



# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 26 au 30 AVRIL 1977

## FILTRAGE LINEAIRE et PROPAGATION ACOUSTIQUE

Denis de BRUCQ

Université de Rouen- Laboratoire de Mathématiques B. P 67 76130 Mt St AIGNAN.  
Ce travail a été effectué dans le cadre d'un contrat CETHEDEC.

### RESUME

Pour la détection du signal acoustique noyé dans un bruit marin, on envisage la mise en oeuvre des techniques de Bucy-Kalman et l'élaboration d'un modèle pour le bruit. A partir de l'équation aux dérivées partielles, linéarisée, décrivant cependant les pertes énergétiques, on établit la densité spectrale d'une des composantes du bruit de fond. Sur un exemple, on montre que les équations du filtrage s'appliquent lorsque le phénomène est décrit par une équation aux dérivées partielles au lieu d'une équation différentielle. Le procédé d'observation intervient dans la procédure de filtrage.

### SUMMARY

To detect an acoustic signal in a sea-noise, we anticipate to use the Bucy-Kalman techniques, and to elaborate a model for the noise : From the linearized, partial-derivatives equation which described nevertheless energetic losses, we established the spectral density function of one component of the noise. With an example, we show that the filtering equations apply to phenomena described by partial derivatives equations instead of differential equations. The observation procedure interferes in the filtering method.



## FILTRAGE LINEAIRE et PROPAGATION ACOUSTIQUE

Denis de BRUCQ

## I - RAPPELS SUR LES TESTS D'HYPOTHESES

A partir de mesures de la pression acoustique  $F$  effectuées en des points  $M$  de coordonnées  $(x, y, z, t)$  il s'agit de détecter si le champ  $F$  se réduit au bruit de fond de la mer ou si ce bruit a été modifié par l'apparition d'un signal.

Une partie  $D$  sous-ensemble de  $\mathbb{R}^4$  espace temps intervient seule dans les phénomènes envisagés et on introduit l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $D$  soit  $H \triangleq \{ g(x, y, z, t) ; \int \int \int \int_D g^2(x, y, z, t) dx dy dz dt < \infty \}$

Une mesure de pression du point de vue physique n'est pas une valeur en un point  $M$  mais plutôt une valeur numérique:

$F(g) = \int \int \int \int_D F(x, y, z, t) g(x, y, z, t) dx dy dz dt$  où  $g$  caractérise la mesure effectuée et provient de l'appareillage utilisé. L'espace  $H$  de Hilbert et l'intégrale précédente est un produit scalaire noté  $F(g) = \langle F, g \rangle$ . Ce nombre varie d'une expérience à l'autre. Les mesures sont réparties dans le temps et dans l'espace. On effectue à certains instants  $t^1, t^2, \dots, t^n$  des mesures en des points  $(x^i, y^i, z^i)$  avec  $i = 1, 2, \dots, n$ . Certains instants  $t^i$  peuvent être confondus.

Les mesures anciennes sont gardées en mémoire et l'information sur  $F$  s'accroît.

A l'aide des fonctions tests  $g$ , nous décrivons l'observation en disant que l'on se donne une suite de  $n$  fonctions tests  $g^1, g^2, \dots, g^n$ . Les  $n$  résultats de mesure  $F(g^i) = \langle F, g^i \rangle$   $i = 1, 2, \dots, n$ , constituent ainsi une suite de variables aléatoires.

Le cas de nombreuses mesures effectuées en même temps est compris dans ce schéma.

Nous avons mis en évidence un processus  $F$  qui à toute fonction test  $g$  de  $H$  associe une variable aléatoire  $F(g)$ ; si  $n$  mesures ont été effectuées à l'aide des fonctions tests  $g^1, g^2, \dots, g^n$ ; on ne connaît que les valeurs numériques  $F(g^1), \dots, F(g^n)$ .

