COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

PROPAGATION ALEATOIRE

Recherche d'une solution rigoureuse en milieu stationnaire - Etude de la solution stationnaire

HUBERT DEBART

C.I.T./ALCATEL - Avenue Aristide Briand - 94110 - ARCUEIL -

RESUME

Après un bref rappel des théories connues sur la propagation aléatoire, on développe une méthode d'approche basée sur le développement de l'indice aléatoire du milieu en fonctions certaines.

On retrouve d'abord les résultats de Tchernov sur la variance du champ d'une onde plane monochromatique qui se propage dans un milieu stationnaire. Puis on étudie le régime stationnaire de propagation qui s'établit au bout d'une grande distance, en utilisant une équation de Helmholtz complète (non amputée du laplacien longitidunal), on en déduit la forme limite de la corrélation, les rayons de corrélation limites et l'inclinaison moyenne des rayons ; on étudie la distribution de probabilité limite du champ.

SUMMARY

RANDOM PROPAGATION

Approach to an exact solution in stationary media.
Description of the stationary solution.

After a brief review of the classical approaches to random propagation, a new method is developed, based on an expansion of the random index in certain functions. At first, Tchernov's results on the variance of the field of a random plane monochromatic wave propagation in a stationary medium are re-established.

Then a quantitative description is given of the stationary random field, attained after a long distance of propagation, by using a complete Helmholtz equation (wher account is taken of the longitudinal Laplacien). Among the results can be found : asymptotic shape of correlation, radii of correlation, average slope of rays, distribution of probability of the envelope.

PROPAGATION ALEATOIRE
Recherche d'une solution rigoureuse en milieu stationnaire - Etude de la solution stationnaire

INTRODUCTION -

On a consacré un grand nombre de travaux à l'étude de la propagation d'une onde dans un milieu aléatoire. Le milieu est représenté en général par un indice aléatoire, gaussien, isotrope, stationnaire ou non (modèle de milieu à accroissements stationnaires de Kolmogorov pour l'atmosphère).

Le problème consiste à résoudre l'équation de Helmholtz ; pour une onde monochromatique, elle s'écrit :

$$\Delta\psi + K^2 \left[1 + \mu\right]^2 \psi = 0$$

La méthode la plus ancienne consiste à trouver une solution formelle de cette équation, et à en extraire les valeurs moyennes utiles. (Tatarski, Schmeltzer, Réf. 1 et 2).

Mais cette voie est très difficile au delà d'un certain degré d'approximation ; elle peut être appliquée seulement aux deux premiers termes de perturbation.

On a utilisé plus récemment une méthode dans laquelle on étudie directement des équations de propagation pour les grandeurs moyennes (moments du champ (v. Réf. 3)). Son application est beaucoup plus simple mais son domaine de validité reste le même.

Par ailleurs, l'ensemble de ces méthodes utilise une équation approchée dans laquelle on suppose, que le rayon de corrélation des irrégularités est très grand devant la longueur d'onde. Légitime en optique, cette approximation l'est rarement en acoustique sous-marine, et le comportement des ondes qu'on en déduit est fortement erroné.

On a donc cherché ici une méthode d'approche pouvant fournir une solution exacte de l'équation de propagation aléatoire grâce à une représentation de l'indice aléatoire sous forme d'une somme pondérée de fonctions certaines.

On a commencé par chercher un recoupement de cette méthode d'approche avec les procédés classiques, en retrouvant sous une forme nouvelle la loi de Tchernov sur le comportement d'une onde plane au bout d'une faible longueur de propagation.

Mais on peut en obtenir des résultats nouveaux en caractérisant le régime stationnaire qui s'établit au bout d'une grande longueur de propagation d'une onde plane dans un milieu stationnaire ; cette solution s'établit, physiquement, quand la contribution de la source originale disparaît devant les actions diffusantes du milieu, cumulées sur une grande distance. Ce calcul est fait à partir de l'équation non-tronquée, et permet de voir quelle erreur on commet en se contentant de l'approximation "optique".

I. - REPRESENTATION "PONCTUELLE" D'UNE FONCTION ALEATOIRE.

On essaie de représenter la fonction aléatoire stationnaire qui exprime les variations d'indice du milieu sous forme d'un développement de Taylor, à partir de variables gaussiennes indépendantes. Un tel développement peut être obtenu, pour une fonction unidimensionnelle d'abord, à partir de la représentation de Loeve-Karhunen.

1°) Représentation d'un processus stationnaire unidimensionnel.

On part de l'expression classique de Loeve-Karhunen :

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i f_i(x)$$

d'un tel processus, dont la corrélation $\overline{f(x) f(y)} = C(x, y)$ est donnée.

(les ε_i sont des VA normales et indépendantes, les λ_i des constantes, les f_i des fonctions orthonormales, solutions de :

$$|\lambda_i|^2 f_i(x) = \int_b^a C(x, y) f_i(y)\, dy$$

Si on fait tendre vers 0 l'intervalle (a, b) on a une forme limite de la représentation, qui est :

$$f(x) = \varepsilon_0 F_0(x) + \varepsilon_1 x F_1(x) + \dots + \varepsilon_n x^n F_n(x) + \dots$$

$$(F_n(0) \neq 0 \quad \forall n)$$

Pour une classe assez large de processus, cette représentation limite, qui n'est plus un développement de Loeve-Karhunen, est convergente en probabilité dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

On peut la retrouver directement en remarquant que $\overline{f(0) f(x)} = F_0(x) = C(x)$.

