

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

LES VARIABLES DE LAGRANGE EN ACOUSTIQUE.

BERNARD POIREE

CETHEDEC

26, boulevard Victor

75996 PARIS ARMEES

RESUME

SUMMARY

Les variables de Lagrange, qui permettent de suivre les particules dans leur mouvement, sont bien adaptées aux problèmes de propagation dans les écoulements et avec frontières en mouvement.

Après avoir donné les équations de la mécanique des fluides parfaits en variables de Lagrange (chapitre I), nous les perturbons pour obtenir les équations du champ acoustique superposé à un écoulement de fluide parfait (chapitre II).

Nous particulariserons ensuite dans les cas suivants :

chap. III - équations de passage à travers un dioptré

chap. IV - établissement de l'équation de Earnshaw

chap. V - propagation du champ acoustique lagrangien linéarisé dans un écoulement incompressible lentement variable de fluide lentement non homogène, cas unidimensionnel. Solution de l'acoustique géométrique. Application à la propagation dans une onde interne de gravité.

The Lagrangian variables, which allow to follow the particles during their motion, are well fitted to the problems of propagation in a flow or with moving boundaries.

We give here the equations of the mechanics of a perfect fluid in Lagrangian variables (chap. I) and we perturb them in order to obtain the equations for a sound wave superimposed upon a perfect fluid flow (chap. II).

Then we consider the following particular cases :

chap. III - jump conditions through an interface

chap. IV - setting up Earnshaw's Equation

chap. V - propagation of a linearized Lagrangian sound wave in the quasi steady one dimensionnal flow of a quasi homogeneous incompressible fluid. Geometrical acoustics solution. Application to the propagation in an internal gravity wave.



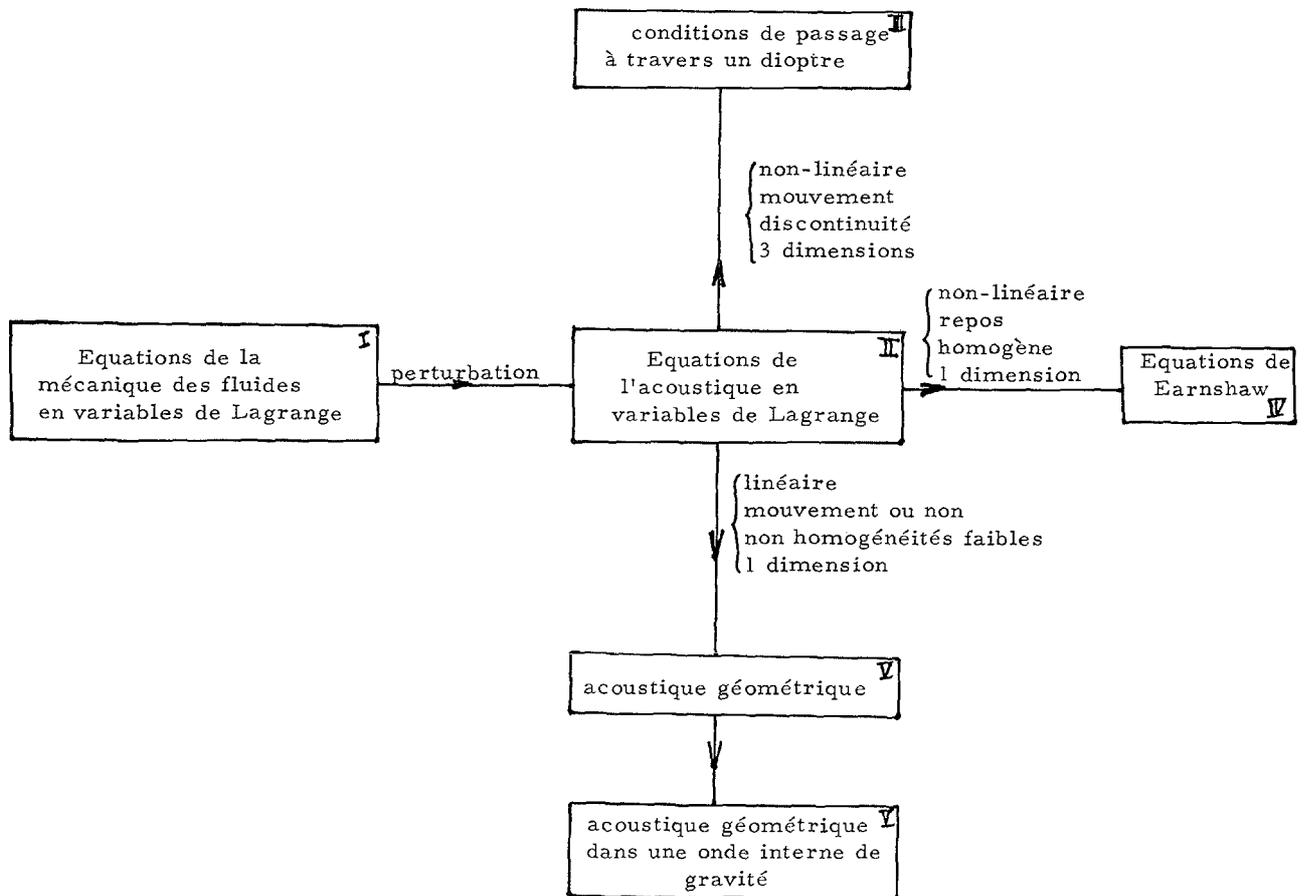
LES VARIABLES DE LAGRANGE EN ACOUSTIQUE.