Les diverses fonctions tests  $g^1, g^2, \dots, g^n$  introduisent un sous-espace de Hilbert (de dimension finie) soit  $H^n \triangleq V(g^1, g^2, \dots, g^n)$ . Si le bruit marin est seul à l'origine du processus  $F$ , les variables aléatoires  $F(g^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  ont une loi  $P_B^n$ . Si un signal intervient en plus, les variables aléatoires  $F(g^i)$   $i = 1, \dots, n$  ont une loi  $P_S^n$ .

La détection entre les deux hypothèses s'effectuerait à l'aide d'un résumé exhaustif

$$RE(n) = \log \frac{dP_S^n}{dP_B^n} \text{ par comparaison à un seuil. Les}$$

lois de probabilité portent sur  $H$  même si elles ne sont observables que sur  $H^n$ . On introduit donc

$$\frac{dP_S}{dP_B} \text{ et le lien avec } \frac{dP_S^n}{dP_B^n} \text{ sera à préciser.}$$

En général on utilise une loi de probabilité auxiliaire (innovation)  $P_w$  de propriétés très simples.

Soit  $w$  un processus gaussien centré de covariance donnée par la relation

$$\Gamma(g, h) \triangleq E(w(g) w(h)) = \langle g, h \rangle.$$

La loi de probabilité  $P_w$  gaussienne est déterminée par ces moments d'ordre 1 et 2. En admettant que  $P_S$  et  $P_B$  sont chacune équivalentes à  $P_w$  alors :

$$\frac{dP_S}{dP_B} = \left( \frac{dP_S}{dP_w} \right) \times \left( \frac{dP_B}{dP_w} \right)^{-1}$$

$$\log \frac{dP_S}{dP_B} = \log \frac{dP_S}{dP_w} - \log \frac{dP_B}{dP_w}$$

Sur l'espace  $H^n$ , les probabilités  $P_S^n, P_B^n$  sont alors équivalentes à  $P_w^n$  (notation évidente) ([3] chap VIII)

$$\log \frac{dP_S^n}{dP_B^n} = \log \frac{dP_S}{dP_w} - \log \frac{dP_B}{dP_w}$$

Partant d'une situation sans signal une technique de veille, consiste à prédire connaissant  $F(g^i)$   $i = 1, \dots, n$  la loi de probabilité de  $F(g^{n+1})$  pour une nouvelle mesure en  $g^{n+1}$ . Si l'écart entre la

## FILTRAGE LINEAIRE et PROPAGATION ACOUSTIQUE

Denis de BRUCQ

prévision  $E(F(g^{n+1}) / F(g^1), F(g^2), \dots, F(g^n))$  et la nouvelle mesure  $F(g^{n+1})$  paraît trop importante, on rejette l'hypothèse  $H_0$  bruit seul.

La loi de probabilité conditionnelle est essentielle pour estimer l'importance de l'écart.

Rappelons que dans le cas gaussien, et pour les processus sphériquement invariants, la prévision  $E(F(g^{n+1}) / F(g^1), F(g^2), \dots, F(g^n))$  et la meilleure prévision linéaire au sens des moindres carrés  $\text{Proj}_{H^n}(F(g^{n+1}))$  coïncident.

En se limitant à la prévision linéaire, il suffit de connaître la covariance  $\Gamma(g, h) = E(F(g)F(h))$  du processus  $F$  pour prédire  $\text{Proj}_{H^n}(F(g^{n+1}))$  : On orthonormalise la suite  $F(g^i)$   $i = 1, \dots, n$  par Gram-Schmidt pour obtenir  $e^1, e^2, \dots, e^n$  qui constitue l'innovation puis on écrit

$$\text{Proj}_{H^n}(F(g^{n+1})) = \sum_{i=1}^n \Gamma(e^i, g^{n+1}) e^i$$

La variance conditionnelle de  $F(g^{n+1})$  sous l'hypothèse gaussienne s'écrit :

$$\sum(F(g^{n+1})/H^n) \stackrel{\Delta}{=} E[F(g^{n+1}) - \sum_{i=1}^n \Gamma(e^i, g^{n+1}) e^i]^2 / e^1, e^2, \dots, e^n] = \Gamma(g^{n+1}, g^{n+1}) - \sum_{i=1}^n \Gamma(e^i, g^{n+1})^2$$