Si on se limite aux fonctions du processus qui sont analytiques (indéfiniment dérivables) on a de même

$$\overline{f'(0) f'(x)} = f'_1(0) f'_1(x) = - C''(x)$$

et donc :

$$f_1(x) = - \frac{C'(x)}{\sqrt{- C''(0)}}$$

Une dérivation de plus fournira :

$$f_2(x) = \frac{C''(x) - C'(0)\, C(x)}{\sqrt{C^{IV}(0) - C''^2(0)}}$$

etc...

à condition que les inégalités :

$$C''(0) < 0$$

$$C^{IV}(0) > C''^2(0)$$

soient vérifiées (elles le sont par les fonctions d'autocorrélation, c'est à dire les fonctions à transformée de Fourier positives).

.../.

PROPAGATION ALEATOIRE
Recherche d'une solution rigoureuse en milieu stationnaire - Etude de la solution stationnaire

Exemples :

a) $C(x) = e^{-x^2}$

donne $f(x) = \sum_0^\infty \frac{2^{n/2}}{\sqrt{n!}} \varepsilon_n x^n e^{-x^2}$

On vérifie instantanément que $\overline{f(x)f(y)} = e^{-(x-y)^2}$ et que la fonction f(x) ainsi représentée converge en probabilité sur $(-\infty, +\infty)$.

b) $C(x) = J_0(x)$

donne $f(x) = \varepsilon_0 J_0(x) + \sqrt{2} \sum_1^\infty \varepsilon_n J_n(x)$

On vérifie que $\overline{f(x)\ f(y)} = J_0(x-y)$ (identité de NEUMANN) et que la représentation est convergente dans les mêmes conditions.

On a donc une représentation de l'ensemble des fonctions du processus qui sont indéfiniment dérivables, à l'aide de variables aléatoires indépendantes et de fonctions non orthogonales sur $(-\infty, +\infty)$.

On peut en tirer un développement de Taylor très facilement.

2°) Processus tridimensionnel

On cherche à représenter l'indice d'un milieu, dont la loi de corrélation est isotrope. Le cas le plus simple est celui d'une loi gaussienne $\sigma^2 e^{-r^2}$ (en prenant le rayon de corrélation comme unité de longueur). On posera

$\mu(\vec{r}) = \sigma M(\vec{r})$, $M(\vec{r})$ étant une variable normale.

Le procédé de développement décrit ci-dessus fournit la représentation :

$$\begin{aligned} M(\vec{r}) = {} & \delta e^{-r^2} + (\varepsilon_1 \sqrt{2} z + \varepsilon_2 \sqrt{2} x + \varepsilon_3 \sqrt{2} y) e^{-r^2} \\ & + (\xi_1 \sqrt{2} z^2 + \xi_2 2 zx + \xi_3 2 zy + \xi_4 \sqrt{2} x^2 + \ldots \\ & + \xi_5 2 xy + \xi_6 \sqrt{2} y^2) e^{-r^2} + (\eta_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} z^3 + \ldots \\ & + 2 \eta_2 z^2 x + 2 \eta_3 z^2 y + \ldots) e^{-r^2} \\ & + \ldots \end{aligned}$$

valable dans les mêmes conditions et convertible en série de TAYLOR tridimensionnelle.

Dans ce développement, les variables

$$\begin{aligned} & \delta ; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \\ & \xi_1, \xi_2, \ldots \\ & \eta_1, \eta_2, \ldots \end{aligned}$$

sont normales et indépendantes.

II. - PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE INDEFINIE DANS UN MILIEU ALEATOIRE STATIONNAIRE.

1°) Equation de propagation

La grandeur caractéristique du champ $\mathcal{E}(\vec{r})$ champ électrique ou pression) est étudiée par référence avec l'onde plane se propageant dans un milieu certain et homogène. On pose :

$\mathcal{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\ e^{iKz}\ e^{-i\omega t}$

L'indice du milieu est : $1 + \mu$, où μ est une variable aléatoire centrée gaussienne, qu'on peut écrire $\mu = \sigma M$ en se référant à une variable normale ($\sigma \ll 1$).

La loi de corrélation de l'indice est supposée isotrope et de la forme e^{-r^2} ; le rayon de corrélation est pris comme unité de longueur.

Dans ces conditions, l'équation de propagation de l'enveloppe s'écrit :

$$2 iK \frac{\partial E}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E + 2 K^2 \mu E = 0$$

en négligeant le terme en μ^2, ce qui est parfaitement légitime.

Deux cas peuvent alors se présenter.

a) L'inclinaison des rayons reste très faible; dans ce cas, on a en particulier $K \gg 1$.

On peut alors écrire

$\left| K \frac{\partial E}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right|$ et négliger ce dernier terme, il reste :

$$2 iK \frac{E}{z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E + 2 K^2 \mu E = 0$$

c'est l'équation classique étudiée en général par les auteurs traitant de la propagation aléatoire.