- (\vec{a}, t) variables de Lagrange
- (\vec{x}, t) variables d'Euler
- $\vec{\chi}_E(\vec{a}, t)$ mouvement non perturbé ou mouvement d'entraînement
- $\vec{\chi}(\vec{a}, t)$ mouvement perturbé
- ρ masse volumique
- \vec{u} vitesse
- p pression
- S entropie
- $\vec{w} = (\rho, \vec{u}, p, S)$

PRINCIPALES NOTATIONS

- $\vec{w}(\vec{a}, t)$ champ exprimé en variables de Lagrange
- $\vec{w}(\vec{x}, t)$ champ exprimé en variables d'Euler
- $\widehat{w}(\vec{a}_A, t_A)$ champ exprimé en variables sans dimension
- \vec{w}_E champ dans l'écoulement d'entraînement
- \vec{w}_A resp. \vec{w}_A^E champ acoustique lagrangien exprimé en variables de Lagrange, resp. v. d'Euler
- \vec{w}_A resp. \vec{w}_A^E champ acoustique eulérien exprimé en v. de Lagrange, resp. v. d'Euler

PLAN



I- Les équations de la mécanique des fluides parfaits en variables de Lagrange

[1] Germain, p. 109

hypothèses 1 :

- (\vec{a}, t) les variables de Lagrange ; \vec{a} désignant les particules dans la configuration de référence.
- $\vec{w}(\vec{a}, t) = (\rho, \vec{u}, p, S)(\vec{a}, t)$: vecteur représentant l'état du fluide dans la configuration présente où ρ est la masse volumique, \vec{u} la vitesse, p la pression et S l'entropie.
- $\vec{w}_0(\vec{a})$ avec $\vec{u}_0 = 0$: état du fluide dans la configuration de référence.

- l'écoulement :

I.1 $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{a}, t)$ ou $\vec{a} = \vec{\chi}'(\vec{x}, t)$.

Nous écrirons :

I.2 $\vec{w}(\vec{a}, t) = \vec{w}(\vec{\chi}'(\vec{x}, t), t) = \vec{w}(\vec{x}, t)$

pour distinguer le champ écrit en variables de Lagrange (\vec{a}, t) du champ écrit en variables d'Euler (\vec{x}, t) .

configuration de référence

configuration présente au temps t

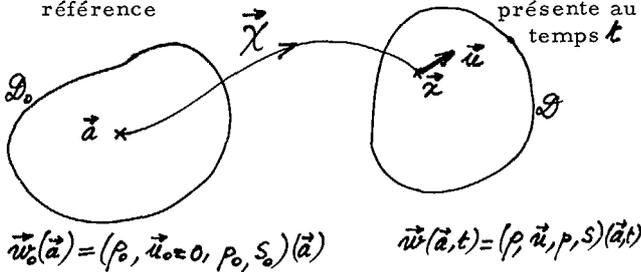


FIG. 1

Les équations de la mécanique des fluides parfaits en variables d'Euler (\vec{x}, t) :