Sous l'hypothèse gaussienne, la loi de probabilité conditionnelle est déterminée par les valeurs numériques des  $F(g^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  desquels on déduit celles des  $e^i$   $i = 1, 2, \dots, n$ . La construction de la suite  $e^1, e^2, \dots, e^n$ , consiste à blanchir le bruit et permet sous l'hypothèse gaussienne d'utiliser les tests d'hypothèses en situation de variables aléatoires indépendantes.

II - FONCTION de COVARIANCE  $\Gamma$ 

Le rôle de la covariance  $\Gamma$  pour la prévision linéaire ayant été rappelé, il devient essentiel de connaître la fonction  $\Gamma : g, h \rightarrow \Gamma(g, h)$ .

Un premier procédé consisterait à obtenir une estimation statistique de  $\Gamma$  par des expériences répétées.

Les lois physiques impliquent des formes possibles pour  $\Gamma$  et parmi celles-ci, le retour à l'expérience déterminera la meilleure.

Nous proposons d'utiliser les travaux théoriques présentés dans [4] qui établissent l'équation

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{b}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta F = 0$$

où  $c$  est la vitesse de propagation à l'instant  $t$  et au point  $(x, y, z)$  et où  $b$  est une constante physique telle que  $\frac{b}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta F(x, y, z, t)$  décrire la perte d'énergie par absorption visqueuse ou par dissipation visqueuse lors de la propagation.

On trouve dans [4 p 27]

$$c = 1500 \text{ m/s}, \frac{b}{c^2} = \frac{1500}{2\pi^2} 10^{-14}$$

sous des conditions habituelles en température et en fréquence. On ne tient pas compte de l'évolution de la vitesse avec la profondeur.

Toute répartition en volume de source de pression créera un champ de pression.

Pour des raisons de simplicité proposons comme premier modèle pour décrire les fluctuations aléatoires du bruit marin, des sources aléatoires de pression totalement décorrélées en espace et en temps.

Dans ce modèle on prend également  $D = R^4$ . Soit  $w : g \rightsquigarrow w(g)$  processus aléatoire gaussien centré de covariance  $E(w(g)w(h)) = \langle g, h \rangle$  produit scalaire sur les fonctions  $g, h$  de  $H$ . Dans ces conditions, les sources de bruit sont réparties de façon isotrope et homogène dans tout l'espace. Ce processus de Wiener de l'espace temps a pour dérivée "le bruit blanc". On complète en prenant  $\sigma$  un coefficient de normalisation. Soit l'équation fondamentale

$$(E) \Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} F + \frac{b}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta F = \sigma \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$$

Le champ  $F$  solution de E par la technique usuelle des processus du second ordre ([5] § 14] conduit à une covariance  $\Gamma$  défini à l'aide d'un noyau  $\gamma$  invariant par translation et satisfaisant  $\gamma(x, y, z, t) = \int_D e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta+t\tau)} \rho(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau$ .



FILTRAGE LINEAIRE et PROPAGATION ACOUSTIQUE  
Denis de BRUCQ

Si  $\Gamma$  est l'opérateur  $g \rightsquigarrow \int_D \gamma(x-x^i, y-y^i, z-z^i, t-t^i)$

$$g(x^i, y^i, z^i, t^i) dx^i dy^i dz^i dt^i$$

fonction de  $H$ , rappelons que  $\Gamma(g, h) = \langle \Gamma g, h \rangle$

Par identification la densité spectrale vaut :

$$\rho(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{\sigma^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \frac{x^2}{c^2})^2 + \frac{b^2 \tau^2}{c^4} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}$$

La covariance  $\Gamma$  de  $F$  sur  $D$  est ainsi déterminée.