L'adoption de cette équation entraîne une conséquence qu'il ne faut pas perdre de vue. Si on écrit l'équation en E^*, et que l'on forme la combinaison

$E \frac{\partial E^*}{\partial z} + E^* \frac{\partial E}{\partial z'}$

on trouve :

$\iint_{-\infty}^{\infty} EE^* \ dx \ dy = \text{cste}$

En fait, c'est l'intégrale $\iint_{-\infty}^{\infty} EE^* \cos\alpha$ dx dy qui est constante : dans laquelle α représente l'angle de la direction de propagation avec Oz. La simplification faite entraîne la constance de la direction de propagation, donc interdit de considérer toute arrivée d'énergie oblique.

Si on adopte cette équation, on l'écrira :

$$\frac{i}{A} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E + ME = 0 \qquad (1)$$

.../.

en posant

$$\begin{cases} A = K\sigma \\ B = 2K^2\sigma \end{cases}$$

Dans la pratique $A \ll 1$ et $B \gg 1$.

2°) L'inclinaison des rayons n'est pas négligeable.

Ce cas ne se trouve qu'en acoustique. On ne peut pas alors simplifier l'équation, qui s'écrit :

$$\frac{i}{A}\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E + ME = 0 \qquad (2)$$

avec cette fois $A \ll 1$, $B \ll 1$, en général.

Le comportement de l'onde est très différent dans les deux cas.

III.-ETUDE A COURTE DISTANCE

(CAS "OPTIQUE")

Comme il a été dit, on utilise l'équation approchée (1). D'après sa propriété fondamentale, exposée ci-dessus, on a alors :

$$\overline{EE^*} = 1$$

en tout point de l'espace. Pour connaître la variable aléatoire $\overline{EE^*}$, on la représente commodément par $EE^* = 1 + mX$, X désignant une variable aléatoire de variance unité.

En particulier, on peut utiliser cette expression pour calculer la valeur moyenne de l'amplitude :

$$A = \overline{(EE^*)^{1/2}}$$

qu'on peut confondre avec $1 - \frac{m^2}{8}$ tant que $m \ll 1$.

De même, la variance de l'amplitude est donnée par :

$$V = \overline{EE^*} - \left[\overline{(EE^*)^{1/2}}\right]^2 = 1 - A^2 \sim \frac{m^2}{4}$$

Le calcul à effectuer est alors celui de la variance m^2.

1°) Développements

On décrit l'onde plane indéfinie à partir des conditions initiales très simples :

$$E\ (z = 0) = 1 \qquad \frac{\partial E}{\partial z}\ (z = 0) = 0$$

et on développe la grandeur E, sous la forme :

$$\begin{aligned} E = 1 &+ z^2 (a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + \ldots) \\ &+ z^3 (b_{00} + b_{10}x + b_{02}y + \ldots) \\ &+ z^4 (c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + \ldots) \\ &+ z^5 (d_{00} + d_{10}x + d_{01}y + \ldots) \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

et en conséquence le module carré, sous la forme

$$\begin{aligned} EE^* = 1 &+ z^2 (a_{00} + a_{00}^*) \\ &+ z^3 (b_{00} + b_{00}^*) \\ &+ z^4 (a_{00}a_{00}^* + c_{00} + c_{00}^*) \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

On utilise par ailleurs la représentation de Taylor définie ci-dessus pour l'indice aléatoire normalisé du milieu.

On désigne le terme en $z^i x^j y^k$ de cette représentation par : F_{ijk}.

Ces développements ont été représentés sur les tableaux I, II, III.

Sur le tableau I, on a représenté les développements de M et de E.

Sur le tableau II, on a représenté le développement de ME.

Sur le tableau III, les termes du membre de gauche.

$$\frac{i}{A}\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right) E$$

en face du développement de ME.

[On a ajouté entre parenthèses sur le tableau III les termes supplémentaires qui s'introduisent dans le cas suivant, où on a conservé le laplacien longitudinal $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$.]

2°) Amplitude moyenne : premier terme

Un calcul long mais sans difficultés fournit :

$$\boxed{m^2 = 2^5 \sigma^2 \sum_1^\infty \frac{2^n f_n^2}{n!}}$$

formule dans laquelle on a posé :

$$f_n(z) = \int_0^z dy \int_0^y x^n e^{-x^2} dx$$

Les contributions en f_n s'introduisent de plus en plus loin sur l'axe au fur et à mesure que n augmente.

La fonction $x^n e^{-x^2}$ atteint son maximum pour

$$x = \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \text{avec une}$$

valeur maximale :

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} e^{-n/2}$$

la largeur du pic est 1 environ. Pour z assez grand

$$f_n \sim \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} e^{-n/2} z \quad \text{et} \quad f_n^2 \frac{2^n}{n!} \sim \frac{z^2}{\sqrt{2\pi n}}$$

Pour z donné, le nombre de termes qui apporte une contribution effective à m^2 est de

$$N = 2z^2 \quad \text{environ,}$$

.../.

la loi de croissance de m^2 est donc en z^3.

On retrouve ainsi, d'une façon plus exacte, la loi de TCHERNOV d'après laquelle la variance croît comme $\sigma^2 \left(\frac{z}{R}\right)^3$ (puisque notre distance z est exprimée par rapport au rayon de corrélation).