I.3
$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{p} \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla \vec{p} = 0 \\ \frac{dS}{dt} = 0 \end{cases}$$

s'écrivent en variables de Lagrange (\vec{a}, t) :

I.4
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial a_k} \left(J u_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 u_i) + \frac{\partial}{\partial a_k} \left(J p \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ p = \tilde{p}(\rho, S, \vec{a}) \end{cases}$$

où nous avons ajouté l'équation d'état et utilisé l'équation de conservation de la masse écrite sous la forme :

I.5 $J = \det(\partial x_i / \partial a_k) = \rho_0 / \rho$,

J étant le jacobien de la transformation (1-1).

En posant :

I.6
$$\begin{cases} J u_i \partial a_k / \partial x_i = U_k \\ J p \partial a_k / \partial x_i = P_{ik} \end{cases}$$

le système (4) devient :

I.7
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) - \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \vec{u}) + \nabla \cdot \vec{P}^T = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ p = \tilde{p}(\rho, S, \vec{a}) \end{cases}$$

II- Les équations de l'acoustique en variables de Lagrange

hypothèses 2 :

- deux écoulements voisins

II.1 $\vec{x}_E = \vec{\chi}_E(\vec{a}, t)$ et $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{a}, t)$

- les champs dans les écoulements correspondants: $\vec{w}_E(\vec{a}, t)$ dans l'écoulement non perturbé $\vec{\chi}_E$ supposé connu
- $\vec{w}(\vec{a}, t)$ dans l'écoulement perturbé $\vec{\chi}$.

définition 1 :

Le déplacement acoustique lagrangien $\vec{\xi}(\vec{a}, t)$ et le champ acoustique lagrangien $\vec{w}_A(\vec{a}, t)$ seront définis par :



$$\text{II.2} \quad \begin{cases} \mathcal{E} \vec{w}_A^L(\vec{a}, t; \mathcal{E}, \vec{x}_E) = \vec{x}(\vec{a}, t) - \vec{x}_E(\vec{a}, t) \\ \mathcal{E} \vec{w}_A^L(\vec{a}, t; \mathcal{E}, \vec{x}_E) = \vec{w}(\vec{a}, t) - \vec{w}_E(\vec{a}, t) \end{cases}$$

(\mathcal{E} est un paramètre sans dimension qui servira pour la linéarisation)

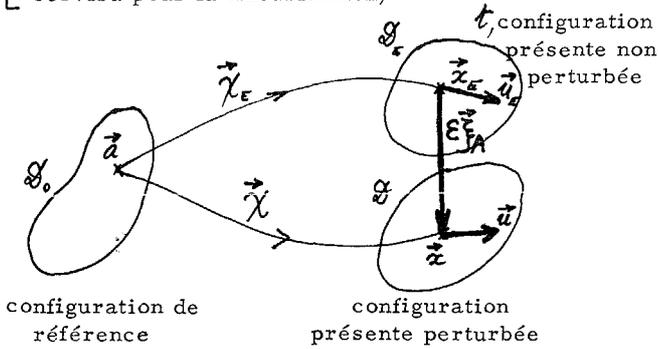


FIG. 2

Interprétation du champ acoustique lagrangien

définition 2 :

Le champ acoustique eulérien sera défini par :

$$\text{II.3} \quad \mathcal{E} \vec{w}_A^E(\vec{x}, t) = \vec{w}(\vec{x}, t) - \vec{w}_E(\vec{x}, t) = \vec{w}(\vec{a}, t) - \vec{w}_E(\vec{a}, t)$$