Pour vérifier si elle est cohérente avec les résultats expérimentaux calculons la densité spectrale de puissance : On fixe le point d'observation et on étudie la corrélation en fonction du temps. Soit

$$\gamma(0, 0, 0, t) = \int_{R^4} e^{i t \tau} \rho(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau$$

$$\text{et posons } \rho(\tau) = \int_{R^3} \rho(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta$$

Par suite

$$\rho(\tau) = 4\pi \sigma^2 \int_0^\infty \frac{l^2 dl}{(l^2 - \frac{\tau^2}{c^2})^2 + \frac{b^2}{c^4} \tau^2 l^4}$$

Or

$$\frac{c^4 l^2}{(c^2 l^2 - \tau^2)^2 + b^2 \tau^2 l^4} = A \left[ \frac{1}{(1-\alpha)^2 + \beta^2} - \frac{1}{(1+\alpha)^2 + \beta^2} \right]$$

$$\text{avec } \alpha^2 \triangleq \frac{\tau^2}{2r^2} [r + c^2] \quad A \triangleq \frac{c^4}{2\sqrt{2}rt(r+c^2)^{1/2}}$$

$$\beta^2 \triangleq \frac{\tau^2}{2r^2} [r - c^2] \quad \text{où } r^2 = c^4 + b^2 \tau^2$$

Le calcul effectif de  $\rho(\tau)$  est réalisable et

$$\text{vaut } \rho(\tau) = 4\pi \sigma^2 A \left[ \log \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} + \pi \frac{\alpha}{\beta} \right] \text{ d'où}$$

$$\rho(\tau) = \sqrt{2}\pi \frac{c^4 \sigma^2}{r\tau(r+c^2)^{1/2}} \left[ \log \frac{2r}{r-c^2} + \pi \left( \frac{r+c^2}{r-c^2} \right)^{1/2} \right]$$

On trouve une décroissance de 6dB par

octave alors que la valeur expérimentale est de 5,25

### III - IMPLICATION d'UN RESULTAT DE KREIN & GOHBERG.

Le processus  $g \rightsquigarrow F(g)$  engendre une loi de probabilité  $P_B$  si le seul bruit  $B$  est à l'origine des fluctuations de pression.

Par ailleurs nous avons introduit le processus gaussien centré de référence  $w$  (éventuellement

$\sigma w$  pour tenir compte de l'énergie  $\sigma$ ) ; soit

$w = (\Omega, \mathcal{A}, P, (w(g); g \in H), R, \mathcal{R})$  le processus wiener canonique. On prend pour  $\Omega$  l'espace des fonctions continues de  $H$  dans  $R$  et pour  $\mathcal{A}$ , la tribu des boréliens. Dans ces conditions la probabilité  $P_B$  est définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  et le processus

$w_B = (\Omega, \mathcal{A}, P_B, (w(g), g \in H), R, \mathcal{R})$  a pour loi de probabilité celle de  $g \rightsquigarrow F(g)$  : les deux processus  $w_B$  et  $F$  sont gaussiens centrés et les covariances coïncident par construction  $E(F(g)F(h)) = E_{P_B}(w(g)w(h))$

L'expérience amène à penser que le processus  $F$  est p.s. à trajectoires continues, gaussien centré et de loi de probabilité  $P_B$ . Si l'origine physique du phénomène est oubliée ainsi que l'équation  $E$ , la description la plus précise de  $F$  en tenant compte des propriétés précédentes est précisément  $w_B$ . Le résultat de Krein-Gohberg précise qu'il existe une transformation linéaire permettant de passer de  $w$  à  $w_B$ .

Définition ([1] Déf IV 4) : Le processus gaussien centré  $w_B = (\Omega, \mathcal{A}, P_B, (w(g), g \in H), R, \mathcal{R})$  admet une représentation causale suivant une famille  $\pi$  de projecteurs de  $H$  relativement à la mesure gaussienne

$w = (\Omega, \mathcal{A}, P, (w(g), g \in H), R, \mathcal{R})$ , s'il existe un processus gaussien (centré)

$\gamma = (\Omega, \mathcal{A}, P, (Y(g), g \in H), R, \mathcal{R})$  vérifiant

$$\text{a) } \forall q \in \pi \quad \forall g \in q(H) \quad Y(g) \in \bigvee_{h \in q(H)} Y(h)$$

b)  $P_B$  : probabilité image de  $P$  par le processus  $Y$ .