La contribution des termes dont l'ordre n dépasse 2 z^2 mesure l'influence de la <u>réflexion</u>.

TABLEAU I.

	INDICE	Champ
1	0	1
z	$\varepsilon_1 \sqrt{2}$	0
x	$\varepsilon_2 \sqrt{2}$	0
y	$\varepsilon_3 \sqrt{2}$	0
z^2	$\xi_1 \sqrt{2}$	a_{00}
zx	$2\xi_2$	0
zy	$2\xi_3$	0
x^2	$\xi_4 \sqrt{2}$	0
xy	$2\xi_5$	0
y^2	$\xi_6 \sqrt{2}$	0
z^3	$-\varepsilon_1 \sqrt{2} + \breve{\eta}_1 \frac{2}{\sqrt{3}}$	b_{00}
$z^2 x$	$-\varepsilon_2 \sqrt{2} + 2\eta_2$	a_{10}
$z^2 y$	$-\varepsilon_3 \sqrt{2} + 2\eta_3$	a_{01}
zx^2	$-\varepsilon_1 \sqrt{2} + 2\eta_4$	0
zxy	$2\sqrt{2}\,\eta_5$	0
$z y^2$	$-\varepsilon_1 \sqrt{2} + 2\eta_6$	0
x^3	$-\varepsilon_2 \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\eta_7$	0
$x^2 y$	$-\varepsilon_3 \sqrt{2} + 2\eta_8$	0
$x y^2$	$-\varepsilon_2 \sqrt{2} + 2\eta_9$	0
y^3	$-\varepsilon_3 \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\eta_{10}$	0
z^4	$-\xi_1 \sqrt{2} + \zeta_1 \sqrt{\frac{2}{3}}$	c_{00}
$z^3 x$	$-2\xi_2 + \zeta_2\, 2\sqrt{\frac{2}{3}}$	b_{10}
$z^3 y$	$-2\xi_3 + \zeta_3\, 2\sqrt{\frac{2}{3}}$	b_{01}
$z^2 x^2$	$-\xi_1 \sqrt{2} - \xi_4 \sqrt{2} + 2\zeta_4$	a_{20}
$z^2 xy$	$-2\xi_5 + 2\sqrt{2}\,\zeta_5$	a_{11}
$z^2 y^2$	$-\xi_1 \sqrt{2} - \xi_6 \sqrt{2} + 2\zeta_6$	a_{02}
$x z^3$	$-2\zeta_2 + \zeta_7\, 2\sqrt{\frac{2}{3}}$	0
$z xy^2$	$-2\xi_2 + \zeta_9\, 2\sqrt{2}$	0
$z x^2 y$	$-2\xi_3 + \zeta_8\, 2\sqrt{2}$	0

TABLEAU I (suite)

	INDICE	Champ
$z y^3$	$-2\xi_3 + \zeta_{10}\, 2\sqrt{\frac{2}{3}}$	0
x^4	$-\xi_4\, 2 + \zeta_{11} \sqrt{\frac{2}{3}}$	0
$x^3 y$	$-2\xi_5 + \zeta_{12}\, 2\sqrt{\frac{2}{3}}$	0
$x^2 y^2$	$-\xi_4 \sqrt{2} - \xi_6 \sqrt{2} + 2\zeta_{13}$	0
$x\, yq^3$	$-\xi_4 \sqrt{2} + \zeta_{14}\, 2\sqrt{\frac{2}{3}}$	0
y^4	$-\xi_6 \sqrt{2} + \zeta_{15} \sqrt{\frac{2}{3}}$	0

TABLEAU II.