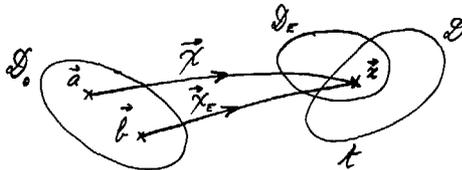


FIG. 3

Interprétation du champ acoustique eulérien

Passage du champ acoustique lagrangien au champ acoustique eulérien :

pour \mathcal{E} petit et les dérivées du champ non perturbé bornées :

$$\text{II.4} \quad \frac{\partial \vec{w}_A^E}{\partial x_{Ei}}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{w}_A^L}{\partial x_i}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{w}_E}{\partial x_{Ei}} \sum_{Ai} + O(\mathcal{E})$$

Les équations (I.7) sont vérifiées par les deux écoulements (II.1). Par soustraction, nous obtenons les équations de l'acoustique dans un fluide parfait :

$$\text{II.5} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0}{\rho_E} \frac{\dot{P}_A^L}{\rho_E + \mathcal{E} \dot{P}_A^L} \right) + \nabla \cdot \vec{U}_A = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \vec{u}_A^L) + \nabla \cdot P_A^T = 0 \\ \frac{\partial \dot{S}_A^L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{S}_A^L(\vec{a}, t) = \dot{S}_A^L(\vec{a}); \text{ on prendra } \dot{S}_A^L(\vec{a}) = 0 \\ \dot{P}_A^L = \tilde{C}^2(\rho_E(\vec{a}, t), S_E(\vec{a}, t), \vec{a}, \mathcal{E} \dot{P}_A^L) \dot{P}_A^L \\ = C^2(\vec{a}, t, \mathcal{E} \dot{P}_A^L) \dot{P}_A^L \end{cases}$$

où \vec{U}_A et P_A sont définis par :

$$\text{II.6} \quad \begin{cases} \mathcal{E} U_{A\alpha} = J u_i \partial u_\alpha / \partial x_i - J_E u_{Ei} \partial u_\alpha / \partial x_{Ei} \\ \mathcal{E} P_{Aik} = J p \partial u_i / \partial x_k - J_E p_E \partial u_i / \partial x_{Ei} \end{cases}$$

III- Les équations de passage à travers un dioptre

hypothèses 3 :

- $\phi_0(\vec{a}, t) = 0$ l'équation d'une surface de discontinuité Σ_0 dans la configuration de référence, de normale $\vec{m}_0 = \nabla \phi_0 / |\nabla \phi_0|$, de vitesse normale $W_{n_0} = -\partial \phi_0 / \partial t \cdot |\nabla \phi_0|$.
- les dérivations dans II.5 sont prises au sens des distributions.

Les équations aux discontinuités sont :

$$\text{III.1} \quad \begin{cases} \left[- \frac{\rho_0 \dot{P}_A^L W_{n_0}}{\rho_E (\rho_E + \mathcal{E} \dot{P}_A^L)} + \vec{U}_A \cdot \vec{m}_0 \right]_{\Sigma_0} = 0 \\ \left[- \rho_0 \vec{u}_A^L W_{n_0} + P_A^T \cdot \vec{m}_0 \right]_{\Sigma_0} = 0 \\ \left[\dot{S}_A^L \right]_{\Sigma_0} W_{n_0} = 0 \end{cases}$$

où $\llbracket \cdot \rrbracket_{\Sigma_0}$ désigne le saut à travers Σ_0 .

Dans le cas particulier du dioptre, Σ_0 toujours constituée des mêmes particules, a pour équation $\phi_0(\vec{a}) = 0$, donc une vitesse nulle : $W_{n_0} = 0$. Les équations (III.1) deviennent :

$$\text{III.2} \quad \begin{cases} \left[\vec{U}_A \cdot \vec{m}_0 \right]_{\Sigma_0} = 0 \\ \left[P_A^T \cdot \vec{m}_0 \right]_{\Sigma_0} = 0 \\ \left[\dot{S}_A^L \right]_{\Sigma_0} \text{ quelconque.} \end{cases}$$

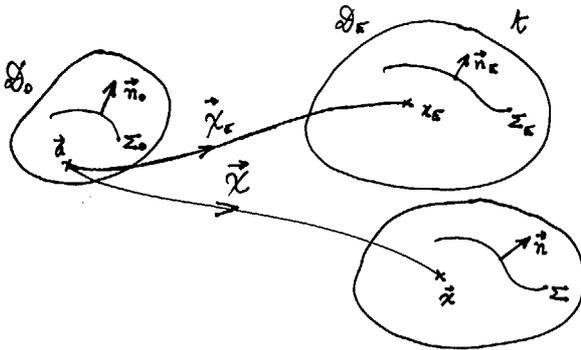


FIG. 4 - représentation d'un diopre dans les différentes configurations.