Dans l'utilisation de cette définition, la famille  $\pi$  de projecteurs de  $H$  provient des diverses expériences  $g^1, g^2, \dots, g^n, \dots n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q^n$  est le projecteur orthogonal de  $H$  sur  $H^n$  et l'ensemble de ces projecteurs  $q^n$  constitue  $\pi$ .

L'intérêt de cette définition provient du résultat suivant ([1], Prop IV 5) : sous des conditions très générales - qui sont usuellement vérifiées en pratique - et si  $P$  est équivalent à  $P_B$  alors il existe

# FILTRAGE LINEAIRE et PROPAGATION ACOUSTIQUE

Denis de BRUCQ

une représentation causale de  $w_B$  suivant la famille  $\pi$ , relativement à . De façon plus précise, il existe un opérateur  $G$ , linéaire, continu, inversible de  $H$  dans  $H$  tel que a)  $\forall g \in H \quad Y(g) = G w(g)$  et et tel que b)  $\forall g \in H \quad \forall q \in \pi$  avec  $g \in q(H)$  alors  $Y(g) \in v w(h) \quad h \in q(H)$

La propriété a) signifie que la pression  $F(g)$  ou plutôt le processus équivalent  $Y(g)$  s'exprime explicitement à l'aide de  $w$ . L'équation E donne une relation implicite entre  $F$  et  $w$ .

La propriété b) signifie que la pression  $F(g)$  ou plutôt le processus équivalent  $Y(g)$  lorsque  $g=g^{n+1}$  est fixé, ne s'exprime qu'à l'aide des mesures passées  $g^1, g^2, \dots, g^n$  et l'on voit apparaître ici la causalité.

La détermination précise de la fonction de covariance  $\Gamma(g, h)$ ,  $g, h \in H$  ainsi que la donnée de la suite des expériences  $g^1, g^2, \dots, g^n, \dots$  définissent un opérateur  $G$  et une représentation causale de la pression  $F(g)$ ,  $g \in H$  à l'aide du processus de Wiener  $w$  par  $Y(g) = G w(g)$ . Ensuite l'expression trouvée pour  $G$  permet la construction d'un résumé exhaustif ([1] prop IV 8).

## IV. FILTRAGE SUR DES EQUATIONS AUX DERIVES PARTIELLES.

La connaissance de la covariance  $\Gamma(g, h)$ ,  $g, h \in H$  ne paraissant pas assez précise à l'heure actuelle et l'adéquation de l'équation E avec la réalité pour la détermination de  $\Gamma$  étant encore en discussion, il paraît souhaitable de tester sur un cas simple d'équations aux dérivées partielles les techniques de filtrage de Bucy-Kalman telles qu'elles résultent du paragraphe III.

Partons du modèle à deux paramètres

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = P \theta + F \frac{\partial \theta}{\partial u} + G \frac{\partial \theta}{\partial v} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}$$

$$z = \theta + \epsilon V$$

avec  $P, F, G, \sigma, \epsilon$  constantes numériques,  $\theta$  vecteur d'état,  $z$  observation,  $W, V$  processus de Wiener.