	INDICE x CHAMP	Désignation
1	0	F_{000}
z	$\varepsilon_1 \sqrt{2}$	F_{100}
x	$\varepsilon_2 \sqrt{2}$	F_{010}
y	$\varepsilon_3 \sqrt{2}$	F_{001}
z^2	$\xi_1 \sqrt{2}$	F_{200}
$z\,x$	$2\xi_2$	F_{110}
$z\,y$	$2\xi_3$	F_{101}
x^2	$\xi_4 \sqrt{2}$	F_{020}
xy	$2\xi_5$	F_{011}
y^2	$\xi_6 \sqrt{2}$	F_{002}
z^3	$-\varepsilon_1 \sqrt{2} + \eta_1 \frac{2}{\sqrt{3}} + \varepsilon_1 \sqrt{2}\, a_{00}$	F_{300}
$z^2 x$	$-\varepsilon_2 \sqrt{2} + 2\eta_2 + \varepsilon_2 \sqrt{2}\, a_{00}$	F_{210}
$z^2 y$	$-\varepsilon_3 \sqrt{2} + 2\eta_3 + \varepsilon_3 \sqrt{2}\, a_{00}$	F_{201}
$z x^2$	$-\varepsilon_1 \sqrt{2} + 2\eta_4$	F_{120}
$z\,x\,y$	$2\sqrt{2}\,\eta_5$	F_{111}
$z y^2$	$-\varepsilon_1 \sqrt{2} + 2\eta_6$	F_{102}
x^3	$-\varepsilon_2 \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\eta_7$	F_{030}
$x^2 y$	$-\varepsilon_3 \sqrt{2} + 2\eta_8$	F_{021}
$x y^2$	$-\varepsilon_2 \sqrt{2} + 2\eta_9$	F_{012}
y^3	$-\varepsilon_3 \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\eta_{10}$	F_{003}
z^4	$-\xi_1 \sqrt{2} + \zeta_1 \sqrt{\frac{2}{3}} + \xi_1 \sqrt{2}\, a_{00} + \varepsilon_1 \sqrt{2}\, b_{00}$	F_{300}
$z^3 x$	$-2\xi_2 + \zeta_2\, 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\xi_2\, a_{00} + \varepsilon_1 \sqrt{2}\, a_{10} + \varepsilon_2 \sqrt{2}\, b_{00}$	F_{310}
$z^3 y$	$-2\xi_3 + \zeta_3\, 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\xi_3\, a_{00} + \varepsilon_1 \sqrt{2}\, a_{01} + \varepsilon_3 \sqrt{2}\, b_{00}$	F_{301}
$z^2 x^2$	$-\xi_1 \sqrt{2} - \xi_4 \sqrt{2} + 2\zeta_4 + \xi_4 \sqrt{2}\, a_{00} + \varepsilon_2 \sqrt{2}\, a_{10}$	F_{220}
$z^2 xy$	$-2\xi_5 + 2\sqrt{2}\,\zeta_5 + 2\xi_5\, a_{00} + \varepsilon_2 \sqrt{2}\, a_{01} + \varepsilon_3 \sqrt{2}\, a_{10}$	F_{211}
$z^2 y^2$	$-\xi_1 \sqrt{2} - \xi_6 \sqrt{2} + 2\zeta_6 + \xi_6 \sqrt{2}\, a_{00} + \varepsilon_3 \sqrt{2}\, a_{01}$	F_{202}
$z\, x^3$	$-2\xi_2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\zeta_7$	F_{130}
$z\,x\,y^2$	$-2\xi_2 + 2\sqrt{2}\,\zeta_9$	F_{112}

.../.

TABLEAU II (suite)

	INDICE + CHAMP	Désignation
$z\ x^2\ y$	$-\ 2\ \xi_3\ +\ 2\ \ 2\ \zeta_8$	F_{121}
$z\ y^3$	$-\ 2\ \xi_3\ +\ 2\ \ \frac{2}{3}\ \zeta_{10}$	F_{103}
x^4	$-\ \xi_4\ \ 2\ +\ 2\ \ \frac{2}{3}\ \zeta_{11}$	F_{140}
$x^3\ y$	$-\ 2\ \xi_5\ +\ 2\ \ \frac{2}{3}\ \zeta_{12}$	F_{031}
$x^2\ y^2$	$-\ \xi_4\ \ 2\ -\ \xi_6\ \ 2\ +\ 2\ \zeta_{13}$	F_{022}
$x\ y^3$	$-\ 2\ \xi_5\ +\ 2\ \ \frac{2}{3}\ \zeta_{14}$	F_{013}
y^4	$-\ \xi_6\ \ 2\ +\ 2\ \ \frac{2}{3}\ \zeta_{15}$	F_{004}

TABLEAU III.

EQUATION	GAUCHE		DROITE
1	$(\frac{2a_{00}}{B}) + \left[\frac{i}{A}\ \beta_{00}+\frac{2}{B}(\alpha_{20}+\alpha_{02})\right]$		F_{000}
z	$(\frac{6b_{00}}{B})+\left[\frac{2}{B}(\beta_{20}+\beta_{02})\right]$	$\frac{2a_{00}i}{A}$	F_{100}
x	$(\frac{2a_{10}}{B})+$	0	F_{010}
y	$(\frac{2a_{01}}{B})+$	0	F_{001}
z^2	$(\frac{12c_{00}}{B})+$	$\frac{3b_{00}i}{A}$	F_{200}
$z\ x$	$(\frac{6b_{10}}{B})+$	$\frac{2a_{10}i}{A}$	F_{110}
$z\ y$	$(\frac{6b_{01}}{B})+$	$\frac{2a_{01}i}{A}$	F_{101}
x^2	$(\frac{2a_{20}}{B})+$	0	F_{020}
$x\ y$	$(\frac{2a_{11}}{B})+$	0	F_{011}
y^2	$(\frac{2a_{02}}{B})+$	0	F_{002}
z^3	$\frac{2b_{20}}{B} + \frac{2b_{02}}{B} +(\frac{20d_{00}}{B}) +$	$\frac{4c_{00}i}{A}$	F_{300}
$z^2\ x$	$\frac{6a_{30}}{B} + \frac{2a_{12}}{B} +(\frac{12c_{10}}{B}) +$	$\frac{3b_{10}i}{A}$	F_{210}
$z^2\ y$	$\frac{6a_{03}}{B} + \frac{2a_{21}}{B} +(\frac{12c_{01}}{B}) +$	$\frac{3b_{01}i}{A}$	F_{201}
$z\ x^2$	$(\frac{6b_{20}}{B})+$	$\frac{2a_{20}i}{A}$	F_{120}
$z\ x\ y$	$(\frac{6b_{11}}{B})+$	$\frac{2a_{11}i}{A}$	F_{111}
$z\ y^2$	$(\frac{6b_{02}}{B})+$	$\frac{2a_{02}i}{A}$	F_{102}
x^3	$(\frac{2a_{30}}{B})+$	0	F_{030}
$x^2\ y$	$(\frac{2a_{21}}{B})+$	0	F_{021}
$x\ y^2$	$(\frac{2a_{12}}{B})+$	0	F_{012}
y^3	$(\frac{2a_{03}}{B})+$	0	F_{003}