Dorénavant, nous abandonnons l'entropie et gardons une seule dimension d'espace.

IV- Etablissement de l'équation de Earnshaw

[2] Beyer et Lechter.

hypothèses 4 :

IV.1
$$\begin{aligned} -x_E &= a & x &= \chi(a, t) \\ -\vec{w}_E(a, t) &= (\rho_E, u_E, p_E, S_E) = (\rho_{00}, 0, p_{00}, S_{00}) = \vec{w}_{00} \end{aligned}$$

où ρ_{00} , p_{00} et S_{00} sont des constantes.

II.2.2 et II.6 montrent que pour une dimension spatiale $U_A = \dot{u}_A$, $P_A = \dot{p}_A$.

II.2.1 devient $\epsilon \sum_{A,a} = x - a$ et en dérivant :

IV.2
$$\partial x / \partial t = \epsilon \partial \sum_{A,a} / \partial t = \epsilon \dot{u}_A$$

Reportant dans (II.5) et intégrant (II.5.1) :

IV.3
$$\begin{cases} \frac{\dot{p}_A}{\rho_{00} + \epsilon \dot{p}_A} + \sum_{A,a} = 0 \\ \rho_{00} \sum_{A,a,tt} + \dot{p}_A, a = 0 \\ \dot{p}_A, a = \mathcal{C}^2 (\rho_{00} + \epsilon \dot{p}_A, S_{00}) \dot{p}_A, a \end{cases}$$

avec $\mathcal{C}^2 = \dot{c}^2 + \partial \dot{c}^2 / \partial (\epsilon \dot{p}_A) \epsilon \dot{p}_A$ où \dot{c}^2 est défini par (II.5.4) pour les milieux homogènes :

IV.4
$$\dot{p}_A = \dot{c}^2 (\rho_{00}, S_{00}, \epsilon \dot{p}_A) \dot{p}_A$$

Du système (IV.3), on tire l'équation de Earnshaw

IV.5
$$\sum_{A,tt} - \mathcal{C}^2 [\rho_{00} (1 + \epsilon \sum_{A,a})^{-2}, S_{00}] (1 + \epsilon \sum_{A,a})^{-2} \sum_{A,aa} = 0$$

Cette équation est une des équations de base de l'acoustique non linéaire dans un fluide unidimensionnel, homogène et au repos.

V- Propagation du champ acoustique lagrangien linéarisé dans un écoulement incompressible lentement non homogène, cas unidimensionnel. Solution de l'acoustique géométrique. Application à la propagation dans une onde interne de gravité.

hypothèses 5 :

V.1
$$\begin{aligned} \vec{w}_0(a) &= \widehat{w}_0 \left(\frac{a}{\lambda} \right) = (\rho_0, u_0=0, p_0, S_0) \left(\frac{a}{\lambda} \right) \\ \vec{w}_E(a, t) &= \widehat{w}_E \left(\frac{a}{\lambda}, \frac{t}{T} \right) = (\rho_0, u_E, p_E, S_0) \left(\frac{a}{\lambda}, \frac{t}{T} \right) \\ \epsilon &= 0 \text{ dans (II.5), } \sum_{A,a} \text{ et } \dot{w}_A \text{ (II.2)} \end{aligned}$$

λ représente la longueur caractéristique des inhomogénéités spatiales du milieu et de l'écoulement. T représente le temps caractéristique de la variation temporelle de l'écoulement.