La discréétisation de ces équations s'effectue dans le plan  $(u, v)$  en introduisant un pas  $(\Delta u, \Delta v)$ .

$$\text{Par suite } \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad u = i \Delta u, \quad v = j \Delta v.$$

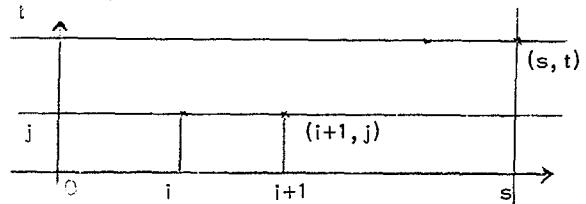
Le système discréétisé devient  $i, j \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(i+1, j+1) = \theta(i, j+1) + \theta(i+1, j) - \theta(i, j) + \\ P \theta(i, j) \Delta u \Delta v + F(\theta(i+1, j) - \theta(i, j)) \Delta v + \\ G(\theta(i, j+1) - \theta(i, j)) \Delta u + \sigma w(i+1, j+1) \sqrt{\Delta u \Delta v} \\ z(i+1, j+1) = \theta(i+1, j+1) + \epsilon V(i+1, j+1) \sqrt{\Delta u \Delta v}. \end{array} \right.$$

$$\text{Introduisons l'espace } H(i, j) \stackrel{\Delta}{=} v \{ z(i', j') ;$$

$i' \leq i, j' \leq j \}$  des observations relatives au point  $(i, j)$ .

Il s'agit d'obtenir  $\text{Proj}_{H(s, t)} \theta(s, t)$ , estimation de  $\theta(s, t)$  lorsque  $H(s, t)$  est connu (où  $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ) et ceci de façon récursive à partir de  $\text{Proj}_{H(i, j)} \theta(i, j)$  avec  $i \leq s, j \leq t$ .



Etudions un passage de  $(i, j)$  à  $(i+1, j)$  c'est-à-dire une translation horizontale d'un cran. Introduisons les vecteurs

$$\theta(i) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \theta(i, 1) \\ \theta(i, 2) \\ \vdots \\ \theta(i, j) \end{bmatrix} \quad Z(i) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} z(i, 1) \\ z(i, 2) \\ \vdots \\ z(i, j) \end{bmatrix} \quad w(i) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} w(i, 1) \\ w(i, 2) \\ \vdots \\ w(i, j) \end{bmatrix} \quad v(i) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} v(i, 1) \\ v(i, 2) \\ \vdots \\ v(i, j) \end{bmatrix}$$

Le système D prend une forme linéaire sur  $\theta(.)$  et sur  $Z(.)$ . Ce résultat est essentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(i+1) = U \theta(i) + \Omega W(i+1) \sqrt{\Delta u \Delta v} \\ Z(i+1) = \theta(i+1) + \epsilon V(i+1) \sqrt{\Delta u \Delta v} \end{array} \right.$$

avec

$$U \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} (I + G \Delta u) & & & 0 \\ (P + F G) \Delta u \Delta v & , & (I + G \Delta u) & 0 \\ (I + F \Delta v) (P + F G) \Delta u \Delta v, (P + F G) \Delta u \Delta v & & (I + G \Delta u) & \\ \hline & & & \\ (I + F \Delta v)^{j-2} (P + F G) \Delta u \Delta v, (I + F \Delta v)^{j-3} (P + F G) \Delta u \Delta v & & & \end{bmatrix}$$



## FILTRAGE LINEAIRE et PROPAGATION ACOUSTIQUE

Denis de BRUCQ

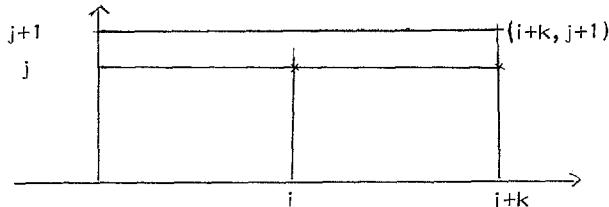
$$\begin{array}{cccc}
 \sigma & 0 & 0 & 0 \\
 \Omega \Delta & (I + F \Delta v) \sigma & \sigma & 0 \\
 & (I + F \Delta v)^2 \sigma & (I + F \Delta v) \sigma & \sigma \\
 \hline
 & (I + F \Delta v)^{j-1} \sigma & (I + F \Delta v)^{j-2} \sigma & \dots \dots \dots \sigma
 \end{array}$$

La prévision de  $\theta(i+1)$  à partir de  $\theta(i)$  lorsqu'

une observation nouvelle, vectorielle  $Z(i+1)$ , est effectuée relève des techniques usuelles de Bucy-Kalman ([2] p 200). La mise en oeuvre des formules classiques nécessite les données initiales  $\text{Proj} \theta(i)$  ;  $H(i, j)$ . Observons que l'espace de projections  $H(i, j)$  dépend des deux indices  $(i, j)$ .

