{T/\tau_m}} \cdot \left(1 + \frac{1}{|c(v)|^2}\right)^{1/2} \quad (2)$$

Le calcul des coefficients K_f , pour les différents types de fenêtres donne :

Fenêtre	K_f	$\sqrt{K_f}$
(1) porte	1	1
(2) fenêtre de Bartlett	0.333	0.58
(3) fenêtre de Hanning (\cos^2)	0.375	0.61
(4) fenêtre en \cos^4	0.273	0.52

On peut remarquer qu'il n'existe pas de relation directe entre le coefficient K_f et l'élargissement du lobe central de la fenêtre dans le domaine des fréquences, puisque dans le cas (3) K_f est supérieur au coefficient trouvé dans le cas (2). Ce coefficient semble donc être lié également à l'amplitude des lobes secondaires.

La fluctuation relative sera évidemment la plus faible possible lorsque le coefficient de corrélation sera égal à 1, et dans ce cas elle s'exprimera par :

$$\varepsilon(v, F_T) = \sqrt{K_f} \cdot \frac{1}{\sqrt{T/2\tau_m}}$$

Dans les cas pratiques que nous traitons, les hypothèses de signal filtré par un filtre stationnaire sont acceptables et les coefficients de la matrice interspectrale seront considérés avoir pour erreurs relatives la fluctuation trouvée ; les erreurs absolues sont donc beaucoup plus grandes quand les modules des DSFC seront grands.

4.2 - Intervalle de confiance des valeurs propres de la matrice interspectrale.

La matrice interspectrale théorique $[\Gamma(v)]$ ne peut être obtenue et seule la matrice estimée $[\hat{\Gamma}(v)]$ est connue. Nous considérons que $[\Gamma(v)] = [\hat{\Gamma}(v)] + [E(v)]$ où $[E(v)]$ est la matrice des erreurs.

Nous rappelons un théorème tiré de [6], que nous utiliserons dans la suite :

Théorème : Si A et A+E sont des matrices hermitiennes ayant respectivement pour valeurs propres $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_n$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, alors,

pour tout $i = 1, \dots, n$ $|\lambda_i - \mu_i| \leq \|E\|_2$
où $\|E\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ex\|_2 = [\rho(E^T \cdot E)]^{1/2}$

(On rappelle que le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice A est le module de la plus grande valeur propre de A).

Dans le cas que nous considérons ici, la matrice d'erreur $[E(v)]$ a des coefficients $e_{ij}(v)$ proportionnels aux coefficients estimés (cf formule 1)

$$e_{ij}(v) = \varepsilon(v, F_T, c_{ij}(v)) \cdot \hat{\gamma}_{ij}(v)$$

Nous prendrons donc comme matrice d'erreur, une matrice proportionnelle à $[\hat{\Gamma}(v)]$, le coefficient de proportionnalité choisi étant le plus grand des coefficients $\varepsilon(v, F_T, c_{ij}(v))$, c'est-à-dire celui obtenu pour la plus faible valeur des $c_{ij}(v)$

$$[E(v)] = \varepsilon(v, F_T, c(v)) \cdot [\hat{\Gamma}(v)]$$

Nous aurons alors $E^T \cdot E = \varepsilon^2(v, F_T) \cdot [\hat{\Gamma}(v)]^T \cdot \hat{\Gamma}(v)$ d'où $(\rho([E^T E]))^{1/2} = \varepsilon \cdot \rho(\hat{\Gamma})$, et la plage d'erreur entre les valeurs propres calculées $\{\lambda_i\}$ et les valeurs propres réelles $\{\mu_i\}$ sera :

$$|\lambda_i - \mu_i| \leq \max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j| \cdot \varepsilon(v, F_T)$$

Remarque :

La borne d'erreurs que nous prenons est probablement supérieure aux erreurs réelles, mais elle évite de refaire un calcul de valeurs propres pour la matrice d'erreur $[E(v)]$.

5 - RESULTATS PRATIQUES

5.1 - Position du problème

Nous avons a traiter des signaux géomagnétiques enregistrés en 3 stations. Les signaux $s(t)$ de type Pc1, situés dans la bande de fréquence de 0 à 2 Hz frappent l'ionosphère en un point source S généralement à haute latitude, puis se propagent à travers l'ionosphère vers les stations au sol S_1, S_2, S_3 . Les trajets SS_j sont assimilables à des filtrages agissant sur $s(t)$, donc les signaux enregistrés sont de la forme : $G_i[s(t)] + b_i(t)$ où $b_i(t)$ représente le bruit géomagnétique et le bruit d'enregistrement.

5.2 - Résultats obtenus

Les fonctions de corrélation ont été calculées avec des rapport $\frac{T}{2\tau_m} = 10$ (= produit BT) ; nous donnons dans ce cas les fluctuations relatives en fonction du coefficient de corrélation et de la fenêtre utilisée :

fenêtre \ ϵ c(v)	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
(1)	0.5	0.43	0.39	0.36	0.33	0.32
(2)	0.29	0.25	0.22	0.20	0.19	0.18
(3)	0.31	0.26	0.24	0.22	0.20	0.19
(4)	0.26	0.22	0.20	0.19	0.17	0.16

Nous donnons également les valeurs propres calculées des matrices interspectrales, à 3 fréquences consécutives, et en fonction de la fenêtre utilisée sur la fonction de corrélation. Le calcul des valeurs propres a été effectué en utilisant des programmes qui permettent la tridiagonalisation de $[\hat{F}(v)]$ puis calculent le spectre par la méthode de Rutishauser accélérée. Les valeurs propres sont données dans l'ordre obtenu à la fin des calculs (voir tableau suivant).