(II.5) s'écrit :

V.2
$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{p}_A}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{a}{\lambda} \right) \frac{\partial \dot{u}_A}{\partial a} = 0 \\ \rho_0 \left(\frac{a}{\lambda} \right) \frac{\partial \dot{u}_A}{\partial t} + \frac{\partial \dot{p}_A}{\partial a} = 0 \\ \dot{p}_A = c_0^2 \left(a/\lambda, t/T \right) \dot{p}_A \end{cases}$$

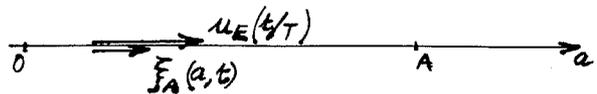


FIG. 5 - champ acoustique dans un écoulement incompressible. Cas unidimensionnel.

V.1 Milieu homogène et mouvement uniforme :

hypothèses 5.1 :

$$\begin{aligned} \widehat{w}_0(a/\lambda) &= \vec{w}_{00} \\ c_0^2(a/\lambda, t/T) &= c_{00}^2 \\ \text{où } \vec{w}_{00} \text{ et } c_{00}^2 &\text{ sont des constantes.} \end{aligned}$$



Le système (V.2) devient :

$$V.4 \quad \begin{cases} \frac{\partial \overset{L}{P}_A}{\partial t} + \rho_{00} \frac{\partial \overset{L}{u}_A}{\partial a} = 0 \\ \rho_{00} \frac{\partial \overset{L}{u}_A}{\partial t} + \frac{\partial \overset{L}{P}_A}{\partial a} = 0 \\ \overset{L}{P}_A = c_{00}^2 \overset{L}{p}_A \end{cases}$$

Il admet la solution :

$$V.5 \quad \begin{pmatrix} P_A \\ u_A \end{pmatrix} (a, t) = \begin{pmatrix} P_{A00} \\ u_{A00} \end{pmatrix} e^{i(k_{00} a - \omega_{00} t)}$$

où $P_{A00}, u_{A00}, \omega_{00} = 2\pi/\tau_{00}, k_{00} = 2\pi/\lambda_{00}$ sont des constantes réelles vérifiant :

$$\omega_{00}^2 = c_{00}^2 k_{00}^2 \quad P_A = \rho_{00} u_A / c_{00}$$

V.2 Solution de l'acoustique géométrique :

hypothèses 5.2 :

$$V.6 \quad \epsilon_1 = \lambda_{00}/\lambda \rightarrow 0, \quad \epsilon_2 = \tau_{00}/T \rightarrow 0$$

Nous prendrons $\epsilon_1 = \epsilon_2$ et chercherons une solution de (V.2), proche de (V.5), de la forme :

$$\begin{pmatrix} P_A \\ u_A \end{pmatrix} (a, t, a/\lambda, t/T) =$$

$$V.7 \quad \sum_{n=0}^N \epsilon_1^n \begin{pmatrix} P_{An} \\ u_{An} \end{pmatrix} \left(\frac{a}{\lambda}, \frac{t}{T} \right) e^{i\epsilon_1^{-1} \phi \left(\frac{a}{\lambda}, \frac{t}{T} \right)}$$

où P_{An}, u_{An} et ϕ sont d'ordre 1 ainsi que leurs dérivées. Ce sont donc, comme ρ_0 et c_0^2 , des fonctions qui varient lentement sur une longueur d'onde et sur une période.

En reportant (V.7) dans (V.2) et identifiant aux différents ordres en ϵ , on obtient les équations vérifiées par les amplitudes P_{An}, u_{An} et la phase ϕ .

Nous ne nous intéresserons qu'à la phase, donnée, en identifiant à l'ordre zéro, par l'équation de l'eikonale :

$$V.8 \quad n_0^2 \omega_0^2 = k_0^2$$

avec

$$V.9 \quad \begin{cases} n_0^2(a/\lambda, t/T) = c_{00}^2 / c_0^2 \text{ indice de réfraction} \\ \omega_0 = -\partial \phi / \partial (t/T) \\ k_0 = \partial \phi / \partial (a/\lambda) \end{cases}$$