Le passage de  $(i, j)$  à  $(i+1, j)$  puis à  $(i+2, j)$  etc. ne nécessite aucune nouvelle définition et le résultat du calcul d'un pas sert de condition initiale pour le pas suivant.

Il n'en va plus de même si on change de direction. Arrivés en  $(i+k, j)$ , nous connaissons



$\text{Proj} \theta(i+k)$ . Pour monter vers  $(i+k, j+1)$ , la condition  $H(i+k, j)$  initiale devient la connaissance de  $\text{Proj} \theta(i, j)$  avec  $H(i+k, j)$  variant de 1 à  $i+k$  ! Il faut effectuer un filtrage rétrograde ([2] p215), pour calculer à partir de

$\text{Proj} \theta(i+k)$  les divers vecteurs  $\text{Proj} \theta(i)$   $H(i+k, j)$

avec  $i = 1, 2, \dots, i+k-1$ . Ainsi tout changement de direction nécessite l'emploi d'un filtre rétrograde pour récupérer la condition initiale.

Soit  $C = ((i(\alpha), j(\alpha)) ; \alpha = 1, 2, \dots, s+t)$ , un chemin strictement croissant allant de  $(0, 0)$  à  $(s, t)$ . Tout chemin comprend  $s+t$  pas. A chaque  $\alpha$  correspond un espace d'observation

$H(i(\alpha), j(\alpha)) \triangleq \{z(k, l) ; k \leq i(\alpha), l \leq j(\alpha)\}$ . La famille de projecteurs  $q(\alpha)$  sur ces espaces  $H(i(\alpha), j(\alpha))$  constitue la famille  $\pi$  totalement ordonnée du para-

graphe III et la prévision pour chaque pas  $\alpha \rightsquigarrow \alpha+1$  ne fait intervenir que les expériences passées ainsi qu'il était annoncé. Le résultat  $\text{Proj} \theta(s, t)$  est indépendant du chemin parcouru défini par la fonction  $\alpha \rightsquigarrow (i(\alpha), j(\alpha))$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] de Brucq Denis, Processus gaussiens multivariates et extraction d'un signal dans un bruit. Revue du Cethedec 1976 4ème trimestre.
- [2] Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press.
- [3] Neveu, Processus aléatoires gaussiens, Les presses de l'Université de Montréal.
- [4] Odéro et Poirée, L'acoustique non linéaire dans les fluides, Revue du Cethedec 1976 N°46 p. 1-53.
- [5] Yaglom, Stationary Random Functions, Prentice Hall

## NOTATIONS

- $e_1, e_2, \dots, e_n$  famille orthonormale de vecteurs de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
- $F$  champ de pression
- $H$  espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^4$
- $H^n$  sous-espace de Hilbert engendré par  $g, g, g$
- $q$  symbole de projecteur ;  $q^n$  projecteur orthogonal sur  $H^n$
- $R, E$  résumé exhaustif intervenant dans un test entre deux hypothèses
- $w$  processus de Wiener
- $Z$  processus d'observation
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espace de Probabilité
- $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  espace des réels muni de sa tribu borélienne
- $P_B, P_S$  Probabilité image de  $P$  par le bruit  $B$ , par le signal  $S$
- $\Delta$  Laplacien  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
- $\Gamma(g, h)$  covariance définie par  $g, h$  de  $H$
- $\sigma^2$  coefficient de proportionnalité donnant l'énergie du bruit
- $\theta$  vecteur d'état
- $dP_S$  dérivée de Radon-Nikodym.
- $dP_B$