TABLEAU III (suite)

EQUATION	GAUCHE		DROITE
z^4	$\frac{2c_{20}}{B} + \frac{2c_{02}}{B} +(\frac{30b_{00}}{B}) +$	$\frac{5d_{00}i}{A}$	F_{400}
$z^3\ x$	$\frac{2b_{30}}{B} + \frac{2b_{12}}{B} +(\frac{20d_{10}}{B}) +$	$\frac{4c_{10}i}{A}$	F_{310}
$z^3\ y$	$\frac{2b_{03}}{B} + \frac{2b_{21}}{B} +(\frac{20d_{01}}{B}) +$	$\frac{4c_{01}i}{A}$	F_{301}
$z^2\ x^2$	$\frac{12a_{40}}{B} + \frac{2a_{22}}{B}+(\frac{12c_{20}}{B}) +$	$\frac{3b_{20}i}{A}$	F_{220}
$z^2\ xy$	$\frac{6a_{31}}{B} + \frac{6a_{13}}{B} +(\frac{12c_{11}}{B}) +$	$\frac{3b_{11}i}{A}$	F_{211}
$z^2\ y^2$	$\frac{2a_{22}}{B} +\frac{12a_{04}}{B} +(\frac{12c_{02}}{B}) +$	$\frac{3b_{02}i}{A}$	F_{202}
$z\ x^3$	$(\frac{6b_{30}}{B})+$	$\frac{2a_{30}i}{A}$	F_{130}
$z\ x\ y^2$	$(\frac{6b_{12}}{B})\ +$	$\frac{2a_{12}i}{A}$	F_{112}
$z\ x^2\ y$	$(\frac{6b_{21}}{B})\ +$	$\frac{2a_{21}i}{A}$	F_{121}
$z\ y^3$	$(\frac{6b_{03}}{B})\ +$	$\frac{2a_{03}i}{A}$	F_{103}
x^4	$(\frac{2a_{40}}{B})\ +$	0	F_{140}
$x^3\ y$	$(\frac{2a_{31}}{B})\ +$	0	F_{031}
$x^2\ y^2$	$(\frac{2a_{22}}{B})+$	0	F_{022}
$x\ y^3$	$(\frac{2a_{13}}{B})\ +$	0	F_{013}
y^4	$(\frac{2a_{04}}{B})\ +$	0	F_{004}

IV. - RECHERCHE DE LA SOLUTION STATIONNAIRE

(Au second ordre)

a) Conditions de stationnarité

Le phénomène de propagation de l'onde plane monochromatique est markovien, on peut s'attendre à le voir tendre vers une situation d'équilibre stationnaire, que nous allons caractériser.

Pour cela, nous utilisons l'équation complète de propagation. Le champ en un point (x y z) sera défini par le développement :

$$\left.\begin{aligned} E = {} & \alpha_{00}+\alpha_{10}x +\alpha_{01}y+\alpha_{20}x^2+\alpha_{11}xy+\alpha_{02}y^2 +\dots \\ & + z(\beta_{00}+\beta_{10}x +\beta_{01}y + \dots) \end{aligned}\right] \text{ conditions initiales}$$

$$+ z\ (\beta_{00}+\beta_{10}x +\beta_{01}y + \dots)$$

$$+ z^2\ (\alpha_{00} + \dots) + z^3\ (b_{00}+ \dots)$$

on calculera alors :

$$\frac{i}{A} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{i}{A}\left[\beta_{00} + \dots\right] + 2z\ (a_{00}+\dots) + 3z^2(b_{00}+\dots)+\dots$$

$$\frac{1}{B}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} +\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right] = \frac{1}{B}\left[2(\alpha_{20}+\alpha_{02})+\dots\right]+\frac{z}{B}\left[2(\beta_{20}+\beta_{02})+\dots\right]$$

.../.

PROPAGATION ALEATOIRE
Recherche d'une solution rigoureuse en milieu stationnaire - Etude de la solution stationnaire

$+ \ldots$

$+ 2(a_{00} + \ldots) + 6z(b_{00} + \ldots)$

On posera :

$$\overline{\alpha_{00}\alpha_{00}^*} = 1$$

La fonction de corrélation $E(x,y,z)E(x',y',z')$ sera caractérisée par :

- la fonction transversale

$$\overline{E(\vec{r}_y, z)\, E\,(\vec{r}_0 + \vec{r}, z)} = (1 - mr^2 + nr^4 \ldots)$$

- la fonction longitudinale

$$\overline{E(\vec{r}_0, 0)\, E\,(\vec{r}_0, z)} = e^{+ipz}(1 - Mz^2 + Nz^4 + \ldots)$$

On peut à partir de cette forme calculer les diverses moyennes :