Ces fréquences ont été choisies car, dans ces cas-là, les coefficients de cohérence sont au moins égaux à 0.7, ce qui signifie que nous ne sommes pas uniquement en présence de bruit.

Nous constatons que nous trouvons des valeurs propres négatives dans les cas (1) et (3), ce qui, d'après le paragraphe 2 n'était pas impossible.

	$v=1.53$	$v=1.545$	$v=1.56$
porte (1)	41.2 -14.2 2531.6	39.3 -13.7 1683.3	-4.2 18.4 403.2
Bartlett (2)	8.0 40.3 1850.2	2.2 42.6 1451.6	5.8 22.8 588.9
Hanning (3)	1.7 39.8 1919.9	-1.9 43.7 1556.7	2.8 20.1 629.8
Hamming (4)	10.2 40.9 1709.0	1.6 40.7 1410.6	3.7 26.3 736.4

5.3 - Interprétation des résultats

Pour avoir les fluctuations relatives dans chacun des cas, nous avons besoin de la valeur du coefficient de cohérence ; nous donnons les valeurs des coefficients $\hat{c}(v) = \inf_{i,j} \hat{c}_{ij}(v)$ dans le tableau suivant :

	$v=153$ Hz	$v=1.545$ Hz	$v=1.56$ Hz
(1)	0.9	0.92	0.74
(2)	0.75	0.77	0.67
(3)	0.8	0.80	0.78
(4)	0.7	0.75	0.72

Nous en déduisons la valeur $\Delta\lambda$ des plages d'erreur autour de chaque valeur propre calculée, à chaque fréquence :

$$\Delta\lambda = \epsilon \sup_{i=1,3} |\lambda_i|$$

D'où le tableau suivant :

	$v=1.53$ Hz	$v=1.545$ Hz	$v=1.56$ Hz
(1)	835	555	153
(2)	388	305	135
(3)	422	342	138
(4)	341	268	147

Il est bien clair que, vu les incertitudes trouvées, les deux valeurs propres les plus faibles n'ont aucune signification, et peuvent même être considérées comme nulles.



Dans ce cas, seule la plus grande valeur propre garde une signification et comme l'énergie de la partie du signal reçue par les 3 capteurs à la fois est proportionnelle à $\lambda_1 - \lambda_2$, tandis que la partie reçue par 2 capteurs seulement est proportionnelle à $\lambda_2 - \lambda_3$ et le bruit propre à λ_3 , nous pouvons conclure qu'il existe un signal reçu à la fois par les 3 capteurs et qui contient au moins 80 % de l'énergie totale.

En conclusion, nous pouvons chercher à donner un résultat unique pour la plus grande valeur propre calculée, à une fréquence donnée, soit $\hat{\lambda}_1(\nu)$. Actuellement, nous disposons à toute fréquence ν , de 4 valeurs propres calculées $\lambda_1^i(\nu)$ qui ont des variances d'erreurs inégales. Il semble donc indiqué d'estimer $\hat{\lambda}_1(\nu)$ à partir des $\lambda_1^i(\nu)$ par une méthode des moindres carrés pondérés, d'où :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_1^i(\nu)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Nous trouverons alors, aux trois fréquences considérées :

	$\nu_1=1.53$ Hz	$\nu_2=1.545$ Hz	$\nu_3=1.56$ Hz
$\hat{\lambda}_1(\nu)$	1856	1480	593

Nous constatons que la valeur propre λ_1^i la plus proche de $\hat{\lambda}_1$ a été obtenue en utilisant la fenêtre de Bartlett.

CONCLUSION

Les matrices de densités spectrales constituent un outil puissant pour les études théoriques en traitement de signal. Nous nous sommes ici intéressés aux problèmes numériques liés au traitement de ces matrices dans le but d'une localisation spatiale énergétique des signaux. Nous concluons que pour que la matrice interspectrale estimée soit définie positive, il est suffisant de multiplier les fonctions de corrélation réelles par une fonction d'apodisation réelle, paire et dont la transformée de Fourier reste positive ou nulle à toute fréquence. Par contre, les erreurs statistiques faites sur chaque coefficient entraî-

nent des fluctuations sur les valeurs propres qui dépendent de la fenêtre utilisée. Parmi les fenêtres étudiées, celle qui conduit aux erreurs les plus faibles est la fenêtre de Hamming en \cos^4 , mais celle de Bartlett reste très acceptable. Un prolongement de ce travail sera d'étudier les vecteurs propres associés aux valeurs propres significatives, ce qui permettra de mieux définir les relations de filtrage existant entre les observations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BATH : Spectral analysis in geophysics Elsevier 1974
- [2] DURAND : Solution numériques des équations algébriques Tome 2 - Masson 1972
- [3] A. KNOB : Thèse de Docteur Ingénieur Université de Grenoble. Mars 1977
- [4] J.D. MEANS : Use of the three dimensional covariance matrix in analysing the polarization properties of plane waves. Journ. of Geophysical Research, Vol 77 n° 28, Oct. 1972 pp 5551-5559
- [5] A.V. OPPENHEIM - R.W. SCHAFFER : Digital signal processing Prentice Hall 1975
- [6] ORTEGA : Numerical analysis. A second course.
- [7] Van SCHOONEVELD - P.J.A. PRINSEN : Spectrum analysis NATO Advanced Study Institute. La Spezia 1976.