

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

REPRESENTATION HILBERTIENNE ET REPRESENTATION CONJOINTE
EN TEMPS ET FREQUENCE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE,
INTERPRETATION PHYSIQUE EN FONCTION DES OBSERVATIONS.

Bernard ESCUDIE*

Jean GREA**

*Traitement du Signal I.C.P.I.
25, rue du Plat 69288 LYON Cedex 1

**Service Physique Théorique, Institut de Physique Nucléaire
Université Claude Bernard 69900 VILLEURBANNE

RESUME

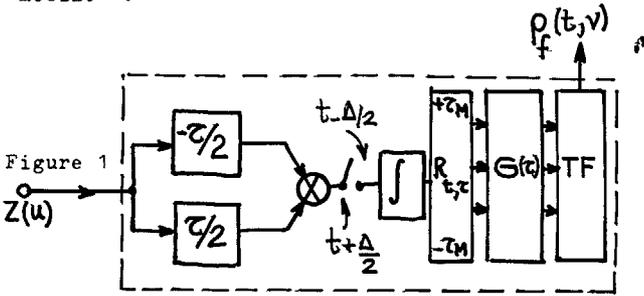
Pour chaque Représentation conjointe (t, ν) utilisée actuellement dans l'analyse des signaux certains d'énergie finie, il existe une Représentation hilbertienne associée. Le but est de trouver une Représentation hilbertienne générale et d'interpréter physiquement les conditions portant sur la fonction arbitraire caractérisant chaque Représentation conjointe. Ces conditions entraînent que les moments d'ordre quelconque de la Représentation conjointe considérée correspondent à des valeurs moyennes d'opérateurs. Ces valeurs moyennes doivent décrire des observations physiques sur le signal dont le sens dépend de la Représentation conjointe étudiée. L'étude porte sur quelques observations simples telles que fréquence instantanée, retard de groupe, moments d'ordre un et deux du signal et de ses dérivées.

SUMMARY

Time and frequency energy distribution $p_f(t, \nu)$ is related to hilbertian representation of finite energy signals. Given $p_f(t, \nu)$ energy distribution, the hilbertian Representation can be derived from properties of the weighting function $f(n, \tau)$ related to p_f . The k^{th} order moment of p_f equals the mean value of hilbertian operators related to measurement. These measurements imply some constraints about the weighting function $f(n, \tau)$ and $p_f(t, \nu)$. Some of these measurements are well known ones in Signal Representation, such as instantaneous frequency, group delay, first and second order moments dealing with the finite energy signals or its derivatives.

REPRESENTATION HILBERTIENNE ET REPRESENTATION CONJOINTE
 EN TEMPS ET FREQUENCE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE,
 INTERPRETATION PHYSIQUE EN FONCTION DES OBSERVATIONS.

De même décrivons avec R le fonctionnement du dispositif, décrit à la figure 1, fournissant la fonction d'autocorrélation "pondérée" ou "mobile" :



$G(\tau)$ pondération réelle paire décroissante

$$\rho_f(t, \nu) \Rightarrow G(\tau) \int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}} Z\left(\frac{u+\tau}{2}\right) Z^*\left(\frac{u-\tau}{2}\right) du$$

$$\rho_f(t, \nu) \Rightarrow R(t, \tau) = G(\tau) \int_{\mathbb{R}} \Pi_{\Delta}(u-t) Z\left(\frac{u+\tau}{2}\right) Z^*\left(\frac{u-\tau}{2}\right) du \quad \text{d'où :}$$

$$f(\eta, \tau) = G(\tau) \frac{\sin \pi \eta \tau}{\pi \eta \tau}$$

Remarquons que dans un tel cas $f \in \mathcal{P}$ et est le produit d'une fonction de τ par une fonction de η . Cette écriture n'est pas générale comme le montre l'exemple précédent [7][5a].

3) Position du problème réciproque :

choix d'une fonction de pondération :

Le problème inverse ou réciproque de la description du signal à l'aide d'une représentation conjointe énergétique générale se pose dans les termes suivants :

"Pour l'observation de certaines grandeurs physiques liées au signal, coïncidant avec des moments de t et ν , compte tenu de certaines conventions d'écriture des opérateurs associées, la fonction f peut être associée biunivoquement à $\rho(t, \nu)$?" En d'autres termes existe-t-il un seul type de Représentation conjointe permettant d'extraire certaines "observations" particulièrement caractéristiques d'un signal d'énergie finie? La réponse à cette question oblige à préciser les conven-

tions d'écriture des opérateurs associés aux observations.