$\overline{\alpha_{00}\,\alpha_{00}^*} = 1$ $\quad \overline{\alpha_{20}\,\alpha_{20}^*} = 6\,n$ $\quad \overline{\alpha_{20}\,\alpha_{02}^*} = 0$

$\overline{\alpha_{00}\,\alpha_{20}^*} = -\,m$ $\quad \overline{\alpha_{00}\,\alpha_{40}^*} = 2\,n$

$\overline{\alpha_{00}\,\beta_{02}^*} = ip$ $\quad \overline{\beta_{00}\,\beta_{00}^*} = 2M + p^2$

... etc

On résoudra l'équation de façon formelle ; en particulier sur l'axe ($x = y = 0$) la solution sera définie par :

$$a_{00} = \frac{B}{2}\left[\delta d_{00} - \frac{i}{A}\beta_{00} - \frac{2}{B}(\alpha_{20}+\alpha_{02})\right]$$

$$b_{00} = \frac{B}{6}\left[\varepsilon_1\sqrt{2}\,\alpha_{00} + \delta\beta_{00} - \frac{2}{B}(\beta_{20}+\beta_{02}) - \frac{iB}{A}\left[\delta\alpha_{00} - \frac{i}{A}\beta_{00} - \frac{2}{B}\ldots(\alpha_{20}+\alpha_{02})\right]\right]$$

$$c_{00} = \frac{iB}{6A}(\beta_{20}+\beta_{02}) + \frac{i}{24A^3}B^3\beta_{00} - \frac{B^2}{12A^2}(\alpha_{20}+\alpha_{02}) + \frac{B}{12A}(12\alpha_{40} + 12\alpha_{04} + 4\,\alpha_{22})$$

. . . .

On peut écrire alors des conditions de stationnarité :

constance de $\overline{EE^*}$, $\overline{\frac{\partial E}{\partial z} \cdot \frac{\partial E^*}{\partial z}}$, avec z

et on obtient les conditions suivantes :

$$2\,M + p^2 - \frac{B}{A}\,p + 4\,m = 0$$

$$B^2 + 48\,n + 2\,m\,(2M + p^2) - \frac{8m\,pB}{A} = 0$$

$$\frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{12A^2}(2M + p^2) + 6m^2 + \frac{4m}{3}(2M+p^2) - \frac{B^3}{12A^3}p + \frac{mB^2}{3A^2} + \frac{8m^2}{3} = 0$$

On peut tirer de ces équations la valeur des inconnues en supposant que :

1°) la corrélation transversale est gaussienne :
$$n = \frac{m^2}{2}$$

2°) $M,\ p^2 \ll \frac{B}{A}\,p,\ m$ (inégalité justifiée a posteriori).

On peut donc écrire alors :

$$\frac{B}{A}\,p = 4\,m \text{ et donc } B^2 + 48\,n - \frac{8m\,pB}{A} = 0$$

donc

$$\boxed{m = \frac{B}{2\sqrt{2}}} \qquad \boxed{p = A\sqrt{2}}$$

La dernière équation fournira :

$$\frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{12A^2}(2M+2A^2) + \frac{6B^2}{8} + \frac{4}{3.\sqrt{2}}\frac{B}{2}(2M + 2\,A^2) - \frac{B^3}{12A^3}\,A\sqrt{2}\ \ldots$$

$$\ldots + \frac{B^3}{6\sqrt{2}\,A^2} + \frac{B^2}{3} = 0$$

soit ; avec la même approximation :

$$\frac{5}{12}\;B^2 = \frac{MB^2}{6A^2} \qquad \text{ou :} \quad \boxed{M = \frac{5}{2}\,A^2}$$

On a bien $M,\ p^2 \ll \frac{B}{A}\ p,\ m$ car cela revient à supposer que : $A^2 \ll B$

or : $A^2 = K^2\,\sigma^2$ $\qquad B = K^2\,\sigma$

comme $\sigma \ll 1$, la condition est bien réalisée.

On peut tirer de là les grandeurs physiques intéressantes.

b) <u>Caractéristiques du régime stationnaire</u>

α) <u>Rayon de corrélation transversal</u>

il est donné par $\frac{1}{\sqrt{m}} = rt$. En revenant aux grandeurs physiques de base ($B=2K^2\sigma$) :

$$\boxed{rt = \frac{1}{\pi\,.2^{3/4}}\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{\sigma}}} \sim 0{,}189\frac{\lambda}{\sqrt{\sigma}}$$

on voit que ce rayon est indépendant du rayon de corrélation des irrégularités.

β) <u>Rayon de corrélation longitudinal</u>

il est donné par $\frac{1}{\sqrt{M}} = re$. De même :

$$\boxed{re = \frac{\lambda}{\sigma}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{10}}}$$

Même remarque sur l'indépendance vis à vis du rayon de corrélation des irrégularités ; de plus, on a évidemment :

$$re \gg rt$$

On peut définir un "volume de corrélation"

.../.

dont la grandeur est proportionnelle à :

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}$$

γ) Ralentissement apparent

La vitesse de propagation moyenne est diminuée ; ceci est normal car tous les trajets se font en dehors de l'axe qui correspond au temps minimal de propagation.