La résolution de (V.8) donne le déphasage entre deux points O et A , à un instant fixé ;

$$V.10 \quad \begin{aligned} \phi_{OA} &= \int_0^A \partial \phi / \partial (a/\lambda) da = \int_0^A k_0 da \\ &= \int_0^A n_0(a) \omega_0(a) da = c_{00} \int_0^A \frac{\omega_0(a)}{c_0} da \end{aligned}$$

V.3 Propagation acoustique dans une onde interne de gravité :

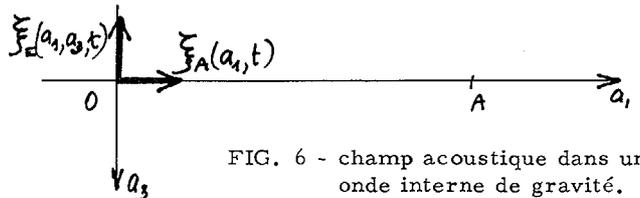


FIG. 6 - champ acoustique dans une onde interne de gravité.

hypothèses 5.3 :

Soit une onde interne de gravité dont le déplacement $\overset{E}{F}$ est vertical et donné par :

$$V.11 \quad \overset{E}{F}(\vec{a}, t) = f(a_3) \sin 2\pi (a_1/\lambda - t/T)$$

où $f(a_3) \ll \lambda$ s'annule sur la surface et sur le fond de la mer.

$$V.12 \quad \begin{aligned} \lambda_0 = 2\pi/k_0 \ll \lambda, \quad \tau_0 = 2\pi/\omega_0 \ll T \\ \lambda_0/\tau_0 \ll c_0, \quad \partial \overset{E}{F} / \partial t \ll c_0 \end{aligned}$$

Avec ces hypothèses, nous pouvons supposer que le milieu reste immobile du point d'émission au point d'observation. La seule incidence de l'onde interne de gravité sera de modifier les caractéristiques du milieu donc l'indice de réfraction.

En supposant les rayons horizontaux, nous sommes ramenés au cas décrit au paragraphe précédent avec absence d'écoulement dans la direction de propagation et fréquence fixe.

Déphasage entre 0 et A quand il n'y a pas d'onde de gravité :

$$V.13 \quad \varphi_{0A} = c_{00} \omega_0 \int_0^A 1/c_0(\vec{a}) da_1$$

Déphasage entre 0 et A quand il y a une onde de gravité :

$$V.14 \quad \varphi_{0A_g} = c_{00} \omega_0 \int_0^A 1/c_{0g}(\vec{a}) da_1$$

où c_{0g} est c_0 en présence de l'onde interne (écoulement d'entraînement).

La présence de l'onde interne de gravité entraîne une différence de déphasage de :

$$V.15 \quad \begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_{0A_g} - \varphi_{0A} \\ &= -\frac{c_{00} \omega_0}{c_0^2} \frac{\partial c_0}{\partial a_3} f(a_3) \frac{A}{2\pi} \left\{ c_0 2\pi \left(\frac{A}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - c_0 2\pi \frac{t}{T} \right\} \end{aligned}$$

Si l'on suppose que $A/\lambda \ll 1$, c'est à dire que le point d'observation n'est pas trop loin (en longueur d'onde de l'onde interne) :

$$V.16 \quad \varepsilon^{-1} \Delta\varphi = -\frac{\omega_0}{c_0^2} A \Delta c_0 \sin \frac{2\pi t}{T} + o\left(\frac{A}{\lambda}\right)$$

$$\text{où } \Delta c_0 = \frac{\partial c_0}{\partial a_3} f(a_3) = c_{0g} - c_0$$

Ce résultat est donné sans démonstration dans [3] Ramsdale (p. 38-1, éq. 5).

Conséquence de l'onde interne de gravité sur la propagation acoustique sous-marine : déplacement des zones de convergence autour d'une position moyenne.

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] P. GERMAIN - Cours de mécanique des milieux continus. Tome 1 Masson 1973
- [2] BEYER et S. V. LETCHER - Physical Ultrasonics. Academic Press 1969
- [3] RAMSDALE - Estimating effects of internal tides on acoustic wave transmission. SACLANTCEN CP N°17 Part 7 p. 38-1