4) Contraintes imposées par la nature physique des observations :

Les valeurs des observations faites sur les signaux sont des réels positifs ou négatifs. Citons, par exemple, la fréquence instantanée, le retard de groupe ou la "date moyenne" et la fréquence centrale, l'épanouissement en temps et en fréquence [3]. Ces grandeurs sont interprétées comme des valeurs moyennes d'opérateurs devant posséder la propriété d'HERMITICITE.

Rappelons que les deux opérateurs t et ν définis par G. BONNET à l'aide d'un formalisme hilbertien sont tels que :

$$[t, \nu] = t\nu - \nu t = \frac{i}{2\pi} \mathbf{1}_2 \text{ opérateur identité}$$

Dans ce formalisme, la représentation conjointe est associée à la valeur moyenne de l'opérateur $Q = e^{i2\pi(n t + \nu)}$ prise sur le signal analytique Z [1][2]. Le problème fondamental réside dans l'expression de l'opérateur Q .

A chacune de ses expressions correspondra une formulation différente de $\rho_f(t, \nu)$ et une expression différente de $f(\eta, \tau)$ [5b]. C'est l'expression du Principe de CORRESPONDANCE (ou association) en Mécanique quantique. Les différentes formulations connues conduisent à des expressions simples des opérateurs associés aux monômes $t^p \nu^m$. [3][4][8] à [11]. Rappelons les règles de correspondance liées aux travaux de E.P. WIGNER et J. VILLE et ceux de H. MARGENAU, R.W. HILL et A.W. RIHAZEK

$$t^p \nu^m \rightarrow \frac{1}{2^p} \sum_{\ell=0}^p C_p^\ell t^{p-\ell} \nu^m t^\ell \quad [3][8][2] \text{ (noté WV B)}$$

$$t^p \nu^m \rightarrow \frac{1}{2^p} (t^p \nu^m + \nu^m t^p) \quad [11][4] \text{ (noté MHR)}$$

soit pour $p \leq 2, m \leq 2, p+m \leq 3$



REPRESENTATION HILBERTIENNE ET REPRESENTATION CONJOINTE
EN TEMPS ET FREQUENCE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE,
INTERPRETATION PHYSIQUE EN FONCTION DES OBSERVATIONS.

$$\left. \begin{aligned} tv &\rightarrow tv \quad vt \\ t^2v &\rightarrow \frac{1}{4}(t^2v + tv + vt^2) \\ v^2t &\rightarrow \frac{1}{2}(tv^2 + v^2t) \end{aligned} \right\} \text{d'après (7)} \quad (9a)$$

$$\left. \begin{aligned} tv &\rightarrow \frac{1}{2}(tv + vt) \\ t^2v &\rightarrow \frac{1}{4}(t^2v + vt^2) \\ v^2t &\rightarrow \frac{1}{4}(v^2t + tv^2) \end{aligned} \right\} \text{d'après (8)} \quad (9b)$$

Jusqu'à l'ordre $p + m = 3$ inclus les expressions obtenues à l'aide des deux principes sont fonctionnellement dépendantes. Tous les polynômes d'opérateur d'ordre $p + m$ s'expriment à l'aide des puissances d'ordre un et deux de t et v . Ces deux règles de correspondance proviennent des expressions de Q suivantes :

$$Q = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (2i\pi)^m (nt + \tau v)$$

$$Q = \frac{1}{2} (e^{i2\pi nt} e^{i2\pi \tau v} + e^{i2\pi \tau v} e^{i2\pi nt})$$

qui fournissent des expressions de $p_f(t, v)$ telles que : [5a]

$$\left. \begin{aligned} f(n, \tau) &= 1 \quad \forall n, \tau \in \mathbb{R}^2 \\ f(n, \tau) &= \cos \pi n \tau \quad \forall n, \tau \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \right\} (10)$$

5) Observations physiques des signaux,
choix d'une Représentation et d'un principe de
CORRESPONDANCE :

En étudiant les observations appelées "fréquence instantanée" $v_i(t)$ et "retard de groupe" $\tau_g(v)$ d'un signal, il vient :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} p_f(t, v) dt &= \tau_g(v) \quad \text{si } \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{0,0} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_{0,0} = 0 \\ \int_{\mathbb{R}^1} p_f(t, v) dv &= v_i(t) \quad \text{et } f(n, 0) = fte \\ & \quad f(0, \tau) = Cte \end{aligned} \right.$$

Les conditions ci-dessus sont remplies pour les deux représentations conjointes définies en (10). Elles ne le sont pas pour d'autres [10] [12] [13] [7]. Les moments impairs d'ordre inférieur ou égal à 3 ne permettent

pas de choisir une représentation, ils apportent cependant des observations intéressantes sur le signal :

$$\langle vtv \rangle_z = \int_{\mathbb{R}} v^2 t p_f dt dv = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |z|^2 dt = \frac{K}{4\pi^2}$$