Le facteur de phase du champ complexe passe de :
e^{iKz} en propagation certaine à
$e^{i(K+p)z}$.

Comme $p = \sqrt{2}\, K \sigma$ on a :
$e^{iK(1 + \sqrt{2}\,\sigma)\, z}$ comme nouveau facteur de phase moyen, ce qui correspond à une variation relative de vitesse :

$$\boxed{\frac{\Delta c}{c} = -\sigma \sqrt{2}}$$

On peut en déduire une inclinaison quadratique moyenne des rayons en écrivant :

$$1 - \overline{\cos \varepsilon} = -\sigma \sqrt{2}$$

soit

$$\boxed{\overline{\varepsilon^2} = 2^{3/4} \sqrt{\sigma}}$$

c) Utilisation de l'équation simplifiée

On peut évidemment mener les mêmes calculs avec l'équation simplifiée ; les relations obtenues sont difficiles, mais plus simples.

On obtient alors les conditions :

$$\frac{2M}{A^2} = 1 + \frac{48n}{B^2}$$

$$2 + 2\, M = \frac{16n}{B^2} \cdot 2\, M$$

qui donnent des valeurs assez différentes, donc inexactes. En particulier on ne retrouve la valeur $n = \frac{B^2}{16}$ que si $A >> 1$

condition jamais réalisée dans la pratique.

On retrouve le fait que l'approximation utilisée usuellement cesse d'être valable pour une grande longueur de propagation, quand la diffusion est prépondérante.

d) Loi de probabilité du champ

Il est généralement admis que la distribution de probabilité de l'analyse du champ évolue vers une loi de Rayleigh. Pour vérifier ce point, examinons si la solution est stationnaire au 4ème ordre, en calculant

$$\overline{E^2(0,\ 0,\ z)\ E^{*2}\ (0,\ 0,\ z)}$$

soit :

$$\overline{(\alpha_{00} + \beta_{00}\, z + a_{00}\, z^2)^2\ (\alpha_{00}^* + \beta_{00}\, z + a_{00}^*\, z)^2}$$

Le premier terme non nul est en z^2 et s'écrit :

$$z^2 \overline{\left[\left[\alpha_{00}^2 \beta_{00}^{*2} + \alpha_{00}^{2*} \beta_{00}^2\right] + 4\alpha_{00}\beta_{00}\alpha_{00}^*\beta_{00}^* + \left[2\alpha_{00}^2\, \alpha_{00}^*\, a_{00}^* + 2\alpha_{00}^{*2}\, \alpha_{00}\, a_{00}\right]\right]}$$

Les moyennes de tous les termes peuvent s'évaluer facilement, après un calcul long mais sans difficultés :

$$\overline{\alpha_{00}^2\ \beta_{00}^{*2} + \alpha_{00}^{2*}\ \beta_{00}^2} = -4\, p^2$$

$$\overline{4\ \alpha_{00}\ \beta_{00}\ \alpha_{00}^*\ \beta_{00}^*} = \delta\ (M + p^2)$$

$$\overline{\alpha_{00}^2\ \alpha_{00}^*\ a_{00}^*} = -\frac{Bp}{2A} + 2\, m$$

avec les notations précédentes.

En reportant les valeurs de A et B, p, m du régime stationnaire évaluées précédemment, il reste :

$$\overline{E^2\ (0,\ 0,\ z)\ E^{*2}\ (0,\ 0,\ z)} = \overline{E^2\ (0,\ 0,\ 0) E^{*2} (0,0,0)} + z^2 \cdot 24\, K^2 \sigma^2$$

Donc la solution n'est pas stationnaire au 4ème ordre.

La moyenne du 4ème ordre envisagée est constamment croissante. On peut en conclure que module carré M^2 du champ a une de probabilité qui évolue vers une forme telle que $\frac{1}{(1 + M^2)^3}$, loi telle que la moyenne soit finie et le moment d'ordre 2 infini et donc pas du tout vers une loi exponentielle correspondant à une distribution de Rayleigh.

Cependant, cette évolution est très lente en général et il est extrêmement probable qu'on rencontre une distribution proche de celle de Rayleigh sur une grande longueur de propagation.

V. - CONCLUSION

On a donc caractérisé le comportement limite d'une onde plane dans un milieu aléatoire stationnaire ;

.../..

ce comportement est de nature markovienne, en accord avec le principe de HUYGHENS. Les principaux problèmes à résoudre sont :

- le comportement de l'onde plane avant le régime stationnaire, et la distance nécessaire à l'atteindre ;
- le comportement des signaux non-monochromatiques dans les mêmes conditions.

VI.- REFERENCES

1) V.I. TATARSKI
Wave Propagation in a Turbulent Medium
Mc. Graw Hill NY 1961.

2) R.A. SCHMELTZER
Quarterly Applied Mathematics
Vol. 24 (1967) PP. 339 - 354.

3) A.M. PROKHOROV et Al.
"Laser Irradiance Propagation in Turbulent Media"
P.I.E.E.E. - Vol. 63 (N° 5) (1975) PP. 790-811.

4) H. DEBART
"Propagation aléatoire d'une onde monochromatique dans un milieu stationnaire"
Revue du CETHEDEC - N° 49 (1976).

H. DEBART