Le paramètre K sert à décrire le comportement de la fonction d'Ambiguïté du signal [14]. De même le moment relatif à l'opérateur tv fournit :

$$\langle tvt \rangle = \int_{\mathbb{R}} u^2 v_i(u) |Z(u)|^2 du$$

quantité qui fixe les propriétés d'épanouissement temporel de $v_i(t)$. Ce moment est tel que :

$$\langle tvt \rangle = \langle t^2v \rangle_{p_f} \quad \text{si } \left(\frac{\partial^k f}{\partial n^l \partial \tau^p}\right)_{0,0} = 0 \quad k = l + p \leq 3$$

Etudions maintenant le moment du quatrième ordre relatif à la variable t^2v^2 :

$$\langle t^2v^2 \rangle_{p_f} = \int_{\mathbb{R}^2} t^2 v^2 p_f(t, v) dt dv$$

avec $f=1$ et $f = \cos \pi n \tau$. Nous obtenons :

$$\langle t^2v^2 \rangle_{p_f} = \frac{1}{8\pi^2} (\alpha_s^{(4)} - \langle Z, Z \rangle - \text{Re} \int_{\mathbb{R}} \ddot{z}(u) Z^*(u) du)$$

ce qui nous conduit à :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle t^2v^2 \rangle_{p_f} &= \frac{1}{4\pi^2} \alpha_s^{(4)} \quad (12) \\ & \quad \text{si } f(n, \tau) = 1 \text{ (WVB)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle t^2v^2 \rangle_{p_f} &= \frac{1}{4\pi^2} (\alpha_s^{(4)} - \frac{1}{2}) \quad (13) \\ & \quad \text{si } f(n, \tau) = \cos \pi n \tau \text{ (MHR)} \end{aligned} \right.$$

et $\langle Z, Z \rangle = 1$ en adoptant pour $\alpha_s^{(4)}$ la définition due à R.A. ALTES et E.L. TITLEBAUM [15] :

$$\alpha_s^{(4)} = \int_{\mathbb{R}^1} t^2 |\dot{z}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}^1} v^2 |\ddot{z}(v)|^2 dv \quad (14)$$

Au quatrième ordre il existe une différence entre les moments liés aux deux Représentations car à partir de l'ordre 4 on a :

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial n^2}\right)_{0,0} = -2\pi^2 \neq 0, \quad f = \cos \pi n \tau$$

Remarquons que l'étude de la fonction d'Ambiguïté conduit à définir les paramètres suivants: [14]

$$K = \int_{\mathbb{R}} |z|^2 dt, \quad G = \int_{\mathbb{R}} u^2 \ddot{z} z^* du, \quad \Delta = \int_{\mathbb{R}} |\dot{z}(t)|^2 dt$$

tous reliés à des moments d'ordre inférieur ou égal à 4.

6) Interprétation physique des résultats :

...

REPRESENTATION HILBERTIENNE ET REPRESENTATION CONJOINTE
 EN TEMPS ET FREQUENCE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE,
 INTERPRETATION PHYSIQUE EN FONCTION DES OBSERVATIONS.

L'étude des signaux d'énergie finie montre que la valeur du paramètre $\alpha_S^{(4)}$ est directement liée au produit durée bande passante (BT) du signal et au nombre d'oscillations qu'il contient [14]. Il s'ensuit que la relation (12) et la relation (13) conduisent à des valeurs nettement différentes si $\alpha_S^{(4)} \approx 1$, c'est à dire pour des signaux de produit BT faible. Dans un tel cas les deux moments :

$$\langle t^2 v^2 \rangle_{f=1} \neq \langle t^2 v^2 \rangle_{f=\cos \pi n z}$$

seront différents et il sera possible de distinguer EXPERIMENTALEMENT les résultats dus aux deux représentations de type VILLE et RIHAZECK.

Au contraire, dans le cas des Signaux "à grand produit BT", $\alpha_S^{(4)}$ prend des valeurs grandes par rapport à un. En un tel cas il existe une insensibilité des valeurs des moments d'ordre 4 aux différents types de Représentation conjointe. L'emploi des méthodes asymptotiques pour calculer l'expression de montre qu'il y a "concentration" des valeurs grandes de P_f autour d'une trace, caractéristique de v_j et τ_g , dans le plan (t, v) [4].

Dans le cas des signaux à produit BT faible (≈ 1) le choix arbitraire de la fonction $f(m, \tau)$ fixe l'expression de $P_f(t, v)$ et de la fonction d'Ambiguïté à partir desquelles s'obtiennent tous les paramètres physiques du signal. Ces derniers sont donc DIRECTEMENT dépendants du "mode d'observation" que traduit le choix de $f(m, \tau)$. Ce choix impose une famille de règles de CORRESPONDANCE pour les opérateurs associés aux monômes $t^p v^m$. Par exemple, la règle de "symétrisation" conduit à la représentation de RIHAZECK [16]. Cet auteur a proposé une représentation conjointe qu'il a pu illustrer à l'aide d'un modèle d'observation à la date $t \pm dt$ de l'énergie d'interaction entre le signal et le signal filtré à la fréquence v dans la bande $\pm dv$. Cette observation fait CLAIREMENT apparaître que l'on utilise une déformée du signal dé-

pendant du choix de $f(m, \tau)$. [17]. Dès 1955 A. BLANC-LAPIERRE avait remarqué cette dépendance de la représentation conjointe d'un mode d'analyse donné [18].

CONCLUSION :

La Représentation conjointe en temps et fréquence pour les signaux d'énergie finie, s'exprime de manière générale à l'aide d'une fonction de pondération arbitraire $f(m, \tau)$. Dans le cas des signaux de produit bande durée faible, l'influence du choix arbitraire de la fonction de pondération se fait sentir au niveau des valeurs des moments liés aux monômes $t^p v^m$. Si, pour des commodités expérimentales on est conduit à utiliser une Représentation plutôt qu'une autre, le choix fait pour $f(m, \tau)$ ne doit pas faire oublier que l'observation faite dépend de ce choix. Il existe un certain type de traduction des opérateurs hilbertiens liés à ces observations et en particulier à f . Il n'y a pas d'unicité de $P_f(t, v)$ pour une observation donnée et il existe une famille de règles de correspondance en fonction des observations désirées par l'expérimentateur. Le choix de $f(m, \tau)$ traduit l'emploi d'une déformée du signal dans l'élaboration de P_f ; cette déformée est liée à un "mode d'analyse ou d'observation" du signal.

Remerciements :

Les auteurs tiennent à remercier leurs collègues du Service Traitement du Signal de l'I.C.P.I. pour l'aide qu'ils leur ont apportée dans la réalisation des calculs.

Ils tiennent à remercier plus particulièrement le Professeur LAFOUCRIERE et le Professeur BONNET pour les conseils et les encouragements qu'ils leur ont prodigués au cours de cette étude.



REPRESENTATION HILBERTIENNE ET REPRESENTATION CONJOINTE
EN TEMPS ET FREQUENCE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE,
INTERPRETATION PHYSIQUE EN FONCTION DES OBSERVATIONS.

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] G. BONNET Nice avril 1967
Colloque National du Groupe de Traitement
du Signal
Rev. Opt. Ed. p.10 à 34
- [2] G. BONNET et G. GARAMPON 1967
(même colloque) Rev. Opt. Ed. p. 35-48
- [3] J. VILLE 1948
Câbles et Transmissions, tome 2 n° 1
p. 61-74
- [4] A.W. RIHAZECK mai 1968
I.E.E.E. Trans. Inf. Th. IT 14 n° 3
p. 369-374
- [5a] B. ESCUDIE J. GREA 1976
C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, t 283
p. 1049-1051
- [5b] B. ESCUDIE B. GRANDJANNY J. GREA sept.
1975
Communication 2è Colloque Epistémologie
Sénanque
- [6] J. von NEUMANN 1932
Ann. Math., t 33 p. 567
- [7] C.H. PAGE 1953
Journ. Appl. Phys., tome 23 n° 1 p. 103
- [8] E.P. WIGNER 1932
Phys. Rev. n° 40, p. 749
- [9] P.A.M. DIRAC 1926
Proc. Roy. Soc. (Londres), A 110, p. 561
- [10] M. BORN P. JORDAN 1925
Zeit. f. Phys. tome 34, p. 873
- [11] H. MARGENAU R.W. HILL 1961
Progress in Theoretical Phys. t 26, p. 729
- [12] J.L. FLANAGAN 1965
Speech analysis and Perception
Springer Verlag Ed.
- [13] L. PIMONOV 1962
Vibrations en régime transitoire
Dunod Ed. Paris
- [14] M. CHIOLLAZ Nice 1977
M. DECOUVELAERE
B. ESCUDIE
6è Colloque National Traitement du Signal
GRETSI
- [15] R.A. ALTES 1970
Methods of wideband signal design for Radar
and Sonar systems, Thèse Univ. Rochester NY,
U.S.A., p. 248
- [16] J.R. SHEWELL 1959
Amer. Journ. Phys., vol. 40, p. 16 à 21
n° 27
- [17] B. ESCUDIE 1972
6è Congrès International Cybernétique NAMUR
Ass. Int. Cybernétique Ed., p. 276-289
- [18] A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO 1955
Public. Sc. Univ. Alger, tome 1, n° 1
série B, p. 